军华

第二次修订版

2合1

同步·拓展

高二数学（上）

龍門書局
www.sciencep.com

同步·拓展

2合1

第二次修订版

高二数学(上)

丛书主编　常力源

数学主编　汤步斌

本册主编　黄军华

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

同步·拓展.高二数学.上:2合1/常力源主编;黄军华分册主编.—修订版.—北京:龙门书局,2003

ISBN 7-80160-318-4

Ⅰ.同… Ⅱ.①常…②黄… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第020140号

责任编辑:李敬东/封面设计:耕者设计工作室

龍門書局 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国人民解放军第1201工厂印刷
科学出版社总发行 各地书店经销

*

2000年7月第 一 版 开本:A5(890×1240)
2003年6月第二次修订版 印张:8 3/4
2003年6月第四次印刷 字数:260 000
印数:68 001—98 000

定 价:10.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

人类社会已迈入了一个崭新的世纪，同时也迎来了一个知识经济的时代。知识经济呼唤高素质人才，而高素质人才应具备系统扎实的科学文化基础，健康健全的身体、心理素质，同时，更应具有较强的思维能力、实践能力和创新精神。

学校教育的目的是育人。在今天，一切为了学生发展的理念已日趋成为现代教育的灵魂。如何发掘学生的潜能，并引导其健康地发展成为鲜明的个性特长？如何推进以创新精神的培养为核心的全面素质教育？如何在基础教育学段为未来高素质人才的成长铺垫好坚实的根基？每一位有责任感的教育工作者都在认真地思考和探索着。编写这套丛书的学校，就是这一伟大变革中的积极实践者。

湖南师大附中这所有着近百年办学历史的三湘名校，不失时机地把握改革开放的历史机遇，坚持以“三个面向”为指针，贯彻以改革为动力，以育人为根本的办学方针，确立了“以人为本、承认差异、发展个性、着眼未来”的学校课程改革理念，努力构建高中课程新体系，推动素质教育的深入实施。在“学生主体、教师主导、思维主线”教学思想的指引下，学校“全员发展、全面发展、特长发展、和谐发展”的育人目标得以较好的实现，学生整体素质和个性特长也都得到了较好发展。多年来，学校的高中毕业会考和高考成绩一直名列湖南省前茅；1985 年以来向北京大学、清华大学等全国名牌重点大学免试保送优秀毕业生 850 多名，还有 38 名学生考入中国科学技术大学等大学少年班。在国际中学生学科奥林匹克竞赛中，学校历届学生先后获得数、理、化、生等学科金牌 15 枚，银牌 6 枚，为国家赢得了极大荣誉，学校亦被誉为“金牌摇篮”！学校推行全面素质教育的育人经验曾被《人民教育》长篇专题报道。

全面推行素质教育，培养学生创新精神的主渠道是学科课堂教

学。为了更好地与同行们交流学科育人的心得，同时也为了能给莘莘学子提供一套既能与现行教学大纲和教材同步配套，又能与启迪思维、开发智力、拓宽视野的奥林匹克竞赛思想方法合拍的综合性训练读本，在龙门书局的大力支持下，我们组织了湖南师大附中有着丰富教学经验的教师和国际奥林匹克竞赛的金牌教练们编写了这套不同学段、多学科组合的《同步·拓展（2 合 1)》丛书，力求通过同步辅导与竞赛培训的有机结合，使学生在明确重点、突破难点的基础上，加深对基础知识、基本技能的理解和运用，积累解题技巧，掌握学科思想方法，学会举一反三和融会贯通，能将知识内联、外延、迁移、重组，在新情景下解决新问题，切实提高学生的学科学习能力和创新意识。

本丛书不但面向重点学校的尖子生，作为其竞赛的入门普及读物，而且更是面向普通学校广大学生的同步导学、系统复习和应考提高的有效工具书。“同步”与“竞赛”相结合，是本书的特色，对我们来说，也是一次新的尝试。由于受编著者水平所限，加之编著时间仓促，书中难免存在不足和差错，恳请不吝指正。

常力源

2003 年 3 月

攻克疑难，采用全新理念

——第三次修订版前言

2000 年本丛书问世，好评如潮。

2001 年本丛书的修订版推出后，市场销量大增。

2002 年本丛书的第二次修订版由于内容更新、形式更活，很快成为中学生忠诚的朋友，被一传十，十传百。丛书全年平均销量 5 万多套，成为书市上的黑马，被广泛评为当年上升最快的明星畅销书之一。

