

中等师范数学进修教材

代数与初等函数

上 册

2009.9.11

北京出版社

普通高中课程标准实验教科书

代数与初等函数

ALGEBRA AND ELEMENTARY FUNCTIONS

● ● ● ● ●

中等师范数学进修教材

代数与初等函数

上册

北京教育学院师范教研室编

*

北京出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷三厂印刷

*

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

书号: K 7071·792 定价: 0.75元

说 明

为了满足当前小学教师数学进修的迫切需要，我们编写了这套教材，作为师范学校招收民办教师的数学用书，也可供希望通过进修达到目前中师数学水平的教师使用，或作为小学教师教学参考书。在选择教材内容时，我们参照了全国中师数学教学大纲(草案)及部分省、市制订的小学教师进修计划。全套数学教材包括《代数与初等函数》上、下册及《初等几何》等三个分册。在使用时，各地可根据本省、市进修计划的授课时数，将教材内容作适当删减。

本书是《代数与初等函数》上册，在编写过程中，考虑到小学教师当前的实际情况，我们把有些知识内容进行了相对集中，有些知识内容作了适当简化。全书系统地讲述了集合与对应、有理数集、实数集、解析式、方程和方程组(包括行列式、不定方程)及不等式等基础知识。在编写时，我们比较注意使教材符合小学数学教学的实际需要，也注意了便于同志们自学。

参加这套教材编写工作的有北京教育学院师范教研室许华棋、张君达，湖南省师范教材编写组周华辅、夏炎炎、上海师范学校教材组王明欢、陈丽荫等同志。

由于我们的水平有限，编写时间又比较匆促，书中一定会有很多缺点和错误，请同志们在使用过程中提出宝贵意见。

北京教育学院师范教研室

一九八一年九月

目 录

第一章 集合与对应	1
第一节 集合的概念	1
1.1 集合的概念	1
1.2 集合的表示法	4
第二节 集合的包含与相等	9
1.3 包含关系	9
1.4 相等关系	10
第三节 集合的运算	13
1.5 并运算	13
1.6 交运算	17
1.7 差运算	23
1.8 补运算	25
1.9 并、交、补运算的关系	27
第四节 对应	32
1.10 单值对应.....	32
1.11 一一对应.....	34
1.12 逆对应.....	36
第二章 实数集	42
第一节 有理数集	42
2.1 具有相反意义的量	42
2.2 正数与负数	43

2.3	有理数	45
2.4	数轴	48
2.5	相反数	50
2.6	绝对值	51
2.7	有理数大小的比较	52
第二节	有理数的运算	58
2.8	有理数的加法	58
2.9	有理数的减法	61
2.10	有理数的乘法	64
2.11	有理数的除法	67
2.12	有理数的乘方	69
2.13	有理数的开方	74
2.14	有理数集的性质	88
第三节	实数集	94
2.15	无理数的引入	94
2.16	无理数	95
2.17	无理数的近似值	97
2.18	实数集与数轴	98
2.19	实数大小的比较	99
第四节	实数的运算	103
2.20	正实数的加法	103
2.21	正实数的乘法	103
2.22	正实数的减法	104
2.23	正实数的除法	104
2.24	实数的近似计算	106
2.25	实数集的性质	106

第三章 解析式	122
第一节 一般概念	122
3.1 用字母表示数	122
3.2 解析式	123
3.3 代数式的分类	125
3.4 解析式的恒等	127
第二节 整式	129
3.5 多项式的概念	129
3.6 多项式的加法、减法和乘法	132
3.7 乘法公式	136
3.8 多项式的除法	138
3.9 多项式的因式分解	141
第三节 分式	153
3.10 有理分式.....	153
3.11 有理分式的性质.....	157
3.12 分式的恒等变形.....	162
3.13 繁分式及其化简.....	165
第四节 根式	169
3.14 根式及其性质.....	169
3.15 含有根式的代数式的恒等变形.....	172
3.16 共轭因式与 $A \pm \sqrt{B}$ 的算术平方根.....	176
3.17 根式与分数指数幂.....	181
第五节 指数式与对数式	185
3.18 幂的概念的推广.....	185
3.19 指数式的恒等变形.....	187
3.20 对数式的恒等变形.....	188

