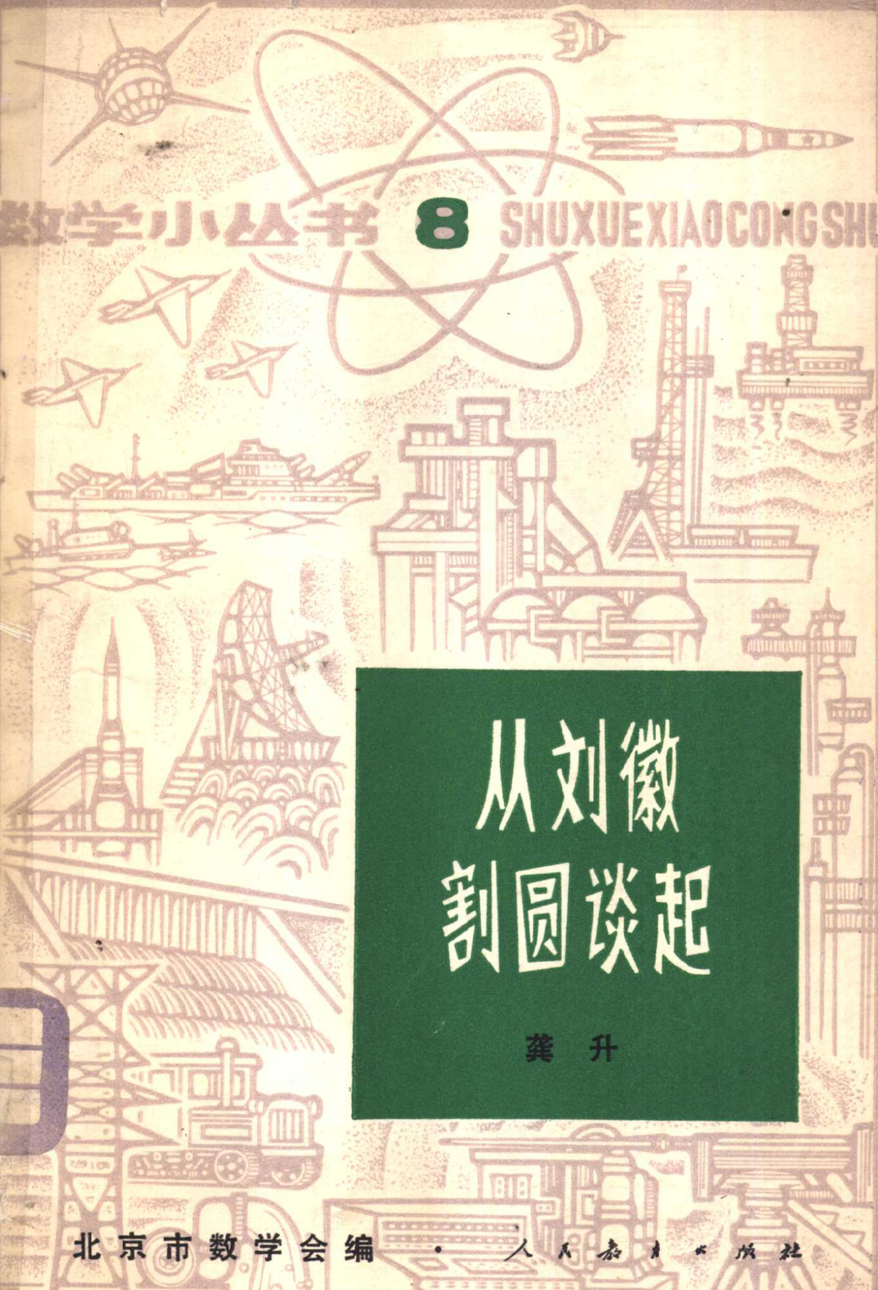

数学小丛书 8 SHUXUEXIAOCONGSHU

从刘徽割圆谈起

龚升

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数 学 小 丛 书

从刘徽割圆谈起

龚 升

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年 · 北京

我国古代的数学家刘徽，从圆内接六边形起算，令边数一倍一倍地增加，逐个算出六边形、十二边形、二十四边形……的面积，去逐步地逼近圆周率。这个方法就叫刘徽割圆术。刘徽这种方法的特点就是用有限来逼近无穷，这种思想一直到近代数学中还在起着极其重要的作用，而且今后将继续起着重要的作用。这本小册子就是应用刘徽割圆术的这一思想，来处理一些面积和体积问题，并且引出了面积原理，求出某些级数的和的极限。

从刘徽割圆谈起

龚　升

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

国营五二三厂印装

统一书号：13012·0246　　字数：20千

开本：787×1092 毫米　1/32　　印张：$1\frac{1}{2}$

1964年2月新一版

1979年1月第3次印刷

北京：83,401—383,400 册

定价 0.14 元

編 者 的 話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　次

一　刘徽割圓术

在华罗庚教授为这套小丛書所写的《从祖冲之的圓周率談起》一書中指出，一千四百年以前，祖冲之就已經知道了：

(i)圓周率 π 是在 3.1415926 和 3.1415927 之間；

(ii)用 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的約率，用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的密率.

書中还指出："这些結果是刘徽割圓术之后的重要发展. 刘徽从圓內接正六边形起算，令边数一倍一倍地增加，即 12, 24, 48, 96, …, 1536, …，因而逐个算出六边形，十二边形，二十四边形，……的面积，这些数值逐步地逼近圓周率. 刘徽方法的特点，是得出一批一个大于一个的数值，这样来一步一步地逼近圓周率. 这方法是可以无限精密地逼近圓周率的，但每一次都比圓周率小."这段話精炼地說明了刘徽割圓术的本質.

