

高等學校教學用書

車 輛 學

中 冊

M·B·威諾庫洛夫 著

人 民 鐵 道 出 版 社

高等學校教學用書

學 輛 車

中 冊

M · B · 威 諾 庫 洛 夫 著

裴毓達 楊家駿 陳忠淦 譯
劉興漢 毛家駒

人 民 鐵 道 出 版 社

一 九 五 六 · 北 京

本書論述了車輛振動、車輛的底架及車體、牽引緩衝裝置、貨車、罐車、保溫車的類型、構造及標準尺寸之選擇，以及計算方法。本書是爲了適應鐵道學院機械系車輛專業教學計劃內「車輛」課程而編寫的。

本書可作鐵道學院教材，並可供鐵路車輛部門工程師、技術員，以及有關人員學習與參考之用。

本書譯者：

裴毓達（第十、十一、十二章）

楊家駿（第十三章）

陳忠淦 劉興漢（第十四章）

毛家馴（第十五章）

本書校者：

陳忠淦 毛家馴 嚴堯耄

車 輛 學

中 冊

ВАГОНЫ

蘇聯 М·В·威諾庫洛夫 著

蘇聯國家鐵路運輸出版社（一九五三年莫斯科俄文版）

ТРАНСЖЕЛДОРИЗДАТ

Москва 1953

裴毓達 楊家駿 陳忠淦

劉興漢 毛家馴

譯

人民鐵道出版社出版

（北京市霞公府十七號）

北京市書刊出版營業許可證出字第壹零號

新 華 書 店 發 行

人民鐵道出版社印刷廠印（北京市建國門外七聖廟）

一九五六年二月初版第一次印刷平裝印 1—1,585 冊

書號：468 開本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印張 14 $\frac{2}{5}$ 324 千字 定價（8）1.99 元

目 錄

第十章 車輛振動

1. 車輛振動的主要種類·····	1
2. 振動中心及振動軸·····	2
3. 車輛橫向穩定性。浮心的概念及浮心位置·····	4
4. 浮沉振動·····	8
5. 點頭振動·····	14
6. 側擺及側滾振動·····	18
7. 搖頭振動·····	20
8. 輪對及轉向架蛇行運動·····	22
9. 車輛強迫振動·····	25
10. 車輛運行平穩性及安全的標準·····	27
11. 各型轉向架比較試驗的結果·····	30
12. 消除客車內雜音的措施·····	35

第十一章 車輛底架及車體

1. 分類及構造基本原理·····	37
2. 計算底架及車體的基本準則·····	44
3. 承載底架的計算·····	52
4. 具有承載側壁及底架的車體計算·····	60
5. 在散碎貨物側壓力下車壁的計算·····	67

第十二章 牽引緩衝裝置

1. 牽引緩衝裝置的用途及分類·····	73
2. 螺桿鏈環·····	74
3. 貫通式車鉤·····	76
4. 截斷式車鉤·····	77
5. 盤形緩衝器·····	78
6. 採用自動車鉤的必要性·····	81

7. 蘇聯自動車鈎的優越性·····	82
8. 自動車鈎分類·····	82
9. CA-3自動車鈎的構造·····	83
10. 自動車鈎機構的組裝及解體·····	86
11. 自動車鈎機構各部分間相互作用·····	87
12. 解鈎裝置·····	90
13. 車鈎復原裝置·····	91
14. 連結裝置·····	91
15. 緩衝器·····	95
16. 客車緩衝裝置·····	105
17. 自動車鈎零件之製造特點·····	112
18. 自動車鈎與鏈鈎連掛的過渡裝置·····	113
19. 自動車鈎鈎頭在水平面內的移動量及自動車鈎縱向中心線 在軌頭以上的位置·····	115
20. 自動車鈎自行開鎖的原因及預防措施·····	120
21. 牽引緩衝裝置上的作用力·····	125

第十三章 貨 車

1. 棚車·····	141
2. 高邊車（敞車）·····	154
3. 低邊車（平車）·····	164
4. 超重平車·····	169

第十四章 罐 車

1. 容積50公尺 ³ 的四軸罐車·····	173
2. 25公尺 ³ 的二軸罐車·····	182
3. 瀝青罐車和瀝青高邊車·····	183
4. 具有套箱式加熱器的罐車·····	187
5. 酒精罐車·····	189
6. 牛奶罐車·····	190
7. 酸類罐車·····	190
8. 氣體罐車·····	195
9. 無底架罐車·····	196
10. 放出裝置及安全閥·····	197
11. 罐車載重量的折算·····	201
12. 罐車罐體的計算·····	201

