

高等学校試用教科書

起重運輸机結構力学

上海交通大学起重運輸机械教研組編著

只限学校內部使用

中国工业出版社

本书系根据高等学校起重运输机械专业的教学大纲编写的。主要内容
包括：杆件结构、钣、薄壁杆件结构的静力及稳定计算理论。

本书可作为高等学校起重运输机械专业“起重运输机结构力学”课程的
教材，亦可供工程技术人员和相近专业的学生参考。

起重运输机结构力学

上海交通大学起重运输机械教研组编著

*

第一机械工业部教材编审委员会编辑（北京复兴门外三里河第一机械工业部）

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路丙10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $22 \frac{1}{2}$ · 字数 504,000

1962年7月北京第一版·1962年7月北京第一次印刷

印数 0,001—1,320 · 定价 (10-5) 2.65 元

*

统一书号：K15165 · 1431(一机-274)

前 言

今年四月初，在上海召开了起重运输机械专业的教材会议。共同讨论和商定了本课程的教学大纲，并确定由我校在原有讲义的基础上改编为试用教材。本书就是根据这个教学大纲的内容进行编写的。

本书内容包括：杆件结构、钣、薄壁杆件结构的静力及稳定计算理论。希望学生学习以后，能在结构计算理论方面具有比较坚实而宽广的理论基础和计算能力，以解决起重运输机械中结构的计算问题。

本书主要作为高等学校起重运输机械专业“起重运输机结构力学”课程的教材，但亦可供工程技术人员和相近专业学生参考。

本书编写由下列同志分工担任的：范祖尧（第九、十、十一、十二、十三章）、周国梁（第二、三、四、五章）、黄秉刚（绪论、第七、八章）、孙可全（第六章）、郁永熙（第一章）。初稿写出后，由范祖尧、孙可全、黄秉刚等分工审阅，范祖尧担任总校。

本书编写因限于时间和编写人的水平，内容不妥和疏漏之处在所难免。我们希望各兄弟学校在教学实践中提出改进意见，以便在再版时加以改正。

上海交通大学起重运输机械教研组

1961年5月上海

前 言

今年四月初，在上海召开了起重运输机械专业的教材会议。共同讨论和商定了本课程的教学大纲，并确定由我校在原有讲义的基础上改编为试用教材。本书就是根据这个教学大纲的内容进行编写的。

本书内容包括：杆件结构、钣、薄壁杆件结构的静力及稳定计算理论。希望学生学习以后，能在结构计算理论方面具有比较坚实而宽广的理论基础和计算能力，以解决起重运输机械中结构的计算问题。

本书主要作为高等学校起重运输机械专业“起重运输机结构力学”课程的教材，但亦可供工程技术人员和相近专业学生参考。

本书编写由下列同志分工担任的：范祖尧（第九、十、十一、十二、十三章）、周国梁（第二、三、四、五章）、黄秉刚（绪论、第七、八章）、孙可全（第六章）、郁永熙（第一章）。初稿写出后，由范祖尧、孙可全、黄秉刚等分工审阅，范祖尧担任总校。