第四章 方程和方程组	195
第一节 方程和方程组的概念	195
4.1 等式与方程	195
4.2 方程的解	197
4.3 方程的分类	198
4.4 方程组	200
4.5 方程(组)的同解性	201
第二节 一元代数方程	207
4.6 整式方程	207
4.7 分式方程	214
4.8 无理方程	217
4.9 换元法	219
第三节 线性方程组	226
4.10 二元线性方程组和二阶行列式.....	227
4.11 三阶行列式.....	232
4.12 三阶行列式的性质.....	234
4.13 按一行(列)展开三阶行列式.....	239
4.14 三元线性方程组.....	245
第四节 指数方程与对数方程	252
4.15 指数方程.....	252
4.16 对数方程.....	257
4.17 含有指数方程和对数方程的方程组.....	260
第五节 一次不定方程和方程组	264
4.18 二元一次不定方程.....	264
4.19 一次不定方程组.....	268
第六节 布列方程	271

4.20	用方程解答算术应用题的特点·····	271
4.21	用方程解应用题的步骤·····	273
4.22	合理选择未知数·····	276
4.23	综合法与分析法·····	279
第五章	不等式 ·····	286
第一节	不等式的基本性质·····	286
5.1	不等式·····	286
5.2	不等式的基本性质·····	288
第二节	不等式的解法·····	293
5.3	绝对值不等式·····	294
5.4	分式不等式·····	296
5.5	简单的高次不等式·····	298
第三节	不等式的证明·····	302
5.6	证明不等式的某些方法·····	302
5.7	算术平均值与几何平均值·····	306
5.8	不等式的一些应用·····	309

第一章 集合与对应

在生活和生产实践中，我们在分析和研究问题时，常常需要把事物进行分类，从事物的全体和事物之间的相互关系上去把握事物，集合的理论（有时称为类的一般理论）就是由于这一要求而产生的。在现代数学的各个分支中，除了极少数的罕见的例外，它们研究和分析的对象都可以看成某种特定的对象的集合或类。所以，集合的概念在近代数学里是一个基本的概念，集合论是数学的基本学科。现在的中小学教材中，也增加或渗透了一些集合论的内容和思想，这样可以扩大学生的知识面，加深学生对传统数学知识的理解，有利于学生今后进一步学习。在这一章里，我们将要学习集合论的一些初步的知识。

第一节 集合的概念

1.1. 集合的概念

在日常生活中，我们对“集合”一词并不陌生，例如，我们说：同学们在参加课间操时，按班级排成队伍集合在一起。这里所讲的集合，与我们上述所讲的集合并不是一回事。那么，在数学里“集合”这一概念的涵义是什么呢？我们先来看几个例子：

- (1) 育新学校里的全体学生，可以看作一个集合；
- (2) 从1到10的偶数的全体，可以看作是一个集合。

- (3) 所有的自然数，可以看作一个集合；
(4) 直线上所有的点，可以看作一个集合；
(5) 所有等腰三角形，可以看作一个集合。等等。

以上都可以作为集合的例子，它们是由一些学生、一些数、一些点和一些图形组成的整体。所以，对于集合的概念，我们用以下的语言来描述*：

集合是指具有某种属性的一些确定的对象的全体。集合也简称为“集”。

集合里的每一个对象，都叫做集合的元素（或简称为元）。

集合一般用大写字母 A, B, C, \dots 来表示。集合的元素一般用小写字母 a, b, c, \dots 来表示。

对于给定的集合 A 和确定的元素 a ，如果 a 是集合 A 的元素，就说“元素 a 属于集合 A ”，用符号记作：

$$a \in A$$

读做： a 属于 A 。

如果 a 不是集合 A 的元素，就说“元素 a 不属于集合 A ”，用符号记作：

$$a \notin A \text{ (或 } a \notin A \text{),}$$

读做： a 不属于 A 。

例如，我们用 N 来表示自然数集，1 是自然数集 N 的元素，记为 $1 \in N$ ； $\frac{1}{2}$ 不是自然数集 N 的元素，记为 $\frac{1}{2} \notin N$ 等等。

