电路数学

下 册

上海人民出版社

电　路　数　学

（下　册）

上海市卢湾区业余工业专科学校编

上海人民出版社

电 路 数 学

（下 册）

上海市卢湾区业余工业专科学校编

上海人民出版社出版

（上 海 绍 兴 路 5 号）

新华书店上海发行所发行 上海日历印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 92,000

1975 年 12 月第 1 版 1975 年 12 月第 1 次印刷

统一书号：13171·159 定价：0.26 元

内 容 提 要

本书原系上海市卢湾区业余工业专科学校半导体自动控制专业的基础教材，由该校工人讲师、工人学员和专职教师三结合编写而成. 全书分上、下两册. 下册主要包括函数及其图象表示法、微积分、逻辑代数及其在逻辑电路中的应用等内容. 书中注意理论联系实际，着重于运用数学方法来解决电路分析、计算与设计中的实际问题.

本书可供从事电工及电子方面工作的工人同志自学，也可供中学数学教师参考.

目　　录

第五章　函数及其图象表示法

在第三章，我们已经了解了函数的三种表示法，并在讨论三角函数中，根据函数的解析式作出了函数的图象．在电路分析中还会碰到其他一些函数关系，如指数函数、对数函数、幂函数等，下面分别加以讨论．

第一节　指数函数

在第一章，我们已经熟悉了幂的意义和运算．对于幂来说，若底数 a 是某个正的常数（并且 $a\neq 1$），指数是自变量 x，则函数 $y=a^x$ 就是指数函数．

可以看出，不论 x 为任何数值，恒有 $y>0$．并且，当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 具有递增性；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 具有递减性．当 $x=0$ 时，有 $y=1$．

根据上述性质，可以知道指数函数 $y=a^x$ 的图象（图 5-1）．

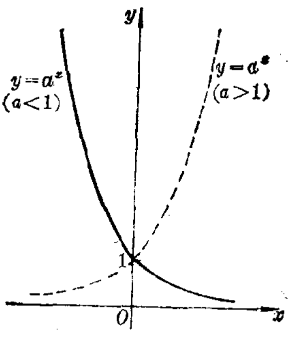

图　5-1

在电路分析中，我们经常遇到的是以 e 为底的一类指数函数($e\approx2.718281\cdots$)，即

$$y=e^x.$$

运用描点法，可以作出指数函数 $y=e^x$ 的图象．下面先算出变量 x 和 y 间的对应值，列表如下：

x	……	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	……
y	……	0.14	0.37	1	1.64	2.71	4.48	7.40	20.07	……

根据上述对应值表，在直角坐标系中逐点描绘，并用光滑曲线连接，就可作出 $y=e^x$ 的图象(图 5-2)．

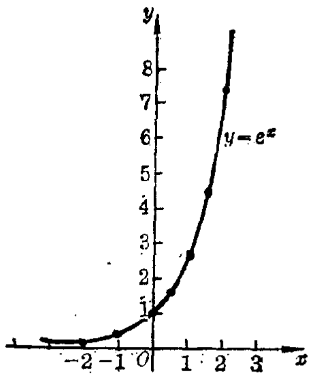

图 5-2

[例 1]　作出函数 $y=e^{-x}$ 当 $x\geqslant0$ 时的图象．

解：由于 $e^{-x}=(e^{-1})^x=\left(\frac{1}{e}\right)^x$，$\frac{1}{e}<1$，所以 $y=e^{-x}$ 是递减函数．结合图 5-1 已可设想它的大致形状．

然后，算出函数 $y=e^{-x}$ 中变量 x 和 y 的对应值，列表如

下：

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	……
y	1	0.63	0.37	0.22	0.14	0.05	……

根据上述对应值表，在直角坐标系中逐点描绘，并用光滑曲线连接，就可作出函数 $y=e^{-x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时的图象(图 5-3)。

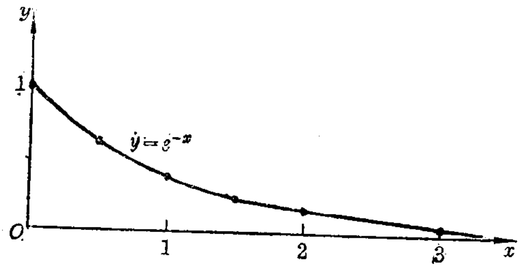

图 5-3

[例 2] 作出函数 $y=1-e^{-x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时的图象.