13. 對於罐車走行部分的要求·····	225
----------------------	-----

第十五章 保温車

1. 保温車的用途及其分類·····	227
2. 保温車的車體骨架·····	230
3. 保温車車體之絕熱·····	232
4. 車體構件之防腐及防銹·····	234
5. 冰鹽系統中的空氣冷卻方式·····	234
6. 具有車端冷卻設備的車輛·····	235
7. 具有車頂冷卻設備的車輛·····	238
8. 具有鹽液自動循環的車輛·····	240
9. 具有機械冷卻系統的車輛·····	243
10. 特種用途的保温車·····	244
11. 保温車的加溫·····	246
12. 保温車的熱計算·····	247
13. 對於保温車走行部的要求·····	249

第十章 車輛振動

1. 車輛振動的主要種類

在鋼軌上運行的車輛，常感受鉛垂、橫向及縱向力，此等力量能引起車輛簧上部分的振動運動。所述各種力量之發生，與車輛走行部分的狀態、彈簧裝置的式列以及綫路平面形、縱斷面形及狀態等有關。

經車身某點 O 引三個坐標軸 xx ， yy ， zz （圖246， a ）。在作用於車輛之各力的影響下，可產生下列各種形式之主要振動。

1. 浮沉振動，即車輛簧上部分保持其原有平行位置，依 zz 軸作上下移動之（圖246， b ）。在此種運動中，車體與轉向架上所有各點，在某瞬間內均具有相同之加速度。此種振動主要是由於鉛垂力的作用。

2. 點頭振動，即車輛簧上部分對 yy 軸作某種角度 θ 之轉動（圖246， c ）。

點頭振動之發生，係由於車輛在軌隙上衝擊、輪箍踏面上有擦傷、綫路坑窪不平及軸頸對於車輪路面成偏心所致。實際上很少遇到單純之點頭振動。通常多與浮沉振動同時發生。

3. 側擺振動，即車體或轉向架沿 yy 軸移動（圖246， d ）。

此種振動是由於與 yy 軸平行之水平力作用而產生的。

4. 側滾振動，即車輛簧上部分繞水平軸 xx 作某一角度 β 之轉動（圖246， e ）。

側滾振動之發生，係由於受左右軌隙錯開的衝擊、兩軌高低不平、同軸車輪中有一輪擦傷及進入曲綫時受離心力的作用所致。

5. 搖頭振動，即車體繞鉛垂軸 zz 作某種角度 φ 之轉動（圖246， f ）。

此種振動之發生，係由於輪箍踏面成爲錐形，輪對組裝不正、車輪直徑大小不一及機車蛇行運動所致。

6. 伸縮振動，即車輛沿 xx 軸作前後移動。此種運動之發生，多由於機車往復運動部分的質量未能均衡所致。

伸縮振動的振幅極小（不大於3~5公厘），因此在本章中對於伸縮振動問題不予討論。至於由機車牽引力變動及制動關係而引起的縱向振動則在第十二章中將予以研究。

上述每一種振動均能單獨地或與他種同時發生。

在軌隙上的衝擊力，車輪或鋼軌擦傷引起的衝動及輪對偏心狀態引起的作用力

等等，因其成週期性地作用於車體及轉向架，均能使車輛簧上部分發生強迫振動。

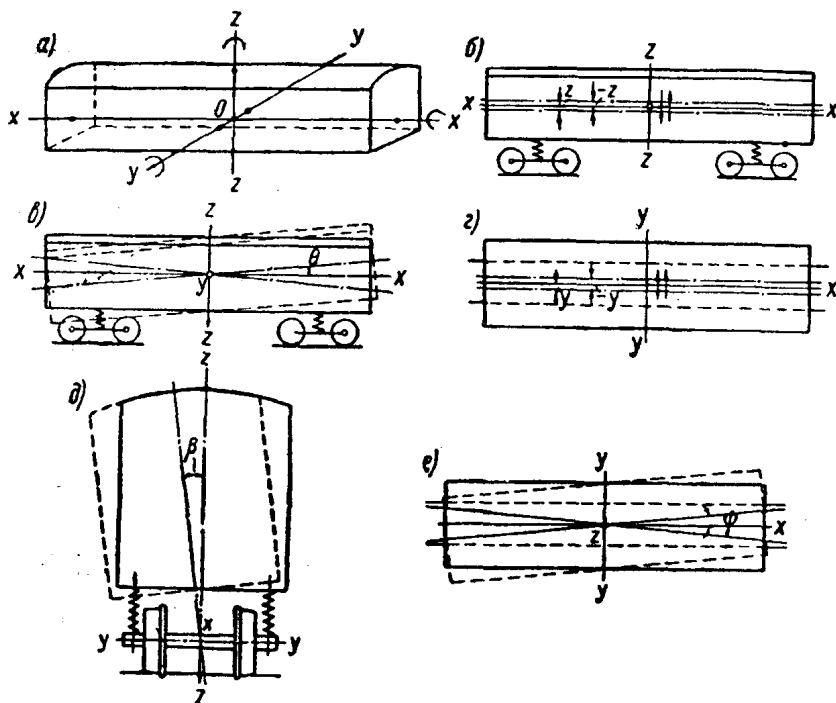


圖246. 車輛振動的主要種類

前曾指出，凡引起強迫振動之力均稱為激動力。倘在振動體系上其激動力振動週期等於自由振動之週期，即可能發生共振現象。達於共振階段之車輛速度，稱為臨界（危險）速度。對於每種振動，均各有其臨界速度，其求出方法將分敘於後。