本书编写因限于时间和编写人的水平，内容不妥和疏漏之处在所难免。我们希望各兄弟学校在教学实践中提出改进意见，以便在再版时加以改正。

上海交通大学起重运输机械教研组

1961年5月上海

目次

前言	1	§ 4-5 温度变化与支承沉陷对超静定结构的影响	103
緒論	5	§ 4-6 用力法計算超静定桁架及桁构梁	105
第一章 平面桁架	11	§ 4-7 简单超静定结构的影响綫	109
§ 1-1 一般概念	11	§ 4-8 变位法	114
§ 1-2 桁架分类	12	§ 4-9 弯矩分配法	123
§ 1-3 桁架的机动分析	13	§ 4-10 迭代法	142
§ 1-4 平面桁架的内力分析	17	第五章 空間桁架	154
§ 1-5 組合桁架的内力分析	27	§ 5-1 一般概念	154
第二章 影响綫	30	§ 5-2 空間桁架的一般解法(分解空間桁架为平面桁架的方法)	158
§ 2-1 一般概念	30	§ 5-3 用拉力系数法分析空間桁架	158
§ 2-2 靜力法繪制反力和内力影响綫	32	§ 5-4 空間桁架受扭計算的基本概念 和 其应用	162
§ 2-3 机动法繪制影响綫	36	§ 5-5 混合式門架结构的受扭計算	167
§ 2-4 节点载荷情况下的影响綫	38	§ 5-6 空間臂架结构受扭計算	171
§ 2-5 桁架杆件的内力影响綫	39	§ 5-7 空間桁架结构受扭計算	173
§ 2-6 組合桁架杆件的内力影响綫	53	§ 5-8 载荷作用在下弦的空間桁架 结构受扭計算	176
§ 2-7 载荷的最不利位置	53	第六章 结构的彈性稳定性	179
§ 2-8 广义影响綫(最大内力分布图)	56	§ 6-1 一般概念	179
§ 2-9 利用广义影响綫求桁架杆件最大内力	60	§ 6-2 确定临界力的方法	179
§ 2-10 变位影响綫	62	§ 6-3 变截面杆件的稳定性	181
第三章 结构变位	65	§ 6-4 切力对临界力的影响	183
§ 3-1 概論	65	§ 6-5 組合杆件的稳定性	184
§ 3-2 外力的功	65	§ 6-6 在彈性介质上的杆件稳定性	185
§ 3-3 内力的功	66	§ 6-7 开式桁架上弦杆的稳定性	186
§ 3-4 可能功	71	第七章 鈹的弯曲	188
§ 3-5 功的互等定理	72	§ 7-1 彈性理論基本知識	188
§ 3-6 变位的互等定理	73	§ 7-2 鈹的定义及类别	193
§ 3-7 变位公式	74	§ 7-3 鈹的基本假設及推論	194
§ 3-8 維力沙金图乘法	77	§ 7-4 鈹弯曲的基本方程式——彈性曲面微分方程式	195
§ 3-9 温度变位	79	§ 7-5 鈹的内力及应力的公式	197
§ 3-10 靜定结构由于支座沉陷引起的变位	80	§ 7-6 边界条件	201
第四章 超静定结构	82	§ 7-7 沿边界鉸支承矩形鈹的計算	202
§ 4-1 一般概念	82		
§ 4-2 力法的基本原理	85		
§ 4-3 力法計算的簡化方法	88		
§ 4-4 超静定剛架内力图的校核	100		

§ 7-8 板在横向及纵向力共同作用下的弯曲	206	§ 10-1 概述	292
§ 7-9 圆形板的弯曲	207	§ 10-2 变形与位移	292
第八章 板的稳定	213	§ 10-3 约束扭转法向应力 (扇性法向应力)	295
§ 8-1 一般概念	213	§ 10-4 约束扭转的切应力	296
§ 8-2 板受弯时的应变能及求解临界载荷的主要方法	213	§ 10-5 扭心及主零点位置的确定, 主扇性面积图的绘制, 扇性特征的计算	298
§ 8-3 四用简支矩形板受均匀压力时的稳定性	219	§ 10-6 闭口截面扭转角微分方程式	303
§ 8-4 两边为简支, 另外两边为任意支承的矩形板均匀受压时的稳定性	222	第十一章 薄壁杆件的空间稳定性	310
§ 8-5 在弯曲与压缩联合作用下简支矩形板的稳定性	226	§ 11-1 概述	310
§ 8-6 在切应力作用下的矩形板的稳定性	229	§ 11-2 开口截面薄壁杆件中心受压的稳定性	311
§ 8-7 板在切应力与拉压应力联合作用下的稳定性	233	§ 11-3 闭口截面薄壁杆件中心受压的稳定性	323
§ 8-8 用加劲杆加强的板的稳定性	234	§ 11-4 开口截面薄壁杆件偏心受压的稳定性	325
第九章 开口截面薄壁杆件计算理论	242	§ 11-5 闭口截面薄壁杆件偏心受压的稳定性	327
§ 9-1 薄壁杆件定义	242	第十二章 薄壁杆件的变位计算	329
§ 9-2 自由扭转与约束扭转的概念	243	§ 12-1 概述	329
§ 9-3 约束扭转的截面应力	246	§ 12-2 变位一般公式	329
§ 9-4 变形假设	247	§ 12-3 变位简化公式	334
§ 9-5 变形与位移	243	第十三章 薄壁杆件结构计算	340
§ 9-6 约束扭转法向应力 (扇性法向应力)	250	§ 13-1 概述	340
§ 9-7 约束扭转的切应力	258	§ 13-2 按力法计算薄壁刚架	342
§ 9-8 扭心及主零点位置的确定, 主扇性面积图的绘制, 扇性特征计算	262	§ 13-3 力法计算举例	344
§ 9-9 开口截面扭转角微分方程式	277	§ 13-4 按变位法计算薄壁刚架	347
§ 9-10 薄壁杆件应力计算	285	§ 13-5 反力系数和自由项的确定	350
§ 9-11 约束扭转与弯曲理论的比较	289	§ 13-6 刚架计算举例	355
第十章 闭口截面薄壁杆件计算理论	292	附录	357
		参考文献	360