解：算出 $y=1-e^{-x}$ 中变量 x 和 y 的对应值，列表如下：

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	……
y	0	0.37	0.63	0.78	0.86	0.95	……

按上表描点作图，即得 $y=1-e^{-x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时的图象(图 5-4)。

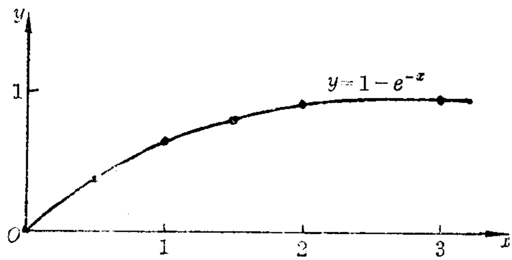

图 5-4

下面，我们将会看到，例1和例2的图象，是与电路中一些元件的特性曲线联系着的．例如：电抗器充、放电过程中，电容器两端电压 u_C 的时间特性；电感器的电流 i_L 的时间特性．又如晶体管穿透电流的温度特性等．

(1) 电容器充电的时间特性

在图5-5所示的电路中，如果 $R=1\text{k}\Omega$，$C=1000\,\mu\text{F}$．

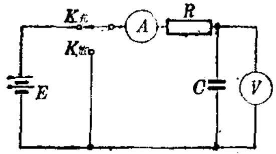

图 5-5

当开关 K 接向充电方向时，直流电源经电阻 R 对电容器 C 充电．充电一开始，充电电流 i_c 最大，随后逐渐减小．而电容两端电压 u_c，充电刚开始时为零，随后逐渐增加．i_C、u_C 与时间 t 的实验数据见下表：

t (秒)	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	……
i_C(mA)	$\frac{E}{R}$	$0.63\,\frac{E}{R}$	$0.37\,\frac{E}{R}$	$0.14\,\frac{E}{R}$	$0.05\,\frac{E}{R}$	……
u_C(V)	0	$0.37\,E$	$0.63\,E$	$0.86\,E$	$0.95\,E$	……

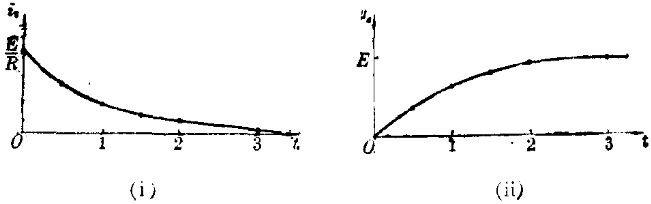

图 5-6

这里，i_C 与 t 关系，及 u_C 与 t 关系，和前面 $y=e^{-x}$ 及 $y=1-e^{-x}$ 中 y 与 x 关系完全相似。其图象也完全相似（见图 5-6）。

由此可见：i_C、u_C 与 t 的关系式，也是类似的指数式，即当 $R=1\,\mathrm{k\Omega}$、$C=1000\,\mu\mathrm{F}$ 时，有

$$i_C=\frac{E}{R}e^{-t},$$

$$u_C=E(1-e^{-t}).$$

然而，当增大电容器 C 的容量时，为了获得相同的电压，就要在电容器 C 的极板上充上更多的电荷量[1]，充电时间就长了。（例如电容容量增加一倍，即 $C=2000\,\mu\mathrm{F}$ 时，要同样达到 $u_C=0.95E$，就需要 6 秒，即 t 也增加一倍。）

同样，当增大电阻 R 的值时，那么充电电流受到阻力增加，要使电容器 C 的极板上充上相同的电荷量，充电时间也要长了。（例如，电阻阻值增加一倍，即 $R=2\,\mathrm{k\Omega}$ 时，要同样达到 $u_C=0.95E$，也约需要 6 秒，即 t 也增加一倍。）