由于本丛书借用学科奥林匹克思维方式来解决同步学习中的疑难问题，效果较佳，因而受到中上等学生的普遍欢迎。虽然起点较高，但仍兼顾基础知识的巩固和基本技能的培养，也成了成绩一般的学生追赶别人的强有力武器。

面对复杂的问题提出简单有效的解决办法，在这方面，《2 合 1》被认为是最好的专家。

在第二次修订中，对数、理、化、生各册的例题部分突显了“思维方式”栏目，在每章后还增加了“3 + X 拓展园地”栏目；在语文各册中增加了“基础知识拓展”、“名言警句诵记”、“时文精品赏析”等栏目；在英语各册中增加了阅读理解的题量和听力训练。

在本次最新修订中，我们在保持原有特色的基础上，又增设了“学科学法指导”和“漫游学科世界”栏目；在数、理、化、生各册中，增加了“创新综合题”、“创新应用题”、“创新开放题”等新颖题目；英语各册增配了磁带。

相信经过第三次修订的《2 合 1》将更贴近读者，更贴近中高考。因此我们说：

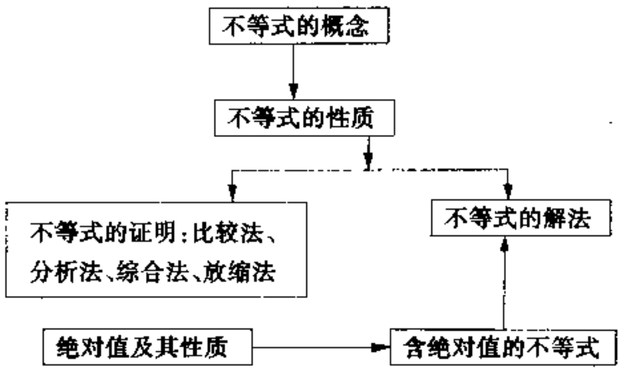
攻克疑难，采用全新理念——奥林匹克思维方式，上名牌大学和重点高中不再难了。

丛书编委会

目 录

第6章 不等式

本章知识框图



6.1 不等式的性质

重点难点指示

(1)比较准则:$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2)基本性质:对称性 $a>b\Leftrightarrow b<a$;传递性 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$;可加性 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$;乘法法则 $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;方根同向性 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$). 它们的三个推论可述为:同向相加性 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;同向正数不等式相乘性 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;方幂同向性 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$).

(3)考试要求:

①根据给定的条件,利用不等式的性质,判断不等式是否成立.

②利用不等式的性质与实数性质、函数性质的结合,进行数值大小的比较.

③判断不等式中条件与结论之间的关系是充分条件或必要条件或充要条件.

(4)注意事项:学习不等式的性质时,要克服“想当然”和“显然成立”的思维定势,要以比较准则和实数的运算法则为依据,以严格的逻辑推理论证完成性质的推导,在此基础上,准确理解每条性质的条件和结论,并与等式的性质进行比较和记忆.

知识规律整理

(1)定理 4 是易懂也易错的一个定理,要搞清不等号的方向改变只与 c 的符号有关,而与 a、b 的符号无关. 而在具体的问题中,还要注意 c 是否为零.

(2)在记忆和使用性质时,要重视使这些性质成立的条件,要区分清楚条件与结论的充要关系,由于所有性质中大部分是单向箭头,因此它们可以直接作为不等式证明的依据,但不能直接作为解不等式的依据.

(3)几个拓展的性质:

①$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$;

②$a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$;

③$a>b>0$ 或 $0>a>b \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

④本节的比较准则也是不等式证明中一个最为基本的也是最重要的基本方法,我们称这种方法为比较法. 就比较法而言,我们又分为“作差”与“作商”两种.

重点问题一　基本性质方面的问题

【范例 1】 判断下列命题是否正确,并说明理由.

(1)$a>b \Rightarrow a-c>b-c$

(2)$a>b, c>d \Leftrightarrow a+c>b+d$

(3)$a>b \Rightarrow ac^2>bc^2$

(4)$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2} \Rightarrow a>b$

(5)$a>b>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(6)$a>b, c>d \Rightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

(7)$a^2>b^2 \Leftrightarrow |a|>|b|$

(8)$\sqrt{a}>\sqrt{b}(a>0, b>0) \Rightarrow a^2>b^2$

解答 (1)命题成立,可由性质 $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$ 直接推出.

思维方式

只需注意不等式的基本性质及每一个定理与推论的条件,以及字母的符号.

(2)命题不成立.因为 $a+c>b+d\Rightarrow a>b,c>d$ 不成立.如 $a=100,c=-1,b=10,d=10$,显然有 $a+c>b+d$,但推不出 $c>d$.