緒 論

1 研究的对象和任务

自从十九世紀末出現了电动起重机以后，随着生产的不断向前发展，起重运输机的設計制造水平不断提高，各种新型結構起重运输机的出現，使起重运输机結構力学在本世紀初就逐渐独立成为結構力学的一个重要分支。

結構力学的各个分支是由于对所研究結構物的对象不同而形成的。例如随着船舶制造业，飞机制造业等的发展，在結構力学的分支中，先后出現了船舶結構力学及飞机結構力学等。不同的結構力学分支的研究对象是不同的。起重运输机結構力学的研究对象主要是起重运输机中的結構計算理論問題。

工程技术中所指的結構是由許多单元件（杆件、板或壳等）所組成的用以承受各种载荷的整体。例如在图 1 中所示的桥式起重机的桥架結構，是由两根主梁和两根端梁所組成的，而主梁或端梁的本身，也可以說是由板組成的結構；图 2 所示的为定柱塔式起重机的結構，它的塔柱和臂架等都是由許多杆件組成的整体。这些結構形成了置放机构的骨架，

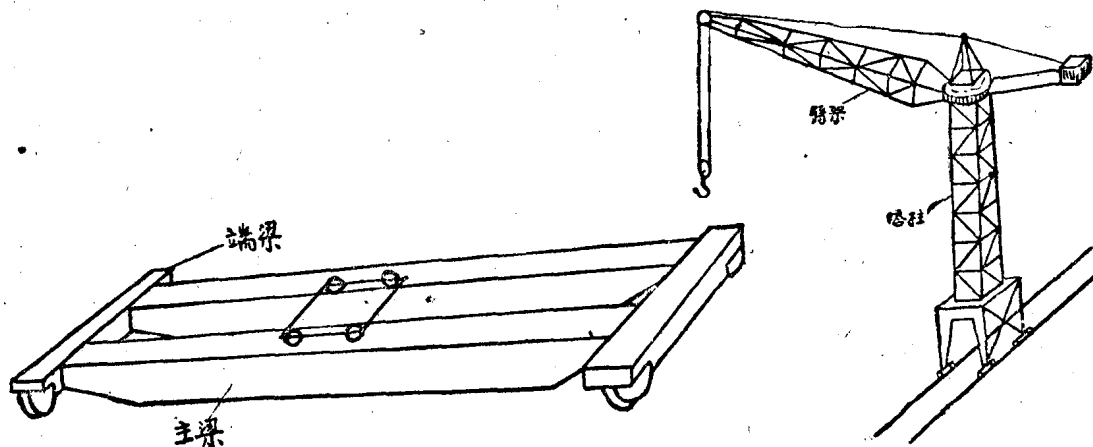


图 1

图 2

并将由貨載、結構自重及風力等所形成的载荷傳到基础或起重机的支承部分上。同时在起重运输机中，金屬結構部分所需鋼材很多，例如：一般的电动桥式起重机金屬結構的总重，几倍于机构的自重，而巨型装卸桥的自重則可能超过一千吨以上，其中 80~85% 是金屬結構的重量。由此可見，結構是整个起重机中很重要的組成部分之一，而且大多数起重机都是一种移动的结构，應該力求減輕它的自重，因而，如何在安全条件下貫徹節約的原則，做到又好又省，那就必須充分运用結構力学的理論知識，对起重运输机的金屬結構进行科学的分析和精确的計算，从而作出合理的設計。研究起重运输机結構力学正是解决起重运输工程中結構的計算理論問題。

虽然結構力学的各个分支所研究的对象有所不同，但是它們的任务都是研究关于結構

在各种载荷作用下和工作条件下的强度、稳定性和刚度的计算理论。

研究结构的强度和稳定性，目的是要保证它们具有足够但非过分的坚固性，以符合安全与经济的双重要求。计算结构的刚度，其目的是保证它们不发生过大变形和振动，以满足使用可靠的条件。这不仅在设计新的结构时，而且对于已有的结构，如果可能承受新的、过去所没有考虑到的载荷时，也需要加以验算，以判断是否需要加固。

