

机械加工中的振动問題

屈維德等著

高等教育出版社

本书是昆明工学院机械系机械振动科研小组从 1954 年以来对“机械加工中的振动”问题的一部分研究报告的汇编。

本书包括研究论文十二篇及苏联哈尔科夫工学院力学教研組 Л. И. 史坚伏里夫副教授对屈維德著“冲击消振原理”一文的評述。“冲击消振原理”一文說明了冲击式消振器的工作原理及其应用,并导出了振幅和频率的必要公式。“鐘杆消振的試驗研究初步情况报告”一文提出了几种新的可能形式的扭轉消振器結構。“車床测力仪的設計及其振动的消除”一文提出了一种新型的結構简单的机械式車床测力仪的設計,并介紹了冲击消振器的实际应用情况。这对研究車床切削力問題有所帮助。“振动送料裝置”一文研究了振动的利用問題。其他几篇論文分別討論了某些因素对振动或消振过程的作用和影响。所有这些論文都有一定的理論分析和試驗結果,并且都有不同程度的創造性。它們对于了解消振問題有一定的帮助。

本书可供高等工业学校机械类专业师生在机械加工方面的教学中参考,并可供有关工程技术人員及科学研究人員閱讀。

机械加工中的振动問題

屈維德等 著

高等教育出版社出版 (北京宣武門內承恩寺 7 号)

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 15010·840 大 32 开本 850×1108 $\frac{1}{32}$ 印张 4 $\frac{1}{16}$

字数 96,000 印数 0001—4,000 定价 (7) 半 0.80

1953 年 12 月第 1 版 1959 年 12 月北京第 1 次印刷

序

自从1954年昆明工学院成立时起，我院和附近的机械厂，尤其是和昆明机床厂的联系和合作日益密切，从他们那里搜集了一些生产上尚待解决的问题：如铰孔不光、细长件的高速切削、精密机床的地基和镗床及镗杆的振动问题等，这些都属于金属切削过程中的振动问题及机械振动问题。另外，由于当时教学上急需，我院屈维德教授曾设计并赶制了一种结构简单的机械式测力仪，试用该测力仪时发现在某种切削用量之下，测力仪产生显著的振动。由于教学和生产上的需要，屈维德教授首先开始研究机械振动及金属切削过程中的自激振动问题，并在其指导帮助下成立了机械振动科研小组。本书的几篇文章是该小组几年来研究报告的一部分。

屈维德教授几年来曾对冲击消振问题进行了研究，他在“冲击消振原理”一文里首先提出冲击消振问题计算的理论基础。这方面部分摘要曾在今年2月号苏联“机床与工具”杂志上发表过。因此在1958年大跃进时，在他的倡议和帮助下，机械振动科研小组围绕冲击消振问题进行了许多工作，本书的“镗杆消振的试验研究初步情况报告”、“冲击作用对旋转件振幅的影响”、“冲击时接触形状对跃回状态的影响”、“硬度与恢复系数的关系”几篇文章就是这方面工作的一个小结。值得提出的是，除上述第一篇文章的作者是教师外，其余各篇文章的作者都是学生。他们在党的领导下，在教学相长的原则下，采用师生结合的方法共同进行研究，在科学研究工作中取得了不少成绩。因此，在云南省和全国召开的青年社会主义建设积极分子大会上都荣获“先进集体”的光荣称号并获得奖状奖旗。

“車床測力儀的設計及其振動的消除”一文是作者在 1956 年寫的，該文提出了一種結構簡單的機械式測力儀并介紹了作者設計的沖擊消振器實際應用的情況。該文當時曾以油印稿散發各有關學校和廠礦，引起了普遍的興趣，某些廠礦并用之于生產實際中。正式出版時曾請原作者對原文作了較仔細的修改。

由于目前关于冲击消振問題的資料不多，編入本書的有关研究报告将有較大的參考價值。

“速度對摩擦自振的影響”一文的作者是學生，本書出版時他們已離開了學校，為此我們請王洪綱等同志對該文作了重要的補充，根據他們新實驗結果另寫“摩擦擺的自激振動”一文，一并匯編在本書里。這兩篇文章都是根據實驗找出摩擦自振的規律，有助於進一步了解引起車刀振動的實質問題。