组成集合的元素可以是各种各样的事物，如果组成集合

* “集合”是一个不下定义的原始概念。

的元素是数，这个集合就叫做数集，例如自然数集、整数集、偶数集、质数集等等；如果组成集合的元素是点，这个集合就叫做点集，例如几何图形都是点的集合。

关于集合这一概念，通常有以下几点，我们认为是不言而喻的：

1. “集合”是指某一类事物（或对象）的全体，而不是指其中的个别事物。例如（1）中的集合是指育新学校所有的学生，而不是指李纲这个学生。又如所有质数和合数组成的集合不能叫做自然数集，因为它不包含自然数1。

2. 集合所包含的事物的范围是明确的。所谓给定了一个集合，是说我们能够判定任一个事物是属于这个集合，还是不属于这个集合，二者必居其一，且只居其一。这就是说，一个集合的界限必须是分明的，不能含混不清*。例如，“一切自然数”，它有确定的界限，组成一个集合；而“一切大的自然数”却没有明确的界限，我们无法断定10,000或100,000,000这样的数是不是在它的范围之内，所以，“一切大的自然数”不能组成集合。

3. 在一般的情况下，集合中的元素是不相同的。即不能有重复的元素出现。例如，1、2、3、4这四个数组成一个集合，而不能由1、1、1、2组成一个集合，因为这里三个1是同一个数。事实上它是由1、2这两个数组成的集合。

在小学数学中，常常要求学生运用集合的思想方法来对

* 界限不分明的集合，叫做模糊集合，本书不讨论这样的集合。

事物进行分类，以培养学生按事物的属性来分类归纳的能力。

1.2. 集合的表示方法

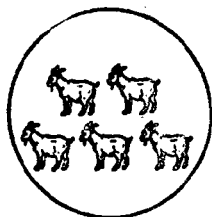
要把一个具体的集合表示出来，一般采用以下三种方法。

1. 图示法(也叫韦恩图法)：

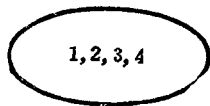
把集合的所有元素用一条封闭曲线圈起来表示一个集合。

这个方法比较直观、形象，便于看出集合之间的关系，易于被初学者所接受。在小学数学教学中采用这种方法。

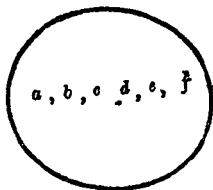
例如



5只羊的集合



由1, 2, 3, 4组成的集合



由 a, b, c, d, e, f
6个元素组成的集合



自然数集合

图 1-1

2. 列举法

把一个集合的所有元素都写出来，再用花括号括起来表示一个集合。

例 1 由 1 至 10 的偶数组成的集合 A ，可记为

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

例 2 全体自然数组成的集合 N ，可记为

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

例 3 8 和 12 的最大公约数的集合 C ，可记为

$$C = \{4\}$$

一般地，由元素 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 这些元素组成的集合 A ，可记为

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

3. 描述法

用语言或是数学表达式来给出集合中元素的特征，表示一个集合。

例 4 全体自然数组成的集合 N ，可记为

$$N = \{\text{自然数}\}$$

例 5 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根的集合 M ，可记为

$$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

在这里，花括号中竖线右边是一个数学表达式，它表示与集合 M 的元素 x 有关的条件，这个条件给出了元素的特征，集合 M 是由全体满足这个条件的元素 x 所组成的。

例 6 由 1 至 10 的自然数所组成的数集 D ，可以表示成

$$D = \{x \mid x \in N, 1 \leq x \leq 10\}$$

至于用哪一种方法来表示一个集合，要由具体情况来决

定。

为了方便，我们用 N 表示自然数集，用 Z 表示整数集，用 Q 表示有理数集，用 R 表示实数集。

根据集合中元素个数的情况，我们把集合分为有限集与无限集。

在前面的例子中，例1、例3、例5、例6中的集合的元素个数是有限的，我们把由有限个元素组成的集合叫做有限集。例2中集合的元素个数是无限的，我们把由无限个元素组成的集合叫做无限集。

