知识要点 · 典型范例 · 难题巧解 · 综合能力检测

数学黑马 · SHUXUEHEIMA · 数学黑马 · SHUXUEHEIMA

華夏

数学黑马

主　　编：中国科学教育论坛副总编辑　张谦亨

执行主编：孔庆河　孔　勇　张秋菊　刘海涛

初三几何

huaxiashuxueheima

華夏出版社

前言

本套丛书是根据最新教学大纲,最新出版的教材及考试说明,根据素质教育的需要,并结合初中生的实际,由多名经验丰富的教师编写而成。

本套丛书力求减轻学生的课业负担,注重能力培养,注重与现实生活的联系,为学生形成健全的人格掌握知识,提高能力创造条件。

本套丛书有以下特点:

1. 依据教学大纲,但不拘泥于课本,根据教学的需要而又有利于知识的连续性、整体性,对某些节次进行了合并。

2. 例题典型,具有示范作用,每道例题都有详细的解答,更侧重于思路与方法。

3. 每一节、每一章备有测试题,以便读者及时检查与矫正。

本套丛书每一部分又设置了以下几个栏目:

知识要点 扼要介绍本节的主要内容,基本技能以及学习应注意的问题。

典型范例 精心组织习题,并且力求每道例题都具有代表性,前有分析,后面有说明,帮助读者掌握重点,突破难点,把握思路,熟悉考点。

难题巧解 关键在"巧"字上,使学生在注重通性通法的同时,还要多思、反思,找到更简捷的解法,开阔了解题视野,提高了能力。

综合能力检测 这一部分又分为基本训练题和发散思维训练题,这样设置为不同层次的学生的发展提供了发展的空间,也为教师提供了备课材料。

在本套丛书的编写过程中,得到了广大初中教师和一些读者的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。但由于时间有限,缺点错误在所难免,恳请广大读者和同仁提出宝贵意见。

编　者

2003.6 于北师大

目 录

第六章 解直角三角形

1 锐角三角函数

§6.1 正弦和余弦

知识要点

1. 正弦、余弦的概念

如图 6－1－1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

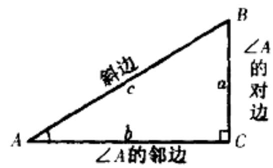


图 6－1－1

正弦、余弦的概念是本章的起点，同时又是重点、难点和关键.

2. 30°、45°、60°角的正弦、余弦值

(1) $\sin30°=\frac{1}{2}$，$\text{in}45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos60°=\frac{1}{2}$.

3. 互余两角的正弦、余弦之间的关系

(1) $\sin A=\cos(90°-A)$；(2) $\cos A=\sin(90°-A)$.（$\angle A$ 为锐角）

这就是说，任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值.

4. 查正弦、余弦表

(1) 变化规律：当角度在 0°～90°间变化时，正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.

(2) 取值：当角 α 满足 $0°\leqslant\alpha\leqslant90°$ 时，$0\leqslant\sin\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\cos\alpha\leqslant1$.

(3) 0°、90°角的正弦、余弦值：$\sin0°=0$，$\sin90°=1$，$\cos0°=1$，$\cos90°=0$.

5. 同角的正弦、余弦之间的关系

$\sin^2A+\cos^2A=1.$

典型范例

例1　若 α 是锐角，且 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，求 $\cos\alpha$ 的值.

分析：本题已知$\angle\alpha$ 的正弦，要求余弦，可以设三角形的两条边，求出第三条边，然后根据定义求得 $\cos\alpha$，也可以直接利用同角的正弦和余弦关系求解.

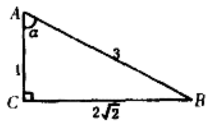


图6-1-2

解：如图6-1-2，设$\angle A=\alpha$，$\angle C=90°$，不妨设 $BC=2\sqrt{2}$，$AB=3$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1.$

$\therefore \cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{3}.$

说明：1. 因 α 是锐角，可构造一个直角三角形，使 α 是其中的一个锐角，从而转化为锐角三角函数定义解决问题. 2. 已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，运用特例的思想，可设 $BC=2\sqrt{2}$，$AB=3$，从而转化为在直角三角形内的问题，这种解法在解选择题、填空题时应用更为广泛.