除了研究消除振動（沖擊消振、摩擦消振）外，本書還搜集了“振動送料裝置”一文，作為研究利用振動的開始。該文在今年一月號“機床與工具”雜誌上發表後曾引起各有關方面的興趣，轉載時曾請原作者對原文作了修改和重要的補充。

為使閱讀本書不發生困難，我們請屈維德同志寫了“鏢杆和車刀的固有振動頻率的計算”一文。

為了感謝蘇聯同志、特別是哈爾科夫工學院力學教研組 И. М. 包巴科夫教授、Л. И. 史堅伏里夫副教授對我們機械振動科研小組工作的熱情關懷，在本書里轉譯了發表在蘇聯“機床與工具”上屈維德教授寫的“沖擊消振器”一文和 Л. И. 史堅伏里夫副教授對屈維德教授“沖擊消振原理”一文的評述。

最後希望讀者對本書各篇文章的內容提出批評意見，并直接寄往昆明工學院機械系機械振動科研小組收。

著者 1959.8.

目 录

序	iii
鐘杆和車刀的固有振動頻率的計算	屈維德 1
冲击消振原理	屈維德 17
車床測力儀的設計及其振動的消除	屈維德 王洪綱 41
鐘杆消振的試驗研究初步情況報告	吳云峰 楊 楠 55
冲击作用对旋轉件振幅的影响	楊紹錚 徐賜书 62
冲击时接触形状对跃回状态的影响	胡朝良 江世栋 73
硬度与恢复系数的关系	張 澤 吳 銑 78
切断刀的摩擦消振	姜乾成 81
速度对摩擦自振的影响	王兆芳 孙宗昶 92
摩擦摆的自激振动	王洪綱 熊心悅 袁建坤 99
振动送料装置	呂耀森 116
冲击消振器	屈維德 127
对屈維德同志的著作“冲击消振原理”的評述	J. H. 史堅伏里夫 131

鏝杆和車刀的固有振動頻率的計算

屈 維 德

切削沒有溝槽的連續的被加工面時，鏝杆或車刀可能產生自振。根據實驗^①[3]、[4]、[5]、[6]，鏝杆或車刀的自振頻率接近於它的固有振動頻率。因此，有必要較準確地計算固有振動頻率。下述的計算法，是考慮到夾持部分的情況，通過靜力實驗，然後按實驗數據以計算鏝杆和車刀的固有振動頻率。首先設鏝杆或車刀的材料是組織均一的且各方向都有相同性質的。在彈性極限以內，它是完全服從虎克定律的。

(一) 橫向振動

如圖 1，設 M 表示彎矩； Q 表示剪力； q 表示杆上每單位長度的載荷，包括杆本身的重量。

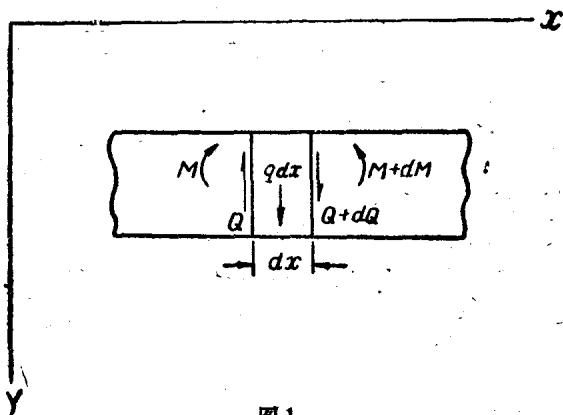


圖 1.

① 方括弧內的數字系指參考書刊序目，下同。

在垂直方向

$$dQ + qdx = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (2)$$

取图 1 所示梁的一小段，其长度为 dx ，对右侧一点的力矩公式为

$$dM - Qdx + \left(\frac{1}{2}qdx\right)dx = 0. \quad (3)$$

由材料力学，知

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad (4)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}. \quad (5)$$

由式(2)与(5)得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (6)$$

設 E 表示刀杆材料的彈性模数； J_1 表示刀杆横剖面对此剖面的中軸的慣矩。

由材料力学，知

$$M = EJ_1 \frac{d^2y}{dx^2}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2M}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_1 \frac{d^2y}{dx^2} \right); \\ &= EJ_1 \frac{d^4y}{dx^4}. \end{aligned} \quad (8)$$