结构力学与材料力学、弹性力学及塑性力学都有密切的联系，一般说来，材料力学和结构力学的区别在于：前者所讨论的对象是单个的杆件，而后者所讨论的是由若干杆件所组成的结构，亦称杆件结构。这两门学科相同之处在于都是应用比较简单的数学方法来解答问题。相反，在弹性力学中分析同样的问题时，则力求精确，同时需解决材料力学所不能解决的问题，因此，不得不运用比较复杂的数学方法来解答问题。近年来，由于工程技术的进一步发展，出现了许多新的结构元件如板、壳和薄壁杆件以及空间结构，相应地扩大和深化了结构力学的研究范围，由于板、壳和薄壁杆件以及空间结构理论的发展，使材料力学、结构力学和弹性力学之间的界限，已经变得不容易区分了。至于塑性力学，是研究塑性或半塑性物体内的应力和变形的学科。毫无疑问，随着工程技术的发展，这一学科的理论将被大大地提高。

2 发展简史

“自然辩证法”一书中指出：“科学的发生与发展从开始起便是由生产所决定的。”^①在十七世纪中叶，意大利科学家伽利略（G. galileo）就开始研究了梁的弯曲问题，这标志着“材料力学”的肇始。但是“结构力学”从力学中划分出来成为独立的学科，还是在十九世纪前半期的事。这主要是由于资本主义社会商业发展，需要进行许多建设工作，包括铁路、桥梁和工厂等建筑，因而促进了这门学科的发展。同时，为了资本主义商业贸易的迫切需要，要求迅速发展造船工业，研究船舶结构的结构力学，也逐渐形成新的分支而独立出来，被称为“船舶结构力学”。以后是飞机、起重机和车辆等机器制造业，因为生产的发展和技术水平的提高，也逐步形成相应的结构力学分支，结构力学的应用范围大大地扩充了。各个分支随着生产的发展而不断丰富本身的内容，从而也大大地推进了结构力学的发展。

概括说来，十九世纪末到廿世纪初期，约半个多世纪中，结构力学主要是研究梁、拱和桁架的计算理论。在本世纪廿年代至卅年代，比较集中地研究了刚架计算理论。而在最近年代里，已经完成了板和壳的理论，薄壁杆件和空间结构等计算理论的创立工作。所有上述研究成果的取得，在很大程度上决定于建筑、飞机、造船以及各种机器制造业的迫切需要。苏联的力学家对结构力学的发展有很大的贡献，像拉宾诺维奇（И. М. Рабинович）、迦辽尔金（Б. Г. Галеркин）、伏拉索夫（В. З. Власов）以及乌曼斯基（А. А. Уманский）等学者的工作，都是有很重大意义的。结构力学的发展，使设计者有可能通过计算，作出更合理的设计，作出安全而又经济、坚固而又轻巧美观、能满足各种使用要求的结构。这样，结构力学也就反过来大大促进生产向前发展。