刘徽，是我国古代的一个数学家，是魏末晋初时人，他在数学上的重大貢献是将我国最古的数学著作之一《九章算术》詳細整理(公元 263 年)，从此之后，这本書才有了定本. 他在注《九章算术》中求圓周率是用圓內接六边形起算，用他自己的原話来說是："割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与圓周合体而无所失矣."这个方法是他的創造，我們叫它做**刘徽割圓术**. 他算到正 192 边形，这时候 π 的近似值是 3.141024. 他的思想后来得到祖冲之父子的发揮，从而使我国古代的数学放出了异彩.

把刘徽的割圆术用数学語言写出来，就是：有一个半径是 1 的圆 O，作內接正六边形 $ABCDEF$(图 1)．正六边形的面积是 $\triangle ABO$ 的面积的六倍．由于

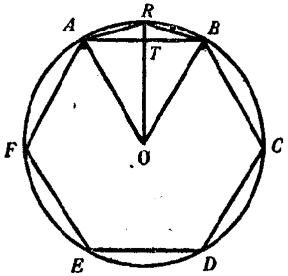

图 1.

$$AB=OA=1,\ OT=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以六边形的面积是

$$6\times\frac{1}{2}\times AB\times OT$$
$$=6\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

再作內接正十二边形 $ARB\cdots\cdots$，于是四边形 $ARBO$ 的面积是

$$\frac{1}{2}\times OR\times AB=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2},$$

所以十二边形的面积是

$$6\times\frac{1}{2}=3.$$

同样可以算出二十四边形，四十八边形，……的面积．

或許有人認为：刘徽的这种想法沒有什么了不起．这种看法是不对的．我們无論如何不能低估刘徽的想法，因为它孕育了一个极其重要的思想．圓的面积是未知的，要求的；但是正多边形的面积是可求的，已知的．因之，刘徽想法的可貴，第一在于：怎样用已知的、可求的来逼近未知的、要求的．刘徽想法的可貴，第二在于：他把圓看做边数无穷的正多边形，而边数有限的正多边形的面积是已知的，可求的．也就是說，他用有限来逼近无穷．

这种想法，一直到近代数学中还在起着极其重要的作用，而且我們相信，它将永久起着极其重要的作用．何况刘徽在

一千七百年以前就用这种想法来解具体的数学問題，这有多么了不起呀！在这本小册子中，我們将自始至終貫穿着应用刘徽的思想，来处理一些面积和体积的問題.