例6 $E = \{x | 0 < x < 1,000,000,000, x \text{ 是自然数}\}$ 集 E 是有限集。

例7 设 $P = \{\text{质数}\}$ ，则集 P 是无限集。

在例3中，集合 C 只有一个元素，只含有一个元素的集合，叫做单元素集。

例8 $G = \{x | 2 \text{ 和 } 3 \text{ 的最小公倍数}\}$

则 G 是单元素集，它只有一个元素“6”。

例9 $X = \{x | 2x + 1 = 0\}$

集 X 是单元素集，它只有一个元素“ $-\frac{1}{2}$ ”。

例10 $Y = \{x | -1 < x < 1, x \text{ 是整数}\}$

集 Y 是单元素集，它只含有一个元素0，即

$$Y = \{0\}$$

有时不知道一个集合是不是有元素，为了方便，我们也谈论这样的集合。例如，李老师说：“明天缺课的同学星期日到学校来补课”。我们把“明天缺课的同学”看作一个集合，但第二天没有缺课的同学，于是这个集合没有元素。一个元

素也没有的集合，叫做空集。空集一般用符号 ϕ （或 $\{\}$ ）来表示。我们规定空集是有限集。

例如： $A = \{\text{体重超过 500 公斤的人}\}$ ，

则 A 是空集，即 $A = \phi$ 。

又如 $B = \{a | a \text{ 是自然数, } a < 1\}$

则 B 也是空集，即 $B = \phi$ 。

要注意区别 ϕ 与 $\{0\}$ 是不同的两个集合，集 ϕ 没有元素，而集 $\{0\}$ 有一个元素 0 ，它是单元素集。

把空集看作集合，在数学里引入这个概念是很必要的。这就象我们把 0 看作数一样。

有限集 A 的元素个数用符号 $n(A)$ 表示，如果 A 有 10 个元素，就记作 $n(A) = 10$ ，如果集 B 是单元素集，就记作 $n(B) = 1$ ，如果 $n(D) = 0$ ，那么， D 就是空集。

例 11 用列举法表示下列集合，并说明元素的个数。

(1) 10 以内质数的集合 A ；

(2) 12 的约数的集合 B 。

解：(1) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ， $n(A) = 4$ 。

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ， $n(B) = 6$ 。

例 12 用描述法表示下列集合，并说明元素的个数。

(1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ，

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 。

解：(1) $A = \{\text{不大于 } 10 \text{ 的正偶数}\}$

$= \{x | x = 2n, n \text{ 是不大于 } 5 \text{ 的自然数}\}$

$n(A) = 5$

(2) $B = \{\text{不大于 } 10 \text{ 的自然数}\}$

$= \{x | x \in N, x \leq 10\}$

$$n(B)=10$$

必须注意：元素与集合是不同层次的概念，元素 a 与只有一个元素 a 组成的集合 $\{a\}$ 是不应混淆的两个东西。例如，一个书包与由一个书包组成的集合是不同的两个概念。前者是元素，后者是集合。当然它们之间可以互相转化，如果把学生看作元素，教学班就是学生的集合，但在考虑年级时，又把教学班看作元素，而把年级看成是教学班的集合。

习 题 一

1. 写出下列集合的所有元素：

$A = \{\text{大于 } 0 \text{ 小于 } 40 \text{ 的 } 2 \text{ 的 倍数}\}$ ；

$B = \{\text{大于 } 0 \text{ 小于 } 40 \text{ 的 } 3 \text{ 的 倍数}\}$ ；

$C = \{\text{大于 } 0 \text{ 小于 } 40 \text{ 的 } 5 \text{ 的 倍数}\}$ 。

2. 用记号“ \in ”或“ $\bar{\in}$ ”写出下列各数是否是集合 A 的元素 (A 是第 1 题中所给出的集合)：

1, 2, 7, 12, 15, 24, 27, 39, 40, 42。

3. 用列举法或描述法表示下列集合：

(1) 20 以内的质数的集合；

(2) 20 以内正偶数的集合；

(3) 20 以内既是奇数又是质数的那些数的集合。

4. 指出下列的集合哪些是有限集？哪些是无限集？哪些是单元素集？哪些是空集？

(1) 亿以内的自然数的集合；

(2) 大于一亿的自然数的集合；

(3) 一个粮仓的稻谷粒的集合；

(4) 直线上的点的集合；