2. 振動中心及振動軸

茲取一輛靜止的或依一定速度在平直線上運行的車輛，對其自由振動進行研究。

首先規定，凡直綫位移均按沿坐標軸 x , y , z 之變化量計算；轉動位移則按新坐標軸與原坐標軸間所成之傾角計算（圖246）：

θ 為繞 yy 軸轉動時角度（點頭振動）

β 為繞 xx 軸轉動時角度（側滾振動）

ψ 為繞 zz 軸轉動時角度（搖頭振動）

取三個互相垂直的軸之交點為原點（側滾、搖頭及點頭振動的軸），今後在說明中即稱各該軸為振動軸，而其交點則稱為振動中心或彈性中心。

設軸箱與其導框之間沒有遊間，而輪對因受阻力不能滾動，則無轉向架車輛在作點頭振動時，其 yy 軸位於通過軸箱上疊板彈簧或螺旋彈簧下支面之水平平面上

(圖247, a)。

對稱裝載之無轉向架車輛(圖247, δ), 其側滾振動軸 xx 在簧上部分中央垂直平面與通過軸箱上疊板彈簧或螺旋彈簧下支承面水平平面之交線上。在今後的證明中, 假定 xx 及 yy 軸能在其整個振動週期間保持其原有位置。

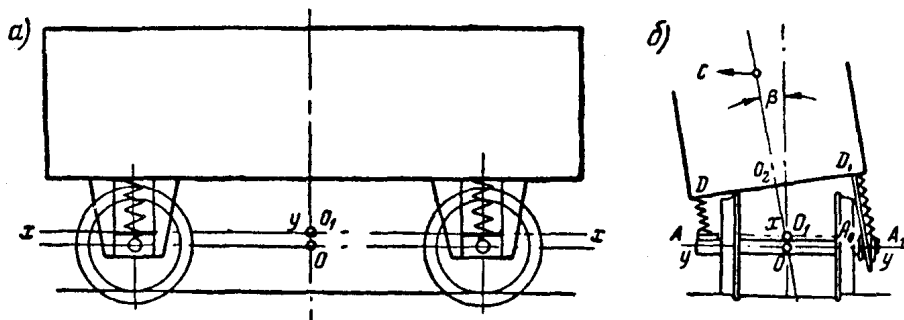


圖247. 車輛之振動軸

由於水平橫向力之作用, 車體連同底架及軸箱導框(無轉向架車輛)即依該力之作用方向而傾斜。軸箱導框與軸箱槽間的間隙, 可避免它們在側滾時互相卡擠。倘遊間不足, 則於車輛振動時將發生軸箱歪斜及軸瓦發熱現象。

經軸箱與軸箱導框接觸點 A_0 引水平線 AA_1 , 使與彈簧幾何中心線交於點 A 及 A_1 。直線 AD 及 A_1D_1 垂直於 DD_1 。

在直角梯形 ADD_1A_1 中, 直線 O_1O_2 為其中線, 即

$$O_1O_2 = \frac{AD + A_1D_1}{2}。$$

因水平力不能變動加於車輛兩側彈簧上的鉛垂載荷, 此項載荷恒等於簧上部分的重量, 因此 O_1O_2 永是梯形的中線, 這就是說, 振動是繞經過位於輪對幾何中心線略高處之點 O_1 而發生的。今後在討論無轉向架車輛中, 將認為 xx 及 yy 兩軸均位於經過輪對幾何中心線之水平平面以內。

茲再取彈簧剛度不同及簧上部分的重心不與車輛中央相合的兩軸車(按照圖248所示), 求其振動中心位置。

設車體在力偶影響下對於通過點 O_1 之水平軸線作 θ 角之轉動, 點 O_1 與通過車體重心鉛垂線間距離為 x 。

由於車體轉了 θ 角, 軸箱 A 上的彈簧(剛度為 κ_1)產生一額外的撓度 Δf_1 , 而具有剛度為 κ_2 之軸箱 B 上的彈簧, 其撓度則減小了 Δf_2 。

由於上述額外撓度, 引起彈簧上額外彈力 R_A 與 R_B 。此兩力數值相等, 因此

$$2R_A - 2R_B = 0。$$

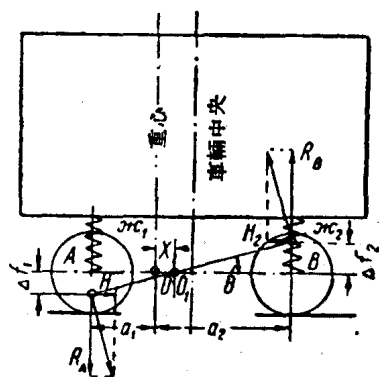


圖248. 求振動中心位置之計算簡圖

此時

$$R_A = \kappa_1 \Delta f_1 \quad \text{及} \quad R_B = \kappa_2 \Delta f_2; \quad (361)$$

$$\Delta f_1 = (a_1 + x)\theta \quad \text{及} \quad \Delta f_2 = (a_2 - x)\theta, \quad (362)$$