二 抛物綫在坐标軸上所盖的面积

在中学数学里，我們遇到的面积往往只是直綫图形和圓的面积．現在我們要对一些不属于上面說的范围的图形来寻求面积．先从簡単的說起．

我們知道，

$$y=x^2$$

表示一根抛物綫(图 2)．在 OX 軸上取一点 C，設 OC 的长是 a．从 C 作垂直于 OX 軸的直綫，交抛物綫于 A．我們来求 OAC 的面积．結果不是一下看得出来的，但是我們可以应用刘徽割圓术的思想，去找一个和它逼近的图形，而这个图形的面积是可以算得出来的．如图3，我們把 OC n 等分，分点是

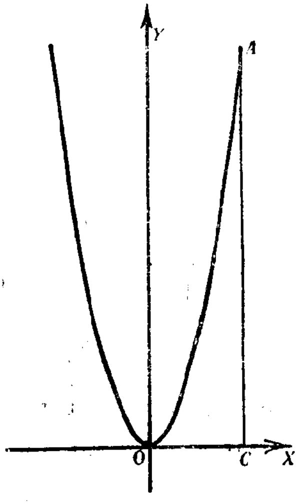

图 2.

$$(O=)M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}, M_k, \cdots, M_n(=C).$$

于是相邻二点的距离是 $\frac{a}{n}$．分别从这些分点 $M_k, M_{k-1}, \cdots$ 作垂直于 OX 軸的直綫，交抛物綫于 $N_k, N_{k-1}, \cdots$；从 N_{k-1} 作平行于 OX 軸的直綫，交 M_kN_k 于 P_k；… 于是我們得到一个和

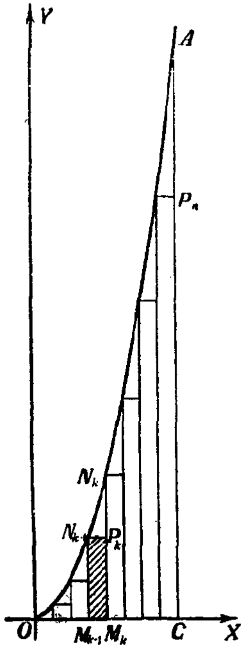

图 3.

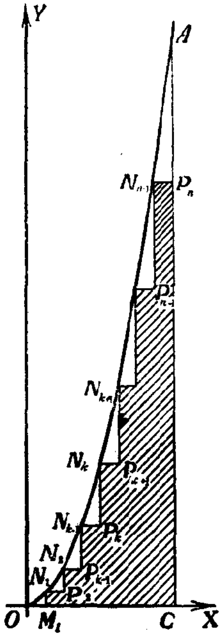

图 4.

OAC 相近似的图形，如图4，这个图形由直綫 OC，P_nC 和折綫

$$OM_1N_1P_2N_2\cdots P_{k-1}N_{k-1}P_kN_kP_{k+1}N_{k+1}\cdots P_{n-1}N_{n-1}P_n$$

所組成．这个图形的面积是可以算得出来的，因为它是由很多块矩形拼湊起来的．由于

$$y=x^2,$$

所以
$$M_{k-1}N_{k-1}=\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2,$$

因此矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$（見图 3）的面积是

$$\frac{a}{n}\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2,$$

所以整个近似图形的面积是

$$S_n=\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$$
$$=\frac{a^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].$$

这里由 OC, P_nC 和折綫所組成的图形所起的作用就相当于刘徽割圓术中的正多边形.