例2　在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，则$\frac{\cos A\cdot\cos B}{\sin B}$的值是（　）

A. $\frac{a}{c}$　　B. $\frac{c}{a}$　　C. $\frac{a}{b}$　　D. $\frac{b}{a}$

分析一：四个选项均为边的比，因此想到将 $\sin B$、$\cos A$、$\cos B$ 转化为边，根据锐角三角函数的定义，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\cos B=\frac{a}{c}$，化简得$\frac{a}{c}$，所以选 A.

分析二：利用互余两角三角函数间的关系，得 $\cos A=\sin B$，即$\frac{\cos A\cdot\cos B}{\sin B}=\cos B=\frac{a}{c}$.

解：选 A.

说明：1. 在解题中，常常利用锐角三角函数的定义，将锐角三角函数转化为边，或将边转化成锐角三角函数；2. 计算三角函数式的值、化简三角函数、或证明三角函数恒等式，常常利用互为余角的三角函数间的关系，将不同角的三角函数变为同角的三角函数.

例3　计算：(1) $\sin53°\cos37°+\cos53°\sin37°$；

(2) $\sqrt{\sin^2 36°-4\sin30°\cos54°+1}+\cos54°$.

分析:本题中出现的锐角 53°、37°、36°、54°均为非特殊角,又不能用计算器,因此要考虑利用正弦、余弦的关系将它们消去.

解:(1)$\because \sin53° = \sin(90° - 37°) = \cos37°$,

$\cos53° = \cos(90° - 37°) = \sin37°$,

$\therefore$ 原式 $= \cos^2 37° + \sin^2 37 = 1$.

(2)$\because \cos54° = \cos(90° - 36°) = \sin36°$

$\therefore$ 原式 $= \sqrt{\sin^2 36° - 2\sin36° + 1} + \sin36°$

$= |\sin36° - 1| + \sin36°$

$= 1$.

说明:在这类出现非特殊角的计算题中,关键是善于应用互余两角的正、余弦关系以及同角的正余弦关系将正弦或余弦进行转化,从而达到化简的目的.

例 4　(2001 年荆门市)如果 $\angle A$ 为锐角,且 $\cos A = \dfrac{1}{4}$,那么　(　)

A. $0° < \angle A \leqslant 30°$　　B. $30° \leqslant \angle A \leqslant 45°$　　C. $45° < \angle A \leqslant 60°$　　D. $60° < \angle A < 90°$

解:$\because \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} > 0$,即 $\cos60° > \cos A > \cos90°$,$\therefore 60° < \angle A < 90°$

故应选 D.

说明:根据特殊角的锐角三角函数值,不难验证,当 $0° < \alpha < \beta < 90°$时,下列关系式都成立:$\sin\alpha < \sin\beta$,$\cos\alpha > \cos\beta$,从而就不难比较两个同名的锐角三角函数之间的大小关系.

例 5　如图 6-1-3 所示,已知$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,D 是 BC 的中点,$AD = BC$,求$\angle BAD$ 的正弦值.

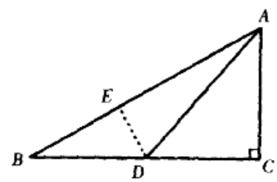


图 6-1-3

分析:求$\angle BAD$ 的正弦值,要用到三角函数的定义,但必须在直角三角形中,而图中$\angle BAD$ 并未在直角三角形中,因此过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E,这样$\angle DAB$ 落在 $Rt\triangle DEA$ 中,而 $\sin\angle DAB = \dfrac{DE}{AD}$.

解:过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E,设 $BD = k$,$BC = 2k$,

$\because AD = BC$,$\therefore AD = 2k$.

在 $Rt\triangle ACD$ 中,由勾股定理得:$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{3}k$,同理 $AB = \sqrt{7}k$.

$\because \angle B$ 为公共角,$\angle BED = \angle C = 90°$,$\therefore Rt\triangle BDE \backsim Rt\triangle BAC$,

$\therefore \dfrac{BD}{DE} = \dfrac{AB}{AC}$,$\therefore DE = \dfrac{\sqrt{21}}{7}k$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AED$ 中,$\sin\angle BAD = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{\frac{\sqrt{21}}{7}k}{2k} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

说明:求锐角三角函数值经常出现于中考题的综合题中,通常是利用其定义去求,但一定要在直角三角形中;若此角不在直角三角形中,其一可以找一个与之相等的角且此角在直角三角形中,其二可以直接构造包含此角的直角三角形.