式中 a_1 及 a_2 為通過車體重心所引垂線與 A 及 B 兩軸箱中心間之距離。

將 Δf_1 及 Δf_2 的數值代入公式 (361)，得

$$R_A = \kappa_1(a_1 + x)\theta \quad \text{及} \quad R_B = \kappa_2(a_2 - x)\theta。$$

因此

$$2R_A - 2R_B = 2\kappa_1(a_1 + x)\theta - 2\kappa_2(a_2 - x)\theta = 0,$$

由此得

$$x = \frac{a_2 \kappa_2 - a_1 \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}。 \quad (363)$$

設所取的彈力力矩的原點 O 與車體重心位於同一垂線上，且此時彈力力矩和等於零，

$$a_2 \kappa_2 - a_1 \kappa_1 = 0,$$

或

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2},$$

則

$$x = 0。$$

根據以上論證可見：在此種情況下的振動中心與車體重心位於同一垂線之上。

倘軸箱 A 及 B 上的彈簧剛度相等，即 $\kappa_1 = \kappa_2$ ，則由公式 (363) 得出

$$x = \frac{a_2 \kappa_2 - a_1 \kappa_1}{2\kappa_1} = \frac{a_2 - a_1}{2},$$

亦即，在此種情況下，振動中心位於車輛之對稱平面上。大多數車輛的振動中心均具有如上所述的位置。

惟有當 H_1 與 H_2 作用方向相反時，才有可能構成第二平衡方程式（水平反作用力之和等於零）。上述情況惟有當 O 點位於輪對幾何中心線之平面內時始有可能。

在轉向架式四軸車輛上，可認為其振動中心位於通過轉向架搖枕下支承面之水平平面上。在此種情況中，須假定走行部之阻力能阻碍輪對之滾動。

3. 車輛橫向穩定性。浮心的概念及浮心位置

車輛的運行品質以振動週期、振幅及加速度的數值作為衡量尺度。

在剛度不變的彈簧裝置中，其撓度與其承受載荷成正比，若增加彈簧的撓度或彈度，則其振動運動之加速度亦隨之而縮減。

但另一方面，增加彈簧彈度僅能改善其鉛垂方向之運行品質；在橫向方面，當車輛通過曲線及道岔之際，就要增加車體傾角，並產生振幅較大之側滾振動。由此可知，所選擇之彈簧裝置，必須在不引起劇烈的側滾的條件下，能够保證車輛作點

頭及浮沉振動時有必要之運行平穩性。

彈簧剛度之選擇亦與車輛之橫向穩定性至有關係。

車輛在曲線區間運行時，由於離心力作用能發生一種傾覆力矩。離心力

$$C = \frac{P_3}{g} \cdot \frac{v^2}{R},$$

式中 P_3 ——車體重量，公斤；
 g ——重力加速度，公尺/秒²；
 v ——車輛運行速度，公尺/秒；
 R ——曲線半徑，公尺。

對曲線上車體穩定狀態而言，如風壓力 H_0 之合力與離心力 C 兩者之作用方向相同時，即形成最不利的情況。

當車體受到力 H_0 及 C 作用時，必自其原來正中位置離開，同時其彈簧反力之合力位置亦隨載荷之變更而移動。

彈簧鉛垂反力之合力作用線與車體對稱軸線 ss 之交點 M ，可仿船舶穩定性學說上的名辭稱之為「浮心」(圖249)。

求有轉向架車輛之浮心位置時，可假定側向振動軸位於通過搖枕下支承面之平面。在具有自動車鉤之車輛上，側向振動的軸則可能與自動車鉤鉤體之中心線吻合。爲了求出浮心至側向振動軸間所成距離 h_M (圖249)，命：