此杆在它本身的质量作用之下振动。可設想此杆受其本身的质量与加速度所构成的慣性力的作用。

設 A 表示杆的横剖面积； γ 表示杆的材料单位体积的重量；

g 表示重力加速度。

則此杆每单位长度的质量为 $\frac{A\gamma}{g}$ 。

又設这一小段的加速度为 $\frac{d^2y}{dt^2}$, 則此杆每单位长度的慣性力

为
$$\frac{A\gamma}{g}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

設 ω 表示圓頻率; t 表示時間; Y 表示此小段作簡諧运动所显示的振幅,

則

$$y = Y \sin \omega t; \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega Y \cos \omega t; \quad (10)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 Y \sin \omega t. \quad (11)$$

由式(9)得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y; \quad (12)$$

$$\frac{A\gamma}{g}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\frac{A\gamma}{g}\omega^2 y. \quad (13)$$

这慣性力应等于 q , 由式(6)及(13)得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{A\gamma}{g}\omega^2 y. \quad (14)$$

由式(8)与(14)得

$$EJ_1 \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{A\gamma}{g}\omega^2 y; \quad (15)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{A\gamma\omega^2}{gEJ_1}y = 0. \quad (16)$$

設

$$\alpha^4 = \frac{A\gamma\omega^2}{gEJ_1},$$

則式(16)变为

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \alpha^4 y = 0. \quad (17)$$

設 D 表示运算符, 則

$$\begin{aligned}(D^4 - \alpha^4)y &= 0; \\ (D^2 - \alpha^2)(D^2 + \alpha^2)y &= 0; \\ (D - \alpha)(D + \alpha)(D - i\alpha)(D + i\alpha)y &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

方程(18)的根为: $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$,

$$y = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} + C_1 e^{i\alpha x} + D_1 e^{-i\alpha x} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}&= A_1 (\cosh \alpha x + \sinh \alpha x) + B_1 (\cosh \alpha x - \sinh \alpha x) + \\&+ C_1 (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) + D_1 (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) = \\&= (A_1 + B_1) \cosh \alpha x + (A_1 - B_1) \sinh \alpha x + \\&+ (C_1 + D_1) \cos \alpha x + (C_1 - D_1) i \sin \alpha x \\&= a_1 \cosh \alpha x + b_1 \sinh \alpha x + c_1 \cos \alpha x + d_1 \sin \alpha x.\end{aligned}\quad (20)$$

設 $a_1 = A_1 + B_1$;

$b_1 = A_1 - B_1$;

$c_1 = C_1 + D_1$;

$d_1 = (C_1 - D_1)i$.

鋸杆或車刀可看作悬臂梁, 它的边界条件如下:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } y=0; \quad (21)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \frac{dy}{dx}=0; \quad (22)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } M=0, \text{ 亦即 } \frac{d^2 y}{dx^2}=0; \quad (23)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } V=\frac{dM}{dx}=\frac{d^3 y}{dx^3}=0 \quad (24)$$

(参看图 2)。

又因

$$\cosh 0 = 1;$$

$$\sinh 0 = 0,$$

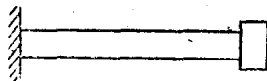


图 2.

$$\text{由式(20)与(21)得 } a_1 + c_1 = 0; \quad (25)$$

$$d(\sinh ax) = a \cosh ax dx;$$

$$d(\cosh ax) = a \sinh ax dx.$$

由式(20)得

$$\frac{dy}{dx} = a[a_1 \sinh(ax) + b_1 \cosh(ax) - c_1 \sin(ax) + d_1 \cos(ax)].$$

由式(22)得

$$0 = a[0 + b_1 - 0 + a_1].$$

$$b_1 = -a_1 \quad (26)$$

由式(20)得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2[a_1 \cosh ax + b_1 \sinh ax - c_1 \cos ax - d_1 \sin ax]. \quad (27)$$

由式(27)得

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = a^3[a_1 \sinh ax + b_1 \cosh ax + c_1 \sin ax - d_1 \cos ax]. \quad (28)$$