难题巧解

例 6　设 $0°<\alpha<45°$,$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{16}$,则 $\sin\alpha=$__________.

(1999 全国初中数学联赛武汉选拔赛试题)

解:$\because$ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{3\sqrt{7}}{8}$,又 $0°<\alpha<45°$,

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{1}{4}\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\frac{1}{4}\sqrt{3^2+2\times3\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}=\frac{1}{4}(3+\sqrt{7})$,　①

同样地,$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

$\because$ $0°<\alpha<45°$,　$\therefore \sin\alpha<\cos\alpha$.

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{3\sqrt{7}}{8}}=-\frac{1}{4}(3-\sqrt{7})$.　②

由①、②式得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

说明:解题过程中,充分利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及条件 $0°<\alpha<45°$,$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{16}$,从而求出 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值,再求出 $\sin\alpha$ 的值,本题当求出 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{4}(3+\sqrt{7})$后,可根据 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{16}$得出 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 分别是一元二次方程 $x^2-\frac{1}{4}(3+\sqrt{7})x+\frac{3\sqrt{7}}{16}=0$ 的两根,从而求得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

综合能力检测

基本训练题

一、选择题

1. $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\cos B=\frac{4}{5}$,则 $AC:BC:AB=$　(　)

A. 3:4:5　　B. 4:3:5　　C. 3:5:4　　D. 5:3:4

2. (2001 年绍兴市) $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $BC=4$，$\sin A=\dfrac{2}{3}$，则 AC 的长是　　(　　)

A. 6　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{13}$

3. 化简 $|\cos72°-\sin19°|$ 等于　　(　　)

A. $\cos72°-\sin19°$　B. $\sin19°-\cos72°$　C. $\pm(\cos72°-\sin19°)$　D. $\cos72°+\sin19°$

4. (2001 年荆门市) 如果 $\angle A$ 为锐角，且 $\cos A=\dfrac{1}{4}$，那么　　(　　)

A. $0°<\angle A\leqslant30°$　　B. $30°<\angle A\leqslant45°$

C. $45°<\angle A\leqslant60°$　　D. $60°<\angle A<90°$

5. (2000 年天津市) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，如果各边长度都扩大 2 倍，则锐角 A 的正弦值和余弦值　　(　　)

A. 都没有变化　B. 都扩大 2 倍　C. 都缩小 2 倍　D. 不能确定

6. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$，且 $0°<\alpha<45°$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值为　　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

二、填空题

7. 化简 $\sqrt{\sin^2 60°-2\sin60°+1}+\sin60°=$__________.

8. 若 α 为锐角，$\cos(90°-\alpha)+\sin^2\alpha=1$，则 $\sin^2(90°-\alpha)+\cos^4\alpha$ 的值为__________.

9. 已知 $\cos30°12'=0.8643$，对应 $1'$ 的修正值是 0.0001，若 $\sin A=0.8642$，则锐角 $A=$__________.

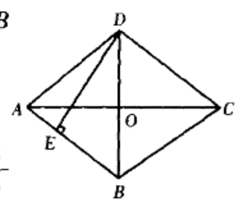
10. 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，且 $0°<\alpha<45°$. 则 $\sin\alpha-\cos\alpha=$__________.

三、解答题

11. 化简 $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 45°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 89°$.

12. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$b=8$，$\angle A$ 的平分线 $AD=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$，求 $\angle B$ 及 a，c 的值.

13. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，$DE\perp AB$ 于 E，$AB=10$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$. 求 DE 的长.



13 题图

发散思维训练题

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，那么$\sin A+\cos A$的值 ( )

A. 大于1　　B. 等于1　　C. 小于1　　D. 大于2

15. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=45°$，$\cos A$，$\cos B$为方程$4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m=0$的两根，且$AC=\sqrt{2}$，求：(1)$\angle B$的度数；(2)AB的长；(3)二次函数$y=4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m$的最小值.

参考答案

基本训练题

1. A　2. B　3. B　4. D　5. A　6. A　7. 1　8. 1　9. 59°47′　10. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 提示：$\sin^2 1°+\sin^2 89°=\sin^2 1°+\cos^2 1°=1$，原式$=44\times 1+\frac{1}{2}=44\frac{1}{2}$.