应该指出，随着工程技术的不断向前发展，结构力学今后发展的基本方向，将是研究

● 恩格斯著“自然辩证法”人民出版社1956年版，第149页。

新的材料和在新的工作条件下的结构强度、稳定性及刚度。例如,在弹性范围以外工作时、在大变形情况时(直到破坏)、在高温作用和蠕变变形下、在动力载荷作用下等等的结构计算理论,以及在液流和气流中相互作用下的结构理论等。

由于起重运输机的工作条件、作用载荷、结构形式等具备本身的特点,在计算理论方面提出一些相应的要求,因此发展历史最久的建筑力学的内容,已不能适应现代起重运输机的要求。起重机的结构力学在本世纪廿年代就形成了独立分支,其中较系统而完整的有德国安德烈(W. Ludwig Andree)著“起重机静力学”。在苏联,由于社会主义建设发展的需要,起重运输机制造业也迅速向前发展,在1944年出版了鲍古斯拉夫斯基(П. Е. Богуславский)著的“起重机金属结构的结构力学”一书。我国在解放以后,在党的领导下,迅速地建立了起重运输机制造业,以满足社会主义建设事业各方面发展的需要,从一九五八年以来,随着我国国民经济的持续跃进,起重运输机制造业也取得了很大的发展。近代起重运输机结构在满足生产使用要求的前提下,必须力求减轻重量,节省钢材,增加刚度,因此不断地出现各种新型的结构。这样,起重运输机结构力学必须进行重大的改革,增加新的内容,如空间结构,薄板及薄壁杆件结构等计算理论。

起重运输机结构力学建立还不到半个世纪,它是结构力学中一个年轻的分支,为了满足经济建设的需要,起重运输机制造业必然不断提高和发展。毫无疑问,这将大大促进本门学科内容的更新、丰富和更进一步地充实、提高。

3 结构分类、支座及计算简图

结构的分类方法很多。主要是按组成结构的单元体形状,杆件连接的情况以及外载荷与结构在空间的相互位置等三种方法来分。现分述如下:

(1) 按单元体形状可分为下列三类:

A. 杆件结构(或称杆系结构)

这种结构是由许多杆件组合而成,而每一杆件的特点,是高宽小,长度大的单元体,如图3所示。

B. 薄壁结构

这种结构单元体的特点,是宽度长度很大,而厚度很小,如薄板、薄壳及薄壁杆件。薄壁杆件,如图4所示。

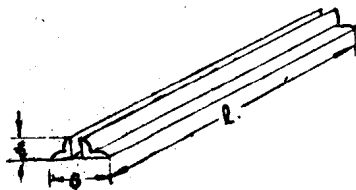


图 3

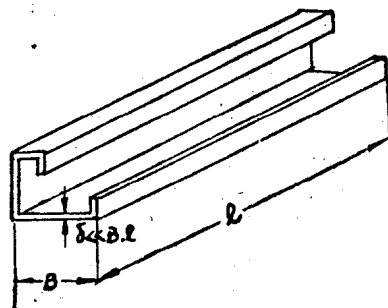


图 4

C. 实体结构

这种结构的主要特点是，长宽高三者为同级量度的结构，例如建筑物的地基，河流上的堤坝等。

(2) 按杆件连接的情况，也可分为三类：

A. 铰接结构

两个或多个杆件相连接的点称为节点。结构中所有节点都是铰接的，则称为铰接结构，如图 5a 所示的桁架结构。

B. 刚接结构

结构的节点都是刚接的，交于节点处的杆件，不能有相对位移，也不能发生相对转动，如图 5b 所示的刚架结构。

C. 混合结构

结构的节点既有铰接，也有刚接的，如图 5c 所示的称为桁构梁的结构。

(3) 按外载荷与结构在空间相互位置，可分两类：

A. 平面结构

当作用载荷和结构的所有组成杆件的轴线均在同一平面内时，也就是说，结构的分析计算是按照平面力系来进行的，则为平面结构，例如图 5a 所示者属于平面结构。

B. 空间结构

当作用载荷和结构的组成杆件的轴线不在同一平面内时，也就是说，结构的分析计算要按空间力系来进行，则称空间结构。图 6a 所示为一空间门架结构，图 6b 为一空间刚架结构，作用力 P 和结构平面相垂直。