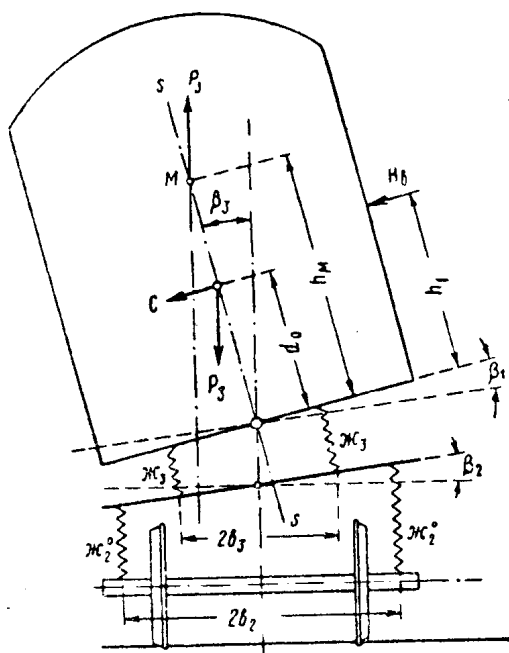


圖249. 求浮心位置之計算簡圖

C ——作用於車體之離心力，公斤；
 d_0 ——搖枕下支承面（通過搖枕彈簧箍之上平面）至車體重心間距離，公分；
 H_0 ——車體側面上風壓合力，公斤；
 h_1 ——搖動台彈簧箍的上平面至風壓合力 H_0 間距離，公分；
 $2b_3$ ——左右兩組搖動台彈簧中心間距離，公分；
 $2b_2$ ——左右兩組軸箱彈簧中心間距離，公分；
 K_3 ——一組搖動台彈簧之剛度，公斤/公分；
 K_2^0 ——一組軸箱彈簧之換算剛度，公斤/公分；
 β_1 ——車體對轉向架剛架之傾角，弧度；
 β_2 ——轉向架剛架對水平線之傾角，弧度；

① 所謂一組搖動台彈簧，係指一個多排之橢圓彈簧或其換算物。一組軸箱彈簧則指一個軸箱上的疊板彈簧及螺旋彈簧。

β_3 ——車體對鉛垂線之傾角（略去對轉向架之水平移動），弧度；

P_3 ——車體重量及有效載荷，公斤， $P_3 = m_3 g$ ；

P_2 ——轉向架簧上部分重量，公斤， $P_2 = m_2 g$ ；

f_3 ——搖動台彈簧靜撓度，公分； $f_3 = \frac{P_3}{4\kappa_3}$ ，

f_2^0 ——軸箱彈簧靜撓度，公分； $f_2^0 = f_1 + f_2$

（ f_1 ——疊板彈簧靜撓度， f_2 ——螺旋彈簧靜撓度）；

$$f_2^0 = \frac{P_3 + 2P_2}{8\kappa_2^0}。$$

兩搖動台彈簧可以另兩組假想彈簧代替。這兩組假想彈簧間距離為 $2b_2$ ，但當車體簧上部分轉動 β_3 角度時，後者的反抗力矩與原彈簧的復原力矩相同。

依前證公式（162），此種假想彈簧之剛度 κ_3' 應為

$$\kappa_3' = \left(\frac{b_3}{b_2}\right)^2 \kappa_3。$$

如認為假想的彈簧與軸箱彈簧位於同一之平面內，則整個車輛的假想的彈簧裝置之總剛度 $\sum \kappa_0$ 可自下列比式求出，即

$$\begin{aligned} \frac{P_3}{\sum \kappa_0} &= \frac{P_3 + 2P_2}{8\kappa_2^0} + \frac{P_3}{4\kappa_3'} = \frac{P_3 + 2P_2}{8\kappa_2^0} + \frac{b_2^2 P_3}{4b_3^2 \kappa_3} = \\ &= f_1 + f_2 + \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^2 f_3。 \end{aligned}$$

當車體對鉛垂線傾斜 β_3 角度時，彈簧反力所起的力矩 $\sum \kappa_0 b_2^2 \beta_3$ ，應等於合力之力矩：

$$M_n = P_3 \cdot h_M \beta_3 = \sum \kappa_0 b_2^2 \beta_3，$$

由此求得由浮心至側向振動中心軸間距離 h_M ：

$$h_M = \frac{\sum \kappa_0 b_2^2}{P_3} = \frac{b_2^2}{\frac{P_3}{\sum \kappa_0}} = \frac{b_2^2}{f_1 + f_2 + \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^2 f_3}。$$

由上式得

$$f_1 + f_2 + \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^2 f_3 = \frac{b_2^2}{h_M}。 \quad (364)$$

當 $h_M < d_0$ 時，車體發生傾覆。

倘 $h_M = d_0$ ，則車體傾斜成 β_3 角後不能回復其原來中央位置，因為此時的復原力矩 $P_3 (h_M - d_0) \beta_3 = 0$ 。

欲使車體穩定，必須使 h_M 數值達到這樣一個數值：復原力矩 $P_3(h_M - d_0) \beta_3$ 永能克服彈簧摩擦力所產生之力矩。

彈簧裝置剛度之選擇，當軸箱彈簧及搖動台彈簧具有摩擦力時，爲了求得車體之穩定位置應選擇

$$h_M \geq d_0 + 2 \text{ 公尺。}$$

在具有半截金屬壁板的車體上， $d_0 = 0.7 \sim 0.85$ 公尺。木製及金屬車體上 $d_0 = 1.35 \sim 1.4$ 公尺。因此對於 h_M 能得出下列的數值：