利用楊輝三角中的公式,我們有①

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

于是作为 OAC 的面积 S 的近似值的 S_n 等于

$$\frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),$$

显然 S_n 是小于 S 的,而且 n 越大,S_n 和 S 的差越小. 如图 5, $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 表示求 S_n 的一种分割所得的其中的一个矩形. 把这种分割分得更細,例如在 $M_{k-1}M_k$ 的中間取一点 M'_{k-1}. 从 M'_{k-1} 作 OX 軸的垂直綫,交抛物綫于 N'_{k-1}. 从 N'_{k-1} 作平行于 OX 軸的直綫,交 M_kP_k 于 P'_k. 又設 $M'_{k-1}N'_{k-1}$ 交 $N_{k-1}P_k$ 于 P'_{k-1}. 于是在新的分割中,矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积应該用矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P'_{k-1}M'_{k-1}$ 和矩形 $M'_{k-1}N'_{k-1}P'_kM_k$ 的面积的和来代替. 显然 $M_{k-1}N_{k-1}P'_{k-1}M'_{k-1}$ 和 $M'_{k-1}N'_{k-1}P'_kM_k$ 的面积的和比

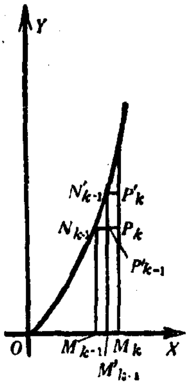

图 5.

① 参看这一套丛書中华罗庚:«从楊輝三角談起»,第四节例 2.

$M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的大，也就是新的分割所得的近似面积比原来分割的更接近于 S. 当 n 趋于无穷大时，S_n 趋于 $\frac{a^3}{3}$. 因之，得到 OAC 的面积 S 等于 $\frac{a^3}{3}$.

不难看出，上面的做法和刘徽割圆术本質上是一样的，只是一个割的是圆，一个割的是抛物綫在 OX 軸上所盖的面积. 这种割的方法也是："割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与抛物綫合体而无所失矣."

从上面說的結果立刻知道，在 OX 軸上任取一段 CD，这里

$OC=a$, $OD=b$, 而 $a<b$ (图 6)；

从 C, D 分别作垂直于 OX 軸的直綫，交抛物綫于 A, B，那末 $ABDC$ 的面积是 $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

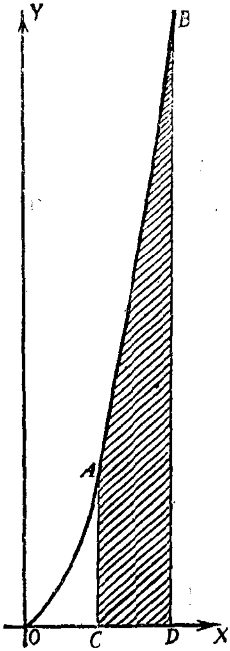

图 6.

三 球的体积

利用跟上面相同的道理，我們还可以求得一些物体的体积. 現在来計算球的体积. 設球 O 的半径是 R (图 7). 我們来考虑半球，得到結果后，加倍就是球的体积. 用一系列平行于半球的底的平面把半球切成等高的 n 片，使每片的厚度是 $\frac{R}{n}$. 每一片的精确的体积还是不便于計算的，但当片切得很薄时，可以把这一片用一个圆柱体来近似它. 对于第 k 片来

講，設它的上底的半径是 r_{k-1}，下底的半径是 r_k．作一个跟它近似的圓柱体，高是 $\frac{R}{n}$，底半径是 r_k．于是这样一个半球就可以用一个由 n 个薄的圓柱体所組成的物体来替代了．这个物体的每一片的体积是

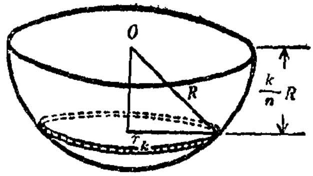

图 7.