12. 解：在$Rt\triangle ACD$中，$AC=8$，$AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，$\angle C=90°$，

$\therefore \cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle DAC=30°$.

又$\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAC=60°$，$\angle B=30°$.

$c=AB=2AC=16$.

$\therefore a=c\cdot\sin A=16\cdot\sin 60°=8\sqrt{3}$.

13. 解：在$Rt\triangle AOB$中，$\because \cos\angle BAC=\frac{OA}{AB}$，

$\therefore OA=AB\cdot\cos\angle BAC=10\times\frac{3}{5}=6$.

$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

在$Rt\triangle BED$中，$BD=2OB=2\times 8=16$.

$\sin\angle DBE=\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$.

$\therefore DE=BD\cdot\sin\angle DBE=16\times\frac{3}{5}=\frac{48}{5}$.

发散思维训练题

14. A

15. 解：(1) $\because \angle A=45°$,

$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由根与系数的关系知 $\cos B+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2}{4}(1+\sqrt{2})$, $\cos B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle B=60°$.

(2)作 $CD\perp AB$ 于 D，在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\angle A=45°$,

$\therefore AD=AC\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$.

$\therefore CD=1$.

在 $Rt\triangle BDC$ 中，$BC=\dfrac{CD}{\sin B}=\dfrac{1}{\sin 60°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore AB=AD+DB=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

(3)由根与系数的关系得：$\dfrac{m}{4}=\cos A\cdot\cos B=\cos 45°\cdot\cos 60°=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore m=\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore y&=4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m\\&=4x^2-2(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}\\&=4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{2\sqrt{2}-3}{4}.\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ 时，$y_{最小值}=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4}$.

§6.2 正切和余切

知识要点

1 正切、余切的概念

如图 6－2－1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$，我们把 $\angle A$ 的对边与邻边的比

叫做∠A的正切，记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

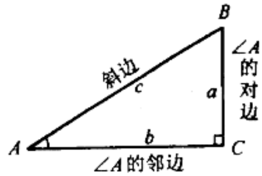


图 6－2－1

我们把∠A的邻边与对边的比叫做∠A的余切，记作 $\cot A$，即：

$$\cot A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\frac{b}{a}.$$

正切、余切的概念，也是本章的重点和关键.

2. 三角函数的概念

锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切都叫做∠A的锐角三角函数.

3. 30°、45°、60°角的正切、余切值

(1) $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan 45°=1$，$\tan 60°=\sqrt{3}$；(2) $\cot 30°=\sqrt{3}$，$\cot 45°=1$，$\cot 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 互余两角的正切、余切之间的关系

(1) $\tan A=\cot(90°-A)$，(2) $\cot A=\tan(90°-A)$.（∠A为锐角）

这就是说，任意锐角的正切值等于它的余角的余切值，任意锐角的余切值等于它的余角的正切值.

5. 查正切、余切表

(1) 变化规律：当角度在 0～90°间变化时，正切值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；余切值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.

(2) 0°、90°角的正切、余切值：$\tan 0°=0$，$\tan 90°$不存在，$\cot 0°$不存在，$\cot 90°=0$.

6. 同角的正切、余切之间的关系

$\tan A\cdot\cot A=1$.

典型范例

例 1　如图 6－2－2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\tan A$、$\cot A$、$\cot B$ 的值.

分析：此题只需先求出 $\tan A$，然后由 $\cot A=\frac{1}{\tan A}$，$\cot B=\tan A$，求得 $\tan A$ 和 $\cot B$，求 $\tan A$ 有两种方法：一种是先设辅助元，再利用勾股定理和三角函数定义来解；另一种方法是利用同角的三角函数间的关系式来解决.

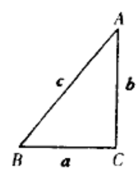


图 6－2－2

解法一：在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$\because \angle C=90°$，$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 设 $a=\sqrt{3}k$，$c=3k.$（$k>0$）

根据勾股定理 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{6}k.$

$\therefore\ \tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}k}{\sqrt{6}k}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}=\sqrt{2}.$

又$\because\ A+B=90°$，$\therefore\ \cot B=\tan A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

解法二：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\because\ \angle C=90°$

$\therefore\ \angle A$ 是锐角，

$\therefore\ \cos A>0.$

$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

$$\therefore\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cot A=\sqrt{2}$，$\cot B=\tan A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

说明：1. 计算结果中，如果分母含有根式，需进行分母有理化；2. 同角三角函数关系和余角三角函数关系要准确掌握和灵活运用.