(3)命题不成立.当 $c=0$ 时,有 $ac^2=bc^2$.

(4)命题成立.可由性质 $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc\Rightarrow\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2},c^2>0\Rightarrow a>b$.

(5)命题不成立.其中 $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,可由性质直接推出,而 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a>b>0$ 则不成立,例如:$a=-2,b=2$ 时就不成立.

(6)命题不成立,例如 $a=3,b=2,c=-1,d=-2$ 时就不成立.

(7)命题成立.由性质 $a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$,可直接证得 $a^2>b^2>0\Rightarrow\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}\Rightarrow|a|>|b|$;而由性质 $a>b>0\Rightarrow a^2>b^2$ 可以证得 $|a|>|b|>0\Rightarrow|a|^2>|b|^2\Rightarrow a^2>b^2$.

(8)命题成立.由性质 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ 可直接证得 $\sqrt{a}>\sqrt{b}>0\Rightarrow(\sqrt{a})^4>(\sqrt{b})^4\Rightarrow a^2>b^2$.

点评 关于基本性质方面的问题主要是三类:一类是基本性质,包括互逆性和传递性;一类是与加减运算有关的性质;另一类是与乘、除、乘方、开方运算有关的性质.

类题1 若 a,b 是任意实数,且 $a>b$,则

(A)$a^2>b^2$ (B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$ (D)$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

答案 D

类题2 正数 a,b,c 满足 $a+d=b+c$,$|a-d|<|b-c|$,则 ( )

(A)$ad=bc$ (B)$ad<bc$

(C)$ad>bc$ (D)ad 与 bc 的大小不确定

答案 C

类题 3 若 $a,b\in\mathbf{R}$,下列命题中

①若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$ ②若 $a^2>b^2$,则 $|a|>b$

③若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$ ④若 $a^2>b^2$,则 $a>|b|$

正确的是 ( )

(A)①和③ (B)①和④ (C)②和③ (D)②和④

答案 C

提示 条件 $|a|>b$,不能保证 b 是正数,条件 $a>|b|$ 可保证 a 是正数,故①不正确,③正确,$a^2>b^2\Rightarrow|a|>|b|\geqslant b$,故②正确,但 a 不一定是正数,所以④不正确,故选 C.

【范例 2】 下列各题中,M 是 N 的充要条件的是 ( )

(A)$M:a>b$;$N:ac^2>bc^2$

(B)$M:a>b,c>d$;$N:a-d>b-c$

(C)$M:a>b,c>d(c\neq0,d\neq0)$;$N:\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$

(D)$M:a^2<b^2$;$N:|a|<|b|$

思维方式

利用不等式的性质,逐一对其进行考察,不成立的,找出反例

解答 当 $c=0$ 时,$ac^2>bc^2$ 不成立.

排除 A.在 B 中,令 $a=100$,$b=1$,$d=-80$,$c=0$,此时 $N\not\Rightarrow M$,排除 B.

而 C 中,如 $a=2,b=1,c=-4,d=1$

$\therefore$ $M\Rightarrow N$ 也不成立.但由于 $a^2<b^2\Leftrightarrow|a|^2<|b|^2\Leftrightarrow|a|<|b|$

$\therefore$ 选 D.

类题 若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$,则能成立的不等式是 ( )

(A)$a^2>b^2$ (B)$a+b>2\sqrt{ab}$

(C)$ab<b^2$ (D)$a^2+b^2>|a|+|b|$

答案 C

提示 由已知条件可知 $b<a<0$.

$\therefore$ $(a-b)b<0$,$\therefore$ $ab<b^2$.

【范例 3】 已知 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则下面恒成立的不等式为（　　）

(A) $ab>ac$　　(B) $ac>bc$

(C) $a|b|>|b|\cdot c$　　(D) $a^2>b^2>c^2$

解答　令 $a=9$，$b=8$，$c=-17$. 知，D 不成立，而由于 $\left.\begin{matrix} b>c \\ a>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab>ac$. 所以 A 成立，故选 A.

思 维 方 式

由已知可得 $a>0$，$c<0$，而 b 有可能是零，故 B、C 不成立. 至于 D 可用特殊值验证.

【范例 4】 设 $-2<a<7$，$1<b<2$，求 $a+b$，$a-b$，$\frac{a}{b}$ 的范围.

解答　由同向不等式相加得：$-1<a+b<9$. 又 $\because -2<-b<-1$，同理 $-4<a-b<6$. 由 $1<b<2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{b}<1$.