$h_M = 2.7 \sim 2.85$ 公尺——對於具有半截金屬壁板之車體；

$h_M = 3.35 \sim 3.4$ 公尺——對於具有全木製及全金屬壁板車體。

取 b_2, b_3, h_M 的數值代入公式(364)，並取我國車輛中央彈簧裝置的 $f_3 = 100 \sim 130$ 公厘，則對於具有半截金屬壁板之車體 $f_1 + f_2 + f_3 \approx 250 \sim 300$ 公厘；對於木製及金屬車體，則 $f_1 + f_2 + f_3 = 180 \sim 220$ 公厘。當 $2b_3 = 1.640$ 公厘時，應當選擇上述 $f_1 + f_2 + f_3$ 的最大數值；當 $2b_3 = 1500$ 公厘時，應選擇其最小值。

由此可知，車輛簧上部分之重心位置及搖動台彈簧間距離 $2b_3$ ，對彈簧裝置所能容許的最大撓度影響甚大。車輛簧上部分的重心位置高時，所選擇之彈簧剛度較車體重心位置低的車輛的爲大。

車輛具有過於柔軟之彈簧，則車體在曲綫區間能發生大的傾斜，因此必須校核車體在曲綫上之傾角 β_3 。

車輛運行於曲綫時之車體平衡條件，可取前用符號藉下列方程式正確表出，即

$$P_3(h_M - d_0)\beta_3 - \frac{P_3}{g} \cdot \frac{v^2}{R} d_0 - H_s h_1 = 0 \quad (\text{對側滾中心取力矩})，$$

由此得

$$\beta_3 = \frac{\frac{P_3}{g} \cdot \frac{v^2}{R} d_0 + H_s h_1}{P_3(h_M - d_0)}。$$

增加 h_M 或減少 d_0 ，車體傾角即形減小。傾角 β_3 之最大容許數值，是隨機車車輛限界及建築接近限界的橫向尺寸而規定的。

橫向穩定器，在具有柔軟彈簧裝置的車輛上，爲加強其車體橫向穩定性，而採用一種名爲橫向穩定器的特種裝置。此種橫向穩定器祇於側滾（角移動）時發揮抵抗作用。採用穩定器後，可以提高客車轉向架彈簧合併靜撓度達360~400公厘。

用於客車轉向架上的槓桿式穩定器（圖250），是由銜接於搖枕3上的兩個等臂槓桿7所組成。兩槓桿的中點以銷2與搖枕相聯，其外端4各接於吊桿5上；其另一端則互相用吊環6銜結。此種槓桿不影響垂直移動，但能抵抗搖枕傾斜

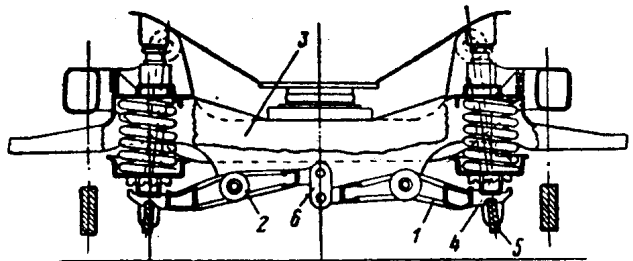


圖250. 槓桿式穩定器

及車體的側滾振動。

扭桿式穩定器（圖251），使用於快速列車的客車轉向架上，扭桿式穩定器通常為兩個與搖枕5平行之扭桿1所構成。扭桿可自由轉動於裝在轉向架剛架上的軸承4中。搖枕5藉吊桿2與扭桿端部3相聯接。

扭桿穩定器對於車輪浮沉及點頭振動並不起任何阻抗作用。但於發生側滾之際

便能與扭桿彈簧一樣，造成由於桿1扭轉而產生的額外復原力矩。此種力矩對側滾振動能起彈性的抵抗作用。

此種穩定器構造上的缺點，為具有感受交變負擔力之銷節及軸承。因此，當此項裝置處於中間位置時，常因銷結處不可避免之間隙產生隨磨耗程度而擴大的無效行程。銷結處磨耗可利用錐形膠皮套以調整之。