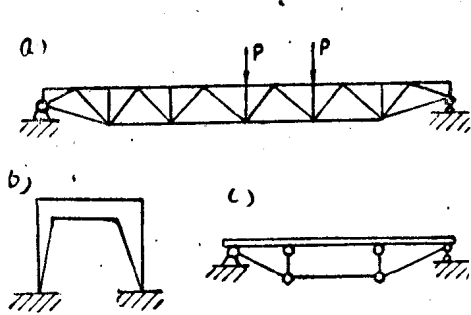


图 5

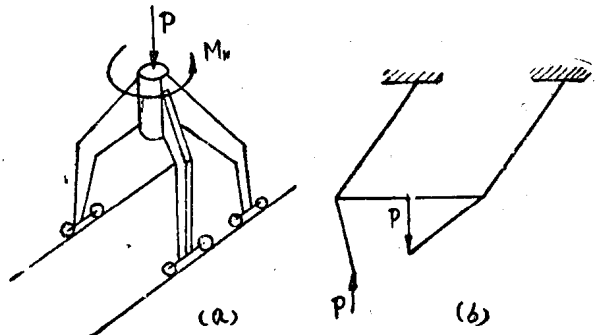


图 6

任何结构都必须设置适当的支座，以保持其稳定，并把作用在结构上的载荷传递到支承部分上去。凡将一个结构连接到支承的部分称为支座，常用的支座一般可分为三类：

(1) 活动铰支座 (简称活动铰支)

如图 7a 为活动铰支座，它可以使结构绕铰转动，也可以沿支承的支承面上移动。图 7b 为其简图。它只有一个沿 AB 支承链杆方向的反力。

(2) 固定铰支座 (简称固定铰支)

如图 8a 所示，其下铰臂是固定而不能移动的，它只能绕铰转动。图 8b 及 c 为计算简图，其反力必须是通过铰点 A 而方向未定。图 9 所示为一重型金属柱下支承，它是固定铰支的一例。图 2 中塔式起重机的臂架支承亦为固定铰支座。

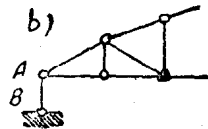
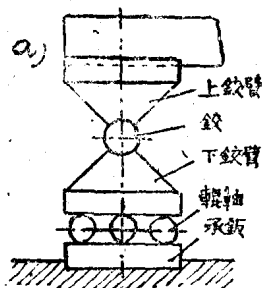


图 7

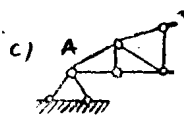
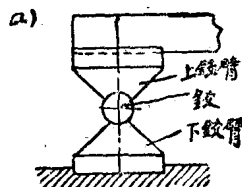