当 $0\leqslant a<7$ 时，$0\leqslant\frac{a}{b}<7$

当 $-2<a<0$ 时，$0<-a<2 \Rightarrow 0<\frac{(-a)}{b}<4$

$\therefore\ 0<-\frac{a}{b}<4 \Rightarrow -4<\frac{a}{b}<0$

故　$-4<\frac{a}{b}<7$.

思 维 方 式

对于 $a-b$，我们先求出 $-2<-b<-1$，然后利用同向不等式相加保持同向的性质. 对于 $\frac{a}{b}$，可分 $0\leqslant a<7$ 与 $-2\leqslant a<0$ 的两种情况讨论. 特别是后者，可先求出 $\frac{(-a)}{b}$ 的范围.

类题　设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，那么 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的范围是（　　）

(A) $\left(0,\frac{5}{6}\pi\right)$　　(B) $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

(C) $(0,\pi)$　　(D) $\left(-\frac{\pi}{6},\pi\right)$

答案　D

重点问题二　比较准则的简单应用

【范例 5】 设 $x>0, a>0, a\neq 1$，试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

思维方式

(1)取绝对值作差，(2)作商

解法 1 依题设可知 $0<x<1$

$\because \quad |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\left|\dfrac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\dfrac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|=\dfrac{|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$

$=\dfrac{-\lg(1-x)-\lg(1+x)}{|\lg a|}=-\dfrac{\lg(1-x^2)}{|\lg a|}>0$

$\therefore \quad |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法 2 由已知可知 $0<x<1$

又 $\because \dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\dfrac{|\lg(1-x)|}{|\lg(1+x)|}$

$=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)$（$\because \quad 1+x>1, 1-x<1$）

$=\log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}=\log_{(1+x)}\dfrac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$

$\therefore \quad |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

类题 若 $0<a<b<1$，则 $a^b, \log_{\frac{1}{a}}b, \log_b a$ 的大小关系是 （　　）

(A) $\log_{\frac{1}{a}}b<a^b<\log_b a$

(B) $\log_{\frac{1}{a}}b<\log_b a<a^b$

(C) $\log_b a<\log_{\frac{1}{a}}b<a^b$

(D) $a^b<\log_{\frac{1}{a}}b<\log_b a$

答案 A

提示 $\log_{\frac{1}{a}}b<\log_{\frac{1}{a}}1=0<a^b<a^0=\log_b b<\log_b a$.

【范例 6】 求证：$\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}>\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}$ $(n\in \mathbf{N})$.

证明 由于

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}>\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}}_{n\text{个}}-\frac{n}{n+1}=0$$

$$\therefore\quad \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}>\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}.$$

思维方式

变形作差.

类题 设 $x,y,z\in\mathbf{R},a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,求证:

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

证明 注意到当 $x,y,z\in\mathbf{R},a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$ 时,

$$\frac{b}{a}x^2+\frac{a}{b}y^2-2xy=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{b}}y\right)^2.$$

$$\therefore\quad \frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2-2(xy+yz+zx)$$

$$=\left(\frac{b}{a}x^2+\frac{a}{b}y^2-2xy\right)+\left(\frac{c}{b}y^2+\frac{b}{c}z^2-2yz\right)+\left(\frac{a}{c}z^2+\frac{c}{a}x^2-2zx\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{b}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}y-\sqrt{\frac{b}{c}}z\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}z-\sqrt{\frac{c}{a}}x\right)^2$$

故原不等式得证.

基础训练

一、选择题

1. 下列命题正确的是 ( )

(A) $ax>b$,则 $x>\frac{b}{a}$ (B) $a^2x>a^2y$,则 $x>y$

(C) $\frac{x}{y}>\frac{u}{v}$,则 $vx>uy$ (D) $a>b,c<d,abcd\neq0$,则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

2. 若 $ab\geqslant4$,则对 $M=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 有 ( )

(A) $M\geqslant4$ (B) $M\geqslant2$ (C) $M>4$ (D) $M>2$

3. 若 $a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是 ( )

(A) $ab>a^2$ (B) $|a|>|b|$ (C) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ (D) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

4. 若 $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是 ( )

(A) $-2<\alpha-\beta<0$ (B) $-2<\alpha-\beta<-1$

(C) $-1<\alpha-\beta<0$ (D) $-1<\alpha-\beta<1$

5. 已知 $a<0$, $-1<b<0$,那么下列不等式成立的是 ( )

(A) $a>ab>ab^2$ (B) $ab^2>ab>a$ (C) $ab>a>ab^2$ (D) $ab>ab^2>a$

6. 若 x,y,z 均为大于 -1 的负数,则一定有 ( )

(A) $x^2-y^2-z^2<0$ (B) $xyz>-1$ (C) $x+y+z<-3$ (D) $(xyz)^2>1$

二、填空题

7. 设 $x>1$, $-1<y<0$,试将 $x, y, -y, -xy$ 按由小到大的顺序排列起来________.

8. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a<c<b$,则 c^2+ab 与 $(a+b)c$ 的大小关系是________.

9. 设 $a>b>0$, $m>0$, $n>0$,则 $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b+m}{a+m}$, $\frac{a+n}{b+n}$ 之间的大小顺序关系是________.

10. 已知 $6<a<10$,那么 $\frac{a-1}{a}$ 的取值范围是________.

11. 已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,那么 $\alpha-\beta$ 的取值范围是________.

12. 若 $x>0$,且 $x\neq1$, $p,q\in\mathbf{N}^*$,则 $1+x^{p+q}$ 与 x^p+x^q 的大小关系为________.

13. 已知 $-1<2a<0$, $A=1+a^2$, $B=1-a$, $C=\frac{1}{1+a}$, $D=\frac{1}{1-a}$,那么 A,B,C,D 按从小到大的顺序排列应是________.

三、解答题

14. 设 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$,求证 $a>b$.

15. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a\neq b$,试比较 $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

16. 设 $a>b$, $c>d$, a,b,c,d 中至少有三个同号,试比较 ac 和 bd 的大小.

17. 已知 $a>b>c>d>0$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,求证 $a+d>b+c$.

18. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过原点,且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant2$, $2\leqslant f(1)\leqslant4$,求 $f(-2)$ 的取值范围.

19. 已知 a,b,c 为实数,证明 a,b,c 均为正数的充要条件是 $\begin{cases}a+b+c>0\\ab+bc+ca>0\\abc>0\end{cases}$.

20. 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $(x_1\neq x_2)$,试比较 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 与 $|x_1-x_2|$ 的大小.

21. 若 $0<x<\pi$, $0<y<\pi$,求证 $\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)\leqslant\sin\frac{x+y}{2}$.

答案：1. B 2. B 3. C 4. A 5. D 6. B 7. $y<-y<-xy<x$ 8. $c^2+ab<(a+b)c$ 9. $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$ 10. $\frac{5}{6}<\frac{a-1}{a}<\frac{9}{10}$ 11. $-\pi\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$

12. $1+x^{p+q}>x^p+x^q$

提示：$1+x^{p+q}-(x^p+x^q)$

$=1+x^p\cdot x^q-(x^p+x^q)=(1-x^p)(1-x^q)$

13. D,A,B,C 15. $\left(\frac{a^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$

提示：作差

18. $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$ 20. $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$

全解：14. 证明：(1)当 $b>0$ 时，则不等式两边均为正，

$\therefore\ (\sqrt[3]{a})^3>(\sqrt[3]{b})^3\Rightarrow a>b$.

(2)当 $b=0$ 时，由 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$ 可得 $a>0$，$\therefore\ a>b$.

(3) $b<0$ 时，①$a\geqslant 0$，则 $a\geqslant b$；②$a<0$，这时 $0>\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}\Rightarrow 0<-\sqrt[3]{a}<-\sqrt[3]{b}$

$\therefore\ (-\sqrt[3]{a})^3<(-\sqrt[3]{b})^3$，即 $-a<-b$，$\therefore a>b$.

15. 解：$\because\ \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}>0$

$\therefore\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

16 分析：设 a,b,c,d 中至少有三个为正数，若全为正数，则 $ac>bd$；若只有三个为正数，则 $ac>0$，$bd<0$ 也有 $ac>bd$，如果 a,b,c,d 中至少有三个为负，若全为负数，则 $-b>-a>0$，$-d>-c>0$，$bd>ac$，若只有三个为负数，则 $ac<0$，$bd>0$，也有 $bd>ac$.

18. 解：设 $f(-2)=Af(-1)+Bf(1)\Rightarrow 4a-2b=A(a-b)+B(a+b)$

$\therefore\ \begin{cases}A+B=4\\-A+B=-2\end{cases}$ 解得 $A=3,B=1$

即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$

$\because\ 1\leqslant f(-1)\leqslant 2,\ 2\leqslant f(1)\leqslant 4$

$\therefore\ 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$

即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

19. 证明：必要性显然成立. 反之，以 a,b,c 为实根作三次方程 $(x-a)(x-b)\cdot(x-c)=0$，即 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$，当 $x\leqslant 0$ 时，左边恒为负数，故方程只有正根，得 a,b,c 均为正数.