$$\pi r_k^2 \frac{R}{n}.$$

但是 $r_k^2 = R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2$，所以这个近似于半球的物体的体积是

$$S_n = \frac{\pi R^3}{n}\left[\left(1-\frac{1^2}{n^2}\right) + \left(1-\frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right) + \left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right).$$

而 $$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

所以 $$S_n = \pi R^3\left[1-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right],$$

从直观上可以看出，这种分割的方法，也是“割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与球合体而无所失矣”．所以当 n 趋于无穷大时，S_n 就趋于半球的体积，而从 S_n 的表达式可以看出，这是

$$\frac{2\pi R^3}{3}.$$

所以全球的体积是 $\frac{4\pi R^3}{3}$．

說起球的体积还应当提到，在刘徽以前已經知道大約是

$$\frac{9}{2}R^3,$$

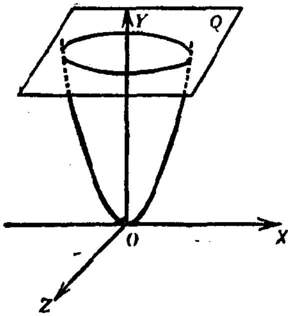

图 8.

但刘徽認为这个数值"偶与实相近，而丸犹伤多耳"，就是說，这个数值只和实际相近，但还嫌太多。之后祖冲之的儿子祖暅就在刘徽工作的基础上，精确地求得了球的体积，他的方法叫做"祖暅开立圓术"，不在这里詳細說了。

讀者可以利用上面說的方法，求得圓錐体的体积是$\frac{\pi r^2 h}{3}$，这里r是圓錐体底的半径，h是圓錐体的高。如果把第二节中的抛物綫用OY軸做軸旋轉，得到旋轉抛物面，再作一个垂直于OY軸的平面Q，如图8。我們可以应用上面的方法，求出Q和旋轉抛物面之間所包的体积。

四　正弦曲綫和坐标軸之間的面积

并不是所有求面积或体积的問題都像上二节所作的那末簡单。事实上，事情往往要复杂得多。这里我們举一个比上二节复杂一些的例。

我們知道$y=\sin x$所描繪的曲綫叫做正弦曲綫，如图9。現在求$x=0$到$x=\pi$之間正弦曲綫和OX軸之間所包的面积。也跟以前一样，把OX軸上从0到π的一段n等分，分点是

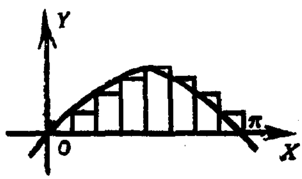

图 9.

$$0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \frac{n\pi}{n}.$$

跟以前一样，从这些分点作垂直于 OX 軸的直綫，把图形分成 n 条，每一条可以用矩形来近似它，于是得到第 k 块的近似面积是

$$\frac{\pi}{n}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}.$$

由这 n 块矩形拼起来的图形跟正弦曲綫和 OX 軸之間所包的图形相逼近．而这图形的面积是

$$S_n=\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

我們来計算上面的和式．由于

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B),$$

于是

$$\begin{aligned}2S_n\sin\frac{\pi}{2n}&=\frac{\pi}{n}\Big(2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}+2\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots\\&\qquad+2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\Big)\\&=\frac{\pi}{n}\Big[\Big(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}\Big)+\Big(\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}\Big)\\&\qquad+\cdots+\Big(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\Big)\Big]\\&=\frac{\pi}{n}\Big(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\Big).\end{aligned}$$

但 $$\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$

所以 $$2S_n\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{2\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{2\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

因而 $$S_n=\frac{\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

即使到了这一步，結果还不是显然的，尽管我們知道 S_n 是小

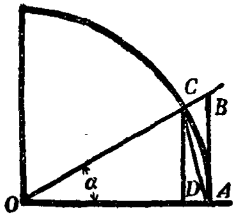

图 10.