图 8

(3) 固定支座

图 10a 所示为一常见的固定支座，它不容许有任何的移动和转动，未知反力为一个弯矩和一个大小和方向未定的力。支承简图示于图 10b、c。

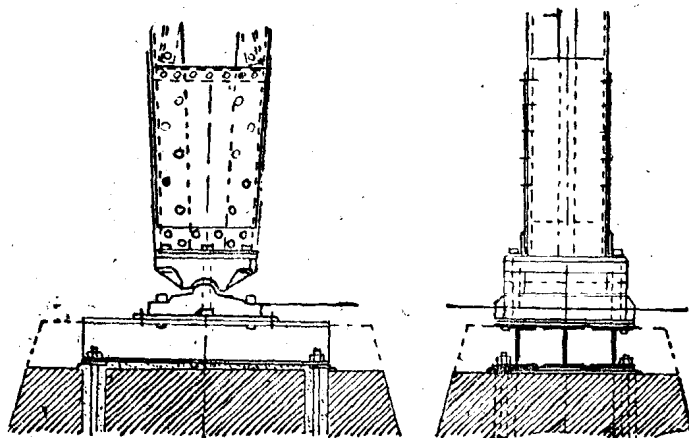


图 9

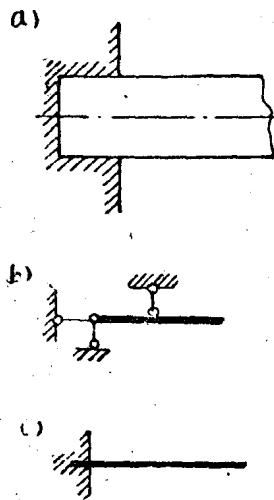


图 10

图 11 所示为一重型柱子的下支承的一例。图 2 中塔式起重机的塔柱支承就是这种形式的支座。

在计算结构物中的内力或应力时，我们常用一种理想的计算简图来代表实际的结构物。这种简化必须满足下列要求：即计算简图应尽量接近实际情况，且应使计算时尽量简化。如图 12a 所示的是一四架式桥式起重机桥架，而图 b 则为其计算简图。桁架的每一杆件，都以代表其几何轴线的直线替代，所有的轴线，都认为完全在同一平面内。组成桁架节点各杆件，认为都严格地会集于节点中心。各杆件相互连接，都假定为理想铰接。右方的固定铰支和左方的活动铰支都认为是理想的铰接点，摩擦阻力被完全忽略不计。采取所有