由上分析可见，充电的快慢还与 R 和 C 有关。事实上，是与 R 和 C 的乘积有关。我们把 $R\times C$ 称为电容充电时间常数，记为 $\tau_{充}$。即：

$$\tau_{充}=R\times C,$$

式中，当 R 单位为欧姆、C 单位为法拉时，$\tau_{充}$ 单位为秒。

由此，可以进一步知道，电容器充电时有下述规律[2]：

$$i_C=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau_{充}}},$$

---

[1] 根据电容的定义，电荷量 $Q=C\cdot U_C$，则 $U_C=\dfrac{Q}{C}$。

[2] 这两公式的严格证明，要在学了微积分以后，求解一个简单的微分方程而得出，本书从略。

$$u_C=E(1-e^{-\frac{t}{\tau_{充}}}).$$

即有：当 $t=0$ 时，

$$i_C=\frac{E}{R},\qquad u_C=0;$$

当 $t=\tau_{充}$ 时，

$$i_C=0.37\frac{E}{R},\quad u_C=0.63E;$$

当 $t=2\tau_{充}$ 时，

$$i_C=0.14\frac{E}{R},\quad u_C=0.86E;$$

当 $t=3\tau_{充}$ 时，

$$i_C=0.05\frac{E}{R},\quad u_C=0.95E;$$

……

从理论上讲，充电过程结束时应 $u_C=E$. 这必须经过无限长时间. 在实际应用中，当 $t=3\tau_{充}$ 时，这时 $u_C=0.95E$，即可认为充电过程已结束.

(2) 电容放电的时间特性

在图 5-5 所示电路中，当电容器充电结束后，将开关与 $K_{放}$ 点接通. 这时，电容器 C 通过电阻 R 开始释放能量（电荷），即进行放电. 放电开始时，$u_C=E$. 随放电过程 u_C 逐渐减小，直至 $u_C=0$.（至于放电电流 i_C，除电流方向与充电电流相反外，变化情况和充电时的情况完全一致，故下面不再讨论.）u_C 与时间 t 的实验数据见下表：

t	0	$\frac{1}{2}\tau$	1τ	2τ	3τ	……
u_C	E	$0.63E$	$0.37E$	$0.14E$	$0.05E$	……

这里，u_C 与 t 关系，与前面 $y=e^{-x}$ 中 y 与 x 关系也很相似，其图象也相似(图 5-7)．

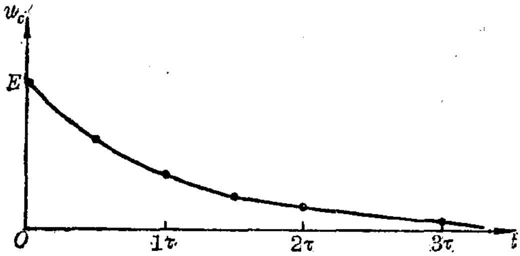

图 5-7

同样，放电的速度与电容 C、电阻 R 的大小有关．R 与 C 越小，放电过程越快；R 与 C 越大，放电过程越慢．我们把 R 与 C 的乘积称为放电时间常数，用字母 $\tau_{放}$ 表示：

$$\tau_{放}=R\times C,$$

式中，当 R 单位为欧姆、C 单位为法拉时，$\tau_{放}$ 单位为秒．

同充电情况一样，可知放电时

$$u_C=Ee^{-\frac{t}{\tau_{放}}}.$$

从理论上讲，放电过程结束时应 $u_C=0$．这必须经过无限长时间．在实际应用中，当 $t=3\tau_{放}$ 时，这时 $u_C=0.05E$，我们就认为放电过程结束．

实际上，充、放电过程是连在一起进行的．电容器充了电后，接着就放电．也就是说，在图 5-5 所示电路中，开关是由其他元件(如晶体管)代替，而且将充电回路与放电回路分开(若两回路中电阻阻值不同，则充放电时间常数 $\tau_{充}$ 和 $\tau_{放}$ 不同)．这时，从电容两端测出 u_C-t 曲线见图 5-8 所示．