于 S 的，而且当 n 增大时跟 S 越来越接近。

为了把 S 計算出来，我們先来給出一些准备知識。

我們取半径是 1 的圓，取角 α 适合 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，如图 10，可以看出：$\triangle OAB$ 的面积大于扇形 OAC 的面积，而扇形 OAC 的面积大于 $\triangle OAC$ 的面积。但 $\triangle OAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$，扇形 OAC 的面积是 $\frac{1}{2}\alpha$，$\triangle OAC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sin\alpha$，

因之，
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha>\frac{1}{2}\alpha>\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

这就是
$$\frac{1}{\sin\alpha}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

或
$$1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha.$$

当 α 趋于零时，上面这个不等式的右边趋于 1，所以当 α 趋于零时，$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 趋于 1。

从上面这个結果，我們就知道，当 n 无限增大时，
$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}$$
是趋于 1 的。

有了这个作准备，立刻可以看出，由于
$$S_n=\frac{\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2\cdot\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$
所以当 n 趋于无穷大时，S_n 趋于 2，而这就是我們要求的面积。

五 不同的分割法

上面我們都把 OX 軸上的距离等分，然后来进行計算．但是有的时候，应用等分来計算反而很困难． 通过以下的例子，可以更清楚地了解这一点．

我們提出一个比第二节中所提出的更一般的問題，来研究曲綫 $y=x^m$ 盖在 OX 軸上的面积，这里 m 是不等于 -1 的实数，如图 11．

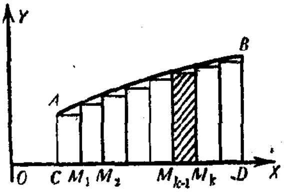

图 11．

如果也像上几节那样等分，設 OD 的长是 b，OC 的长是 a，并且 $a<b$，我們把 CD 分成 n 等分，每一段的距离是 $\frac{b-a}{n}$． 如同第二节中的方法作 n 块矩形，拼凑起来作为 $ABDC$ 的近似图形． 在求这近似图形的面积的过程中，要遇到求以下的和

$$1^m+2^m+\cdots+n^m,$$

而这个值当 m 是正整数时，例如 $m=3,4,\cdots$，我們还可以利用楊輝三角中的一些公式求出来，但已經是很吃力的事了；至于 m 不是整数时，要写出这个和的具体表达式是十分困难的． 因之，我們必須另想别的办法． 事实上，我們在开头二节中已經看到，刘徽割圓时，是用正多边形来作为圓的近似图形的，而在求抛物綫在 OX 軸上所盖的面积时，就用很多矩形拼凑起来的折綫图形作为近似图形了． 因之，不同的分割方法应該是被允許的． 我們可以不一定把 OX 軸上的距离等分然

形来进行計算。

我們記 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$，显然，由于 $b>a$，所以 $q>1$。但是当 n 趋于无穷时，q 是趋于 1 的，这是因为

$$\log q=\frac{\log b-\log a}{n},$$

而 $\frac{\log b-\log a}{n}$ 当 n 趋于无穷时，显然是趋于零的，所以 q 趋于 1.

現在把 CD 分成 n 段，分点是

$$(C=)M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n(=D).$$

这些分点是这样取的，讓

$$OM_1=aq,\ OM_2=aq^2, \cdots,\ OM_n=aq^n.$$

于是

$$\begin{aligned}
M_1C &= a(q-1),\\
M_2M_1 &= aq(q-1),\\
M_3M_2 &= aq^2(q-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_kM_{k-1} &= aq^{k-1}(q-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_nM_{n-1} &= aq^{n-1}(q-1).
\end{aligned}$$

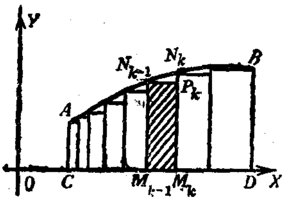

图 12。

这样一来，CD 之間并不是等分了，而是越靠近 C 的分得越小，越靠近 D 的分得越大(图 12)。但是当分点越来越多时，就是越分越細时，每一段的长都趋于零。

照这样分割以后，矩形