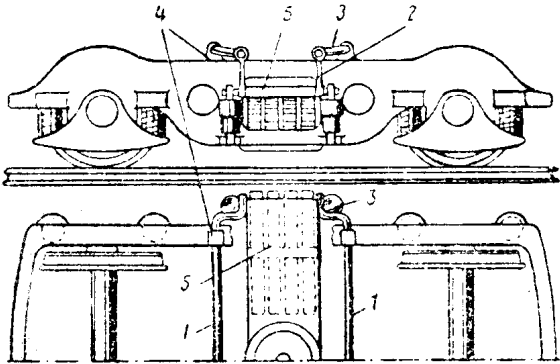


圖251. 扭桿式穩定器

4. 浮 沉 振 動

如前所述，由於突然受有衝擊力或衝動而使車輛簧上部分發生的振動稱為自由振動。

取具有三系彈簧裝置的四軸車輛之車體及轉向架的鉛垂自由振動（浮沉）加以討論，但不考慮彈簧摩擦阻力。彈簧及吊桿等質量亦忽略不計。

在說明中採用下列符號（圖252）：

P_3 ——在全部搖動台彈簧上的車體與有效載荷之重量，公斤；

$$P_3 = m_3 g = 4nc_3 \cdot f_3;$$

P_2 ——每一轉向架的簧上部分重量，公斤； $P_2 = m_2 g$ ；

z_3 ——車體對其平衡位置之鉛垂位移，公分；

z_2 ——轉向架簧上部分對其平衡位置之鉛垂位移，公分；

nc_3 ——一組搖動台彈簧的剛度，公斤/公分；

nc_2^0 ——一組軸箱彈簧的換算剛度，公斤/公分；

f_2^0 ——軸箱上疊板彈簧及螺旋彈簧靜撓度和，公分， $f_2^0 = f_1 + f_2$ ；

f_1 ——軸箱上疊板彈簧靜撓度，公分；

f_2 ——軸箱上螺旋彈簧靜撓度，公分；

f_3 ——搖動台彈簧靜撓度，公分。

在鉛垂方向衝擊的作用下，車體重心作鉛重位移 z_3 ，轉向架簧上部分重心作鉛垂位移 z_2 。對於此種位移可假定其向下者為正。

由此可知，搖動台彈簧的額外撓度等於 $z_3 - z_2$ ，而軸箱彈簧則為 z_2 。

由於車體及轉向架簧上部分脫離其平衡位置，從而形成振動運動。欲列出車體及轉向架簧上部分之運動微分方程式，就必須在運動體系內加入慣性力後，列出外力、彈力及慣性力之動力平衡方程式。

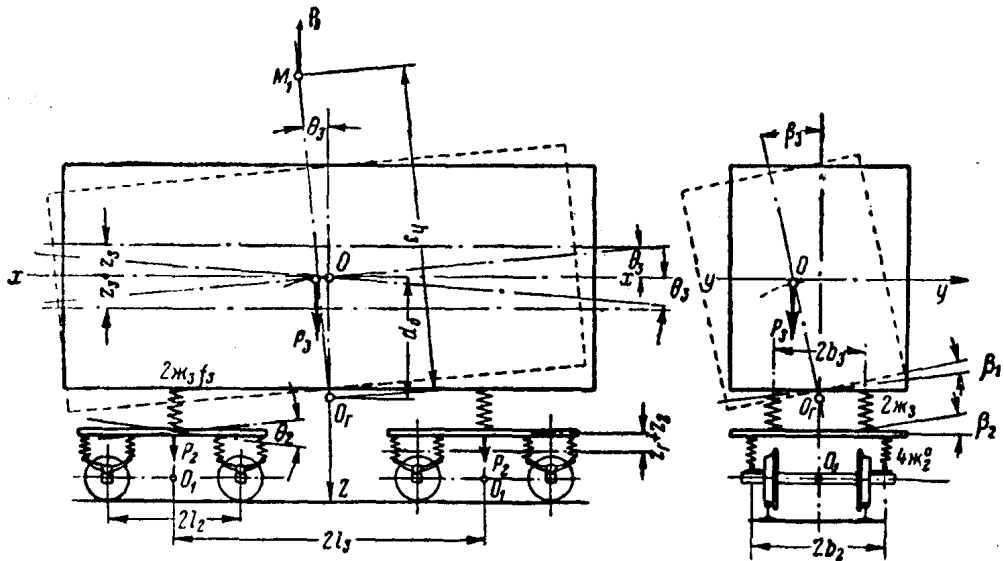


圖252. 車輛自由振動（浮沉及點頭振動）

作用於車體上的力：

慣性力 $-\frac{P_3}{g} z_3''$ ，公斤；

外力 P_3 ，公斤；

搖動台彈簧反力 $-2R_3 = -4\kappa_3(f_3 + z_3 - z_2)$ ，公斤；

車體動力平衡條件，可用下列方程式表示，即

$$-\frac{P_3}{g} z_3'' + P_3 - 4\kappa_3(f_3 + z_3 - z_2) = 0.$$

因 $P_3 = 4\kappa_3 f_3$ ，經過代數演變後，得

$$m_3 z_3'' + 4\kappa_3(z_3 - z_2) = 0.$$

作用於轉向架簧上部分的力：

慣性力 $-\frac{P_2}{g} z_2''$ ，公斤；

外力 P_2 ，公斤；

搖動台彈簧反力 $R_3 = 2\kappa_3(f_3 + z_3 - z_2)$ ，公斤；

軸箱彈簧反力 $-R_2 = -4\kappa_2^0(f_2^0 + z_2)$ ，公斤。

轉向架簧上部分的動力平衡條件，可用下列方程式表示，即

$$-2 \frac{P_2}{g} z_2'' + 2P_2 + 4\kappa_3(f_3 + z_3 - z_2) - 8\kappa_2^0(f_2^0 + z_2) = 0。$$