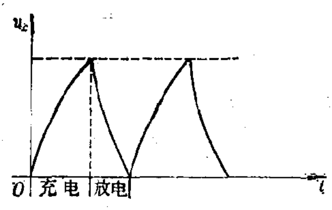

图 5-8

由图5-8可知：利用电容充放电，可以得到锯齿形脉冲波，而且是一定频率(即一定时间产生一个)的脉冲波．利用这一点，可以利用电容充放电来作各种延迟电路的时间继电器和组成脉冲源．如在图5-9一类电路中，当$R_{放}$为继电器时，可做成各种延时电路或时间继电器；当$R_{放}$为脉冲变压器时，可作为锯齿形脉冲电压输出．

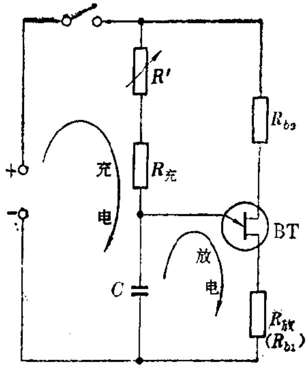

图 5-9

第二节 对数函数

在第三章，我们已经知道，三角函数的反函数是反三角函数．

指数函数$y=a^x$的反函数是什么？

在$y=a^x$中，如果y作为自变量，而x作为因变量，这时x成了y的函数．我们把这种函数关系称为对数函数，记成

$$x=\log_a y. \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

由于习惯上总是以x作为自变量，y作为因变量的．所以对数函数一般记成

$$y=\log_a x. \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

这就是指数函数$y=a^x$的反函数．

从指数函数$y=a^x$的性质，可以推知对数函数$y=\log_a x$有下述性质：

(1) 自变量x的变化范围是$x>0$，即：零和负数没有对数；

(2) 当$x=1$时，$y=0$，即对数曲线$y=\log_a x$必通过点$(1, 0)$；

(3) 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；当 $a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数.

根据上述性质，可以知道对数函数 $y=\log_a x$ 的图象（图 5-10）.

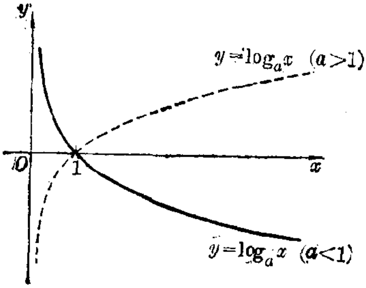

图 5-10

根据指数运算规律，可以推知对数运算的规律：

(1) $\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N$,

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$,

(3) $\log_a M^n=n\cdot\log_a M$,

(4) $\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\cdot\log_a M$.

这就告诉我们，利用对数，可以把乘、除运算转化为加、减运算，把乘方、开方运算转化为乘、除运算，这就可以大大简化了运算过程. 在电路分析中，放大器的增益计算采用对数形式也正利用了这一点.

在 $y=\log_a x$ 中，当 $a=10$ 时，称为常用对数，并把 $\log_{10}x$ 简记成 $\lg x$. 人们编造了“常用对数表”，这就提供了一种求对数的可行方法.

借助于“常用对数表”，可以查到函数 $y=\lg x$ 中变量 x 与 y 的对应值，列表如下：

x	……	0.01	0.1	1	2	3	4	5	……
y	……	-2	-1	0	0.30	0.48	0.60	0.70	

从而作出函数 $y=\lg x$ 的图象(图 5-11).

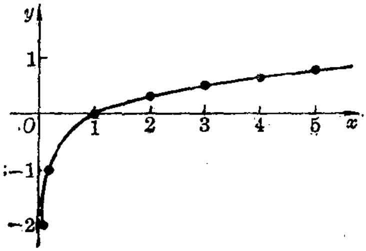

图 5-11

对数曲线 $y=\lg x$ 和一个现象是联系着的:人的耳朵对声音响度的接受,不是和声音的强度成比例的,而是和声音强度的对数成比例的. 也就是说,在图 5-11 中,通过恰当选择两坐标轴上的单位长度,对数曲线 $y=\lg x$ 的 $y\geqslant 0$ 部分可以表示放大器输出功率和人们音响感之间的函数关系.