由式(23), (25), (26)及(27)得

$$a_1(\cosh al + \cos al) = -b_1(\sinh al + \sin al). \quad (29)$$

由式(24)与(28)得

$$a_1(\sinh al - \sin al) = -b_1(\cosh al + \cos al). \quad (30)$$

由式(29)、(30)相除得

$$\frac{\cosh al + \cos al}{\sinh al - \sin al} = \frac{\sinh al + \sin al}{\cosh al + \cos al},$$

$$(\cosh al + \cos al)^2 = (\sinh al - \sin al)(\sinh al + \sin al),$$

$$\cosh^2 al + 2 \cosh al \cos al + \cos^2 al = \sinh^2 al - \sin^2 al,$$

$$2 \cosh al \cos al + (\cosh^2 al - \sinh^2 al) + (\sin^2 al + \cos^2 al) = 0,$$

$$2 \cosh al \cos al + 1 + 1 = 0,$$

$$\cosh al \cos al + 1 = 0, \quad (31)$$

$$al = 1.875 \text{ 或 } 4.695. \quad (32)$$

参考式(17), 得

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \alpha^4 \frac{gEJ_1}{A\gamma}, \\ \omega &= \alpha^2 \sqrt{\frac{gEJ_1}{A\gamma}} \\ &= \frac{(\alpha l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEJ_1}{A\gamma}}.\end{aligned}\quad (33)$$

由式(32)与(33)得

$$\omega_1 = \frac{(1.875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEJ_1}{A\gamma}}, \quad (34)$$

上式即表示第一种方式的固有振动频率。

由式(32)与(33)得

$$\omega_2 = \frac{(4.695)^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEJ_1}{A\gamma}}. \quad (35)$$

即表示第二种方式的固有振动频率。

由式(34)与(35)得

$$\omega_2 = \left(\frac{4.695}{1.875} \right)^2 \omega_1 = 6.25 \omega_1. \quad (36)$$

由式(34)得

$$\omega_1 = \sqrt{12.4 \left(\frac{1}{lA\gamma} \right) \frac{EJ_1}{g}}, \quad (37)$$

式中 $\frac{lA\gamma}{g}$ 即等于镗杆或车刀外伸部分的质量 m 。

一水平悬臂梁的自由端受一垂直力 P ，则自由端的挠度为

$$\frac{Pl^3}{3EJ_1}.$$

此悬臂梁的自由端的刚度 $c = \frac{P}{\frac{Pl^3}{3EJ_1}} = \frac{3EJ_1}{l^3}. \quad (38)$

由式(37)与(38)得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{\left(\frac{m}{4.13}\right)}} \quad (39)$$

設 m_1 表示計算質量,

$$m_1 = \frac{m}{4.13} \quad (40)$$

悬臂梁的另一端是固定端。結合鐮杆的实际情形，即为剛固的鐮杆支承。如以拉杆拉紧鐮杆的錐柄于 C620 型車床的主軸錐孔內，可視為剛固的鐮杆支承。鐮杆自由端的实测剛度，应与式(38)所示的相符。式(39)可改为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\text{实测剛度}}{\text{計算質量}}} \quad \text{弧度/秒}; \quad (41)$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{实测剛度}}{\text{計算質量}}} \quad \text{循环/秒}。 \quad (42)$$

例 1 有一 3.5 厘米直徑的鋼制鐮杆，以拉杆裝于 C620 型車床的主軸上。此鐮杆的外伸长度为 24.5 厘米。当此鐮杆作橫向自由振动时，其第一种方式的固有振动頻率為若干？第二种方式的固有振动頻率為若干？

由式(38)得 $C = \frac{3EJ_1}{l^3}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times \frac{\pi}{64} \times 3.5^4}{24.5^3} \\ &= 3120 \text{ 公斤/厘米}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{此鐮杆外伸部分的重量} &= \pi 1.75^2 \times 24.5 \times 7.8 \\ &= 1840 \text{ 克} \\ &= 1.84 \text{ 公斤}。 \end{aligned}$$

由式(40)得

$$m_1 = \frac{1.84}{4.13 \times 980} = 0.000455 \frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{厘米}}$$