因 $P_3 + 2P_2 = 8\kappa_2^0 f_2^0$ ，經過代數演變後，得

$$2m_2 z_2'' - 4\kappa_3(z_3 - z_2) + 8\kappa_2^0 z_2 = 0。$$

因此，可用下列聯立微分方程式表示車體與轉向架簧上部分的鉛垂方向振動：

$$\left. \begin{aligned} m_3 z_3'' + 4\kappa_3(z_3 - z_2) &= 0 \\ 2m_2 z_2'' - 4\kappa_3 z_3 + 4(\kappa_3 + 2\kappa_2^0)z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (365)$$

對所得聯立式列出特性方程式：

$$\Delta k^2 \begin{vmatrix} m_3 k^2 - 4\kappa_3 & 4\kappa_3 \\ 4\kappa_3 & 2m_2 k^2 - 4(\kappa_3 + 2\kappa_2^0) \end{vmatrix} = 0。$$

若將該行列式展開，即得

$$k^4 - 4 \left(\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \right) k^2 + 16 \frac{\kappa_2^0 \kappa_3}{m_2 m_3} = 0，$$

由此求得振動的圓周頻率 k_1 及 k_2 ：

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 = & 2 \left[\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \right)^2 - 4 \frac{\kappa_2^0 \kappa_3}{m_2 m_3}} \right]。 \end{aligned} \quad (366)$$

聯立方程式 (365) 的一般解式如下：

$$\left. \begin{aligned} z_3 &= A_2 \cos k_1 t + B_2 \cos k_2 t + C_2 \sin k_1 t + D_2 \sin k_2 t \\ z_2 &= A_1 \cos k_1 t + B_1 \cos k_2 t + C_1 \sin k_1 t + D_1 \sin k_2 t \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

積分常數 (振幅) $A_2, B_2, C_2, D_2, A_1, B_1, C_1$ 及 D_1 可依據開始條件決定。
譬如取 $t=0$ 時，

$$z_3 = \pm z_3^0; \quad z_3' = 0; \quad z_2 = \pm z_2^0 \text{ 及 } z_2' = 0。$$

於是

$$\begin{aligned} z_3^0 &= A_2 + B_2; & C_2 &= D_2 = 0; \\ z_2^0 &= A_1 + B_1; & C_1 &= D_1 = 0。 \end{aligned}$$

因之

$$\left. \begin{aligned} z_3 &= A_2 \cos k_1 t + B_2 \cos k_2 t \\ z_2 &= A_1 \cos k_1 t + B_1 \cos k_2 t \\ z_3'' &= -k_1^2 A_2 \cos k_1 t - k_2^2 B_2 \cos k_2 t \end{aligned} \right\} \quad (368)$$

將所得 z_3 及 z_3'' 的值代入聯立方程式 (365) 之第一式，得：

$$z_2 = \frac{4\kappa_3 - m_3 k_1^2}{4\kappa_3} A_2 \cos k_1 t + \frac{4\kappa_3 - m_3 k_2^2}{4\kappa_3} B_2 \cos k_2 t.$$

聯立方程式 (365) 表示具有頻率為 k_1 及 k_2 之調和振動。這兩種車體及轉向架調和振動運動，稱為主鉛垂振動，而頻率 k_1 及 k_2 ，為該體系的自振頻率。

在每一主振動中， z_3 與 z_2 之振幅比率均為定值，因而車體之振動恒聯系着轉向架，反之亦然。

利用公式 (366) 可以寫出

$$\begin{aligned} \frac{4\kappa_3}{m_3} - k_1^2 &= 2 \left[\frac{\kappa_3}{m_3} - \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \right)^2 - 4 \frac{\kappa_2^0 \kappa_3}{m_2 m_3}} \right] > 0; \\ \frac{4\kappa_3}{m_3} - k_2^2 &= 2 \left[\frac{\kappa_3}{m_3} - \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \right)^2 - 4 \frac{\kappa_2^0 \kappa_3}{m_2 m_3}} \right] < 0. \end{aligned}$$

由此可以看出：在第一種主振動中的位移 z_3 與 z_2 永為同一符號，而在第二種主振動中之 z_3 與 z_2 ，則永為相反的符號。這就是說，在第一種主振動中車體與轉向架簧上部分共同運動於同一方向，而在第二種主振動中，則作相反方向之運動。

全部體系之合成振動運動為此兩種主振動相加之和。此振動的和可用方程式 (367) 或 (368) 表示。

轉向架及車體主振動的週期各等於

$$\begin{aligned} T_{1,2} &= \frac{2\pi}{k_{1,2}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_3}{m_3} + \frac{\kappa_3 + 2\kappa_2^0}{2m_2} \right)^2 - 4 \frac{\kappa_2^0 \kappa_3}{m_2 m_3}}} } = \end{aligned}$$