例 2　在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，且已知 b 和 $\angle A$ 的值，那么 a 的值等于　（　）

A. $b\cdot\sin A$　　B. $b\cdot\cos A$　　C. $b\cdot\tan A$　　D. $b\cdot\cot A$

分析：在三角函数关系中的三个量之间，已知两边，可求三角函数值，同样已知一边和角，就可求另一边的值.

解：由三角函数的定义，得 $\tan A=\dfrac{a}{b}$，$\therefore\ a=b\cdot\tan A.$ 故应选 C.

说明：由于 b 和 A 的值是已知的，所以求 a 的值，必须用 b 和 A 的三角函数来表示. 本题主要考查两点，其一是正确地理解用已知元素表示未知元素；其二是能熟练地用直角三角形的两边比表示一锐角的三角函数.

例 3　计算：$\tan^2 60°+\tan(43°+\alpha)-\cot(47°-\alpha)-\tan 44°\cdot\tan 45°\cdot\tan 46°.$

分析：要求上式的值，必须知道各项的值，或者是能把未知项消去，显然，本式中 $\tan 60°$、$\tan 45°$的值都已知，但 $\tan(43°+\alpha)$、$\cot(47°-\alpha)$、$\tan 44°$、$\tan 46°$的值都不知道，通过分析可知，$\tan(43°+\alpha)$与 $\cot(47°-\alpha)$的值相等，$\tan 44°$与 $\tan 46°$的积等于 1，所以上式的值可求.

解：原式 $=(\sqrt{3})^2+\tan(43°+\alpha)-\tan[90°-(47°-\alpha)]-\tan 44°\cdot 1\cdot\cot(90°-46°)=3+$

$0-1=2.$

说明:在遇到非特殊角的三角函数式求值时,要注意灵活运用互为余角三角函数的关系及同角三角函数关系.

例4　不查表,比较下列两个三角函数值的大小.

(1) $\sin50°$ 和 $\cos 50°$;　　(2) $\sin 65°$ 和 $\tan65°$;　　(3) $\cos20°$ 和 $\tan20°$.

分析:(1)题是弦函数的比较,运用余角三角函数关系化为同名函数(一般化为正弦函数),再根据函数的增减性来作出判断.(2)题是弦函数与切函数的比较,弦函数的值小于或等于1,而有时切函数的值却往往大于1,依据这点可作出判断.(3)题可与较接近的一个特殊角的三角函数值进行比较而作出判断.

解:(1) $\because\ \cos50°=\sin40°,\sin50°>\sin40°,$　　(∗1)

$\therefore\ \sin50°>\cos50°.$

(2) $\because\ \sin 65°<1,\ \tan65°>1,$　　(∗2)

$\therefore\ \sin 65°<\tan65°.$

(3) $\because\ \cos 20°>\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\tan20°<\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3},$　　(∗3)

$\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3},$

$\therefore\ \cos20°>\tan20°.$

说明:(∗1)不查表比较两个三角函数值的大小问题,往往用余角三角函数关系将其转化为同名三角函数,再结合三角函数的增减性进行比较判断.(∗2)、(∗3)有时也借助于弦函数值小于或等于1的特殊性和特殊角的三角函数值来进行判断.

例5　(1999年宿迁市)选择题

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$ 均为锐角,且有 $|\tan B-\sqrt{3}|+(2\sin A-\sqrt{3})^2=0$,则 $\triangle ABC$ 是　　(　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

解:$\because\ |\tan B-\sqrt{3}|+(2\sin A-\sqrt{3})^2=0,\therefore\ |\tan B-\sqrt{3}|=0,\ (2\sin A-\sqrt{3})^2=0,$

$\therefore\ \tan B=\sqrt{3},\ \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\ \angle B=60°,\ \angle A=60°.$

$\therefore\ \triangle ABC$ 为等边三角形,故应选C.

说明:本题是以非负数和为框架的一道综合题,主要考查三个方面的问题,其一是非负数的性质;其二是特殊角的三角函数值;再则就是三角形形状的判定方法.

例6　已知 $\tan\alpha=\frac{5}{3}$,求 $\frac{4\cos\alpha-3\sin\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$ 的值.