由式(39)得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3120}{0.000455}} = 2620 \text{ 弧度/秒}。$$

由式(36)得 $\omega_2 = 6.25(2620) = 16400 \text{ 弧度/秒}；$

$$f_1 = \frac{2620}{2\pi} = 418 \text{ 循环/秒}；$$

$$f_2 = \frac{16400}{2\pi} = 2610 \text{ 循环/秒}。$$

例2 有一 20×30 毫米鋼質車刀体，夹于車床四方刀架上，外伸长度为 80 毫米。夹好后实测得它的自由端的剛度为 2800 公斤/毫米。求此車刀在垂直方向的固有振动頻率。

实测剛度 = 28000 公斤/厘米。

外伸部分的重量 = $2 \times 3 \times 8 \times 7.8 = 374$ 克即 0.374 公斤。

由式(40)得

$$\text{計算質量} = \frac{0.374}{4.13 \times 980} = 0.0000925 \frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}}{\text{厘米}}。$$

由式(42)得

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{28000}{0.0000925}} = 2770 \text{ 循环/秒}。$$

例3 設有一大頭鏢杆，杆体的直徑为 35 毫米，杆体的外伸长度为 245 毫米，杆头的直徑为 55 毫米，杆头的长度为 50 毫米，实测得(夹好后)杆头与杆体交界处的剛度为 310 公斤/毫米。求此鏢杆的横向固有振动頻率(參看图 2)。

实测剛度 = 3100 公斤/厘米。

由例 1 知杆体的計算質量为 $0.000455 \frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{厘米}}。$

杆头重量 = $\pi \times 2.75^2 \times 5 \times 7.8 = 928$ 克 = 0.928 公斤。

杆头的質量 = $\frac{0.928}{980} = 0.000946 \frac{\text{公斤} \cdot \text{秒}^2}{\text{厘米}}。$

总的計算質量=(杆体的計算質量)+(杆头的質量)

$$=0.000455+0.000946$$

$$=0.001401 \frac{\text{公斤秒}}{\text{厘米}}。$$

由式(42)得

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3100}{0.001401}} = 238 \text{ 循环/秒}。$$

(二) 扭轉振动

如图 3, $M_{\text{扭}}$ 表示扭矩; θ 表示扭轉角; $d\theta$ 表示长度为 dx 一段的扭轉角; G 表示剪切彈性模数。

由材料力学知,

$$d\theta = \frac{M_{\text{扭}} dx}{J_p G}; \quad (43)$$

$$M_{\text{扭}} = J_{\text{扭}} G \frac{d\theta}{dx}, \quad (44)$$

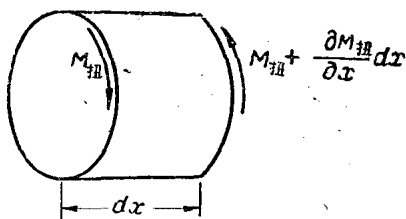


图 3.

式中 $J_{\text{扭}}$ 表示刀杆横剖面对刀杆的轉軸的慣矩。

$$\text{刀杆每单位长度所受的扭矩 } \frac{\partial M_{\text{扭}}}{\partial x} = J_{\text{扭}} G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (45)$$

$$dx \text{ 一段所受的扭矩 } \frac{\partial M_{\text{扭}}}{\partial x} dx = J_{\text{扭}} G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx. \quad (46)$$

dx 一段所受的扭矩又等于此段的轉动慣量 $J_{\text{扭}}$ 与角加速度 $\ddot{\theta}$ 的乘积:

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} &= \ddot{\theta} \int r^2 dM \\ &= \ddot{\theta} \frac{\gamma}{g} \int r^2 dA dx \\ &= \ddot{\theta} \frac{\gamma}{g} J_{\text{扭}} dx. \end{aligned} \quad (47)$$

由式(47)与(46)得

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) \frac{\gamma}{g} J_{\pi} dx = J_{\pi} G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx.$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{Gg}{\gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (48)$$

参看[1]第五十节, 設 $a^2 = \frac{Gg}{\gamma}$, (49)

a 表示扭轉波沿圓柱形杆傳播的速度, 参看[2]第三章第二节。

式(48)的輔助方程为 $(m^2 - a^2) = 0$, (50)