正由于对数在简化运算上的意义和上述关于音响的联系,我们在分析放大电路中,把功率放大倍数通过取常用对数来表示,称为功率增益:

$$P_{\text{增益}}=\lg K_P=\lg\frac{P_{\text{出}}}{P_{\text{入}}}.$$

它的单位为贝尔. 在一般情况下,我们常用十分之一的贝尔(即分贝)来表示功率增益的大小. 因为

$$1\ \text{贝尔}=10\ \text{分贝}(\text{db}),$$

因此,用分贝表示的功率增益就是:

$$P_{\text{增益}}=10\lg K_P.$$

它的单位为“分贝”.

由于电路中常是测电压或电流，因此对放大器的增益也常以电压增益或电流增益来表示. 因为

$$P=\frac{U^2}{R}=I^2R,$$

因此

$$10\lg\frac{P_{出}}{P_{入}}=10\lg\frac{\dfrac{U_{出}^2}{R_{出}}}{\dfrac{U_{入}^2}{R_{入}}},$$

当 $R_{出}=R_{入}$ 时，即

$$\begin{aligned}10\lg\frac{P_{出}}{P_{入}}&=10\lg\frac{U_{出}^2}{U_{入}^2}\\&=10\lg\left(\frac{U_{出}}{U_{入}}\right)^2\\&=20\lg\frac{U_{出}}{U_{入}}\\&=20\lg K_u.\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}10\lg\frac{P_{出}}{P_{入}}&=20\lg\frac{I_{出}}{I_{入}}\\&=20\lg K_i.\end{aligned}$$

这就是说，当电路中输入、输出电阻相同时，可以通过求电压或电流的比值 K_u、K_i，取对数并乘以 20，来求得电路增益的分贝数. 我们定义电压增益为

$$U_{增益}=20\lg K_u,$$

电流增益为:

$$I_{增益}=20\lg K_i.$$

由于 K_P、K_u、K_i 分别是输出及输入功率、电压、电流之间的比值，输入的功率、电压、电流都不确定，不能作为一个既

定的标准，因此求得的 $P_{增益}$、$U_{增益}$、$I_{增益}$ 都是相对的增益(称相对的电平)．至于"绝对"的增益(绝对的电平)，是在规定 $P_{入}$、$U_{入}$、$I_{入}$ 后，所测得的功率、电压、电流增益．通常，以在 600 欧姆电阻上得到 1 毫瓦功率，或 0.7775 伏电压，或 1.29 毫安电流作为标准值．

[例 1]　某放大器的输入电压为 10 mV，输出电压为 1V，并且 $R_{出}=R_{入}$，求放大器的电压增益．

解：
$$U_{增益}=20\lg\frac{U_{出}}{U_{入}}=20\lg\frac{1}{0.01}=20\lg 100=40\text{ 分贝}.$$

[例 2]　某放大器的绝对功率增益为 23 分贝，求输出功率为多少？

解：
$$P_{增益}=10\lg\frac{P_{出}}{1}=23\,\text{db},$$

则
$$\lg P_{出}=2.3.$$

查"反对数表"，可知
$$P_{出}=1995\text{ 毫瓦}\approx 2\text{ 瓦}.$$

[例 3]　某放大器的输入电阻为 2kΩ，输出电阻为 10Ω；输入电压为 100 mV，输出电压为 10 V，求此放大器的功率增益．

解：
$$P_{入}=\frac{U_{出}^2}{R_{入}}=\frac{0.1^2}{2000}=0.000005\text{ 瓦}.$$

$$P_{出}=\frac{U_{出}^2}{R_{入}}=\frac{10^2}{10}=10\text{ 瓦},$$