得 m 的两个根为 a 和 $-a$,

$$\theta = F_1(x+at) + F_2(x-at), \quad (51)$$

$F_1(x+at)$ 及 $F_2(x-at)$ 是 x, t 的函数。

設 $F_1(x+at) = R_1 \cos \left[\frac{\omega}{a}(x+at) \right];$

$$F_2(x-at) = R_1 \cos \left[\frac{\omega}{a}(x-at) \right],$$

代入式(51)得

$$\begin{aligned} \theta_1 &= R_1 \left\{ \cos \left[\frac{\omega}{a}(x+at) \right] + \cos \left[\frac{\omega}{a}(x-at) \right] \right\} \\ &= R_1 \left\{ \cos \left(\frac{\omega x}{a} + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\omega x}{a} - \omega t \right) \right\} \\ &= R_1 \left\{ \cos \frac{\omega x}{a} \cos \omega t - \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{\omega x}{a} \cos \omega t + \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t \right\} \\ &= 2R_1 \cos \frac{\omega x}{a} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (52)$$

又設

$$F_1(x+at) = R_2 \sin \left[\frac{\omega}{a}(x+at) \right];$$

$$F_2(x-at) = R_2 \sin \left[\frac{\omega}{a}(x-at) \right],$$

代入式(51)得

$$\begin{aligned} \theta_2 &= R_2 \left\{ \sin \left[\frac{\omega x}{a} + \omega t \right] + \sin \left[\frac{\omega x}{a} - \omega t \right] \right\} \\ &= 2R_2 \sin \frac{\omega x}{a} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (53)$$

$$\text{式(52)及(53)均属于 } \theta = f(x) \cos \omega t \quad (54)$$

的类型。式(54)的 $f(x)$ 是 x 的函数。以式(49)的 a 值及(54)的 θ 值代入式(48)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f(x) \cos \omega t] &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f(x) \cos \omega t]; \\ -\omega^2 f(x) \cos \omega t &= a^2 \cos \omega t \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}; \\ -\omega^2 f(x) &= a^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} f(x) &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

式(55)的解为

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\omega x}{a} + B_1 \cos \frac{\omega x}{a}. \quad (56)$$

代入式(54)得

$$\theta = \left(A_1 \sin \frac{\omega x}{a} + B_1 \cos \frac{\omega x}{a} \right) \cos \omega t. \quad (57)$$

二阶微分方程的一般解应有两个任意常数,而式(57)确具有两个任意常数 A_1 和 B_1 。式(57)是式(48)的一个一般解。若 $2R_2 = A_1$, $2R_1 = B_1$,则可以說,式(57)是由式(52)及(53)所构成的。

当刀杆的一端是固定端,另一端是自由端,其边界条件如下:

$$\text{当 } x=0, \quad \theta=0; \quad (58)$$

$$\text{当 } x=l, \quad M_{\text{H}}=0. \quad (59)$$

以式(58)的 x, θ 值代入式(57), 得

$$0 + B_1 \cos 0^\circ \cos \omega t = 0,$$

故

$$B_1 = 0. \quad (60)$$

由式(44)得

$$M_{\text{II}} = J_{\text{II}} G \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

因为

$$M_{\text{II}} = 0,$$

故

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (61)$$

由式(57)及(61)得

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l} = A_1 \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega l}{a} = 0,$$

$$\cos \frac{\omega l}{a} = 0,$$

解之得 $\frac{\omega l}{a}$ 的值为 $\frac{\pi}{2}, \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right), \dots, \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi,$

$$\omega = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{a}{l}, \quad (62)$$

n 为零或正整数。

$$f = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{a}{2l}. \quad (63)$$

鋼制刀杆的 $G = 8.45(10)^5$ 公斤/厘米²;

$$\gamma = \frac{7.8}{1000} \quad \text{公斤/厘米}^3;$$

$$g = 980 \quad \text{厘米/秒}^2,$$

由式(49)得

$$a = \sqrt{\frac{8.45(10)^5 \times 1000 \times 980}{7.8}} = 326000 \text{ 厘米/秒}$$

第一种方式振动的 $n=0$,

由式(63)得