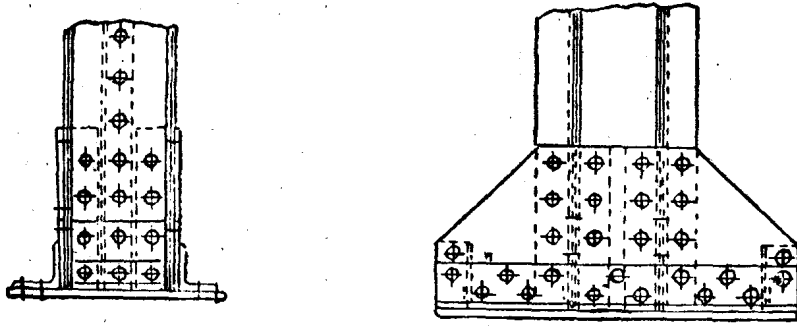


图 11

这些假定，就构成了图 12 b 上桥架的计算简图。

如果放弃这些简化办法中的任一部分，或代以比较仔细的简化办法，则可得到比较精确的计算简图，可是这样就使整个计算要复杂得多了。

各种不同的结构可以选定适合于各自特点的计算简图。

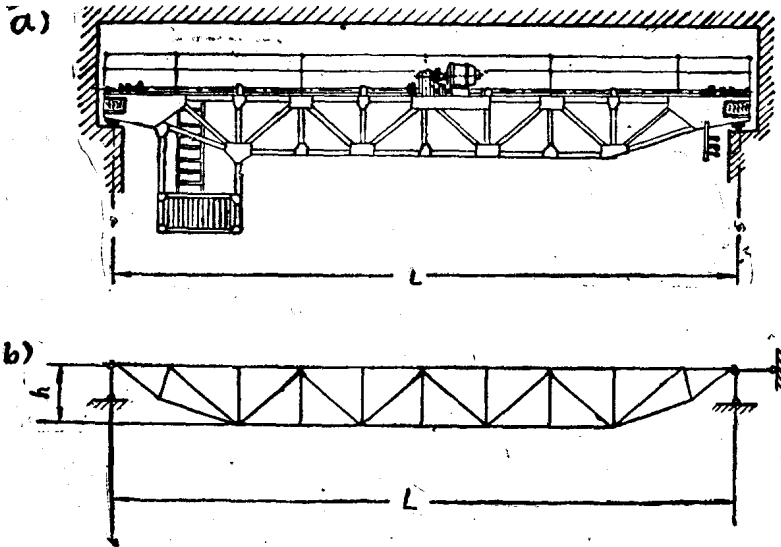


图 12

4 载荷分类

作用在结构上的载荷，按其性质可以作不同的分类。如果按它们在结构上分布情况来分类，可分为：

(1) 集中载荷：如轮压。

(2) 均布载荷：如自重。它又可分为均布载荷和非均布载荷两种。

如果按载荷作用随时间变化的情况来分类，可以分为：

(1) 静载荷：载荷的位置、大小和方向不随时间的变化而改变的。

(2) 动载荷：载荷的位置、大小和方向之一随时间的变化而改变的。如桥式起重机的小车轮压。

应该指出，除了作用外载荷会使结构产生内力以外，在超静定结构中，其它因素也会引起结构内力，如温度变化、支座沉陷、预加拉力等。

第一章 平面桁架

§ 1-1 一般概念

在理論計算中，桁架是指由許多杆件所組成的幾何不變形的平面結構(圖1-1a)，各杆件認為是用光滑而無摩擦的鉸相連接，所有各杆件的軸綫都通過鉸的幾何中心，而載荷則僅作用於各節點上，因此所有的杆件均只產生軸向內力(拉力或壓力)。

實際上極少會遇到這樣理想的桁架。通常在起重運輸機金屬結構中，桁架中的節點是鉚接的或是鉚接的剛性節點(圖1-2a, b)。

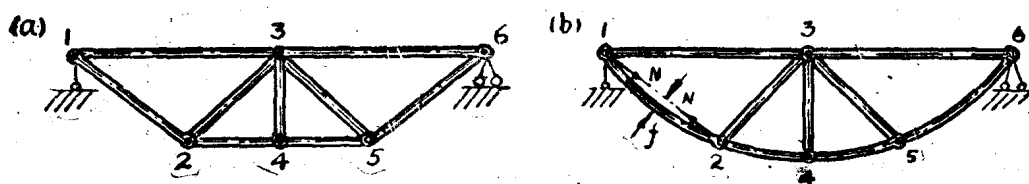


圖 1-1

在理想的桁架中，由於節點是由光滑而無摩擦的鉸連接而成，根據力的平衡條件，作用在杆件兩端的力必須在同一直綫上且通過杆軸中心綫，若杆件為曲綫形時，則杆件除承受軸向力 N 外，將同時受到 N 力偏心所產生的彎曲作用，其彎矩 $M = N \cdot f$ (圖1-1b)。因此，一般我們應盡量採用平直的杆件。

在實際的桁架中，由於剛性節點的影響，杆件不但承受軸向力，且受到附加的彎曲作用，因而將引起附加彎曲應力。這種附加應力的大小決定於杆件的剛度，杆件剛度越小，則這種附加應力越小。根據實驗和理論分析證明，當桁架平面內杆件截面高度 h 與杆件長度 l 的比值 $\frac{h}{l}$ 小於 $\frac{1}{10}$ 時，這種附加應力與杆件的基本軸向力所引起的應力相比是很小的，故可略去不計。

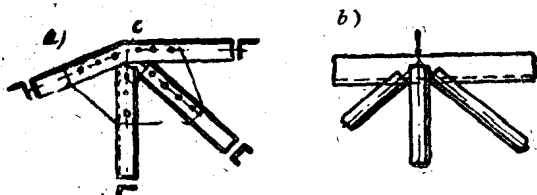


圖 1-2

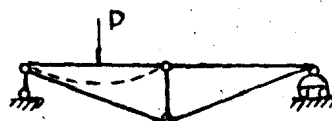


圖 1-3

在實際應用中，如果載荷作用於杆件的中間(即節點以外的載荷)，則先把載荷分解，使作用於鄰近的節點上，桁架分析完了時，再來計算載荷作用的杆件由於局部彎曲所產生的附加彎曲應力(圖1-3)。

§ 1-2 桁架分类

桁架具有各种不同的外形, 构成桁架上下两边周界的杆件称为弦杆, 位于上部的弦杆称上弦杆 (图 1-4a 中以 O 表示), 位于下部的称下弦杆 (以 u 表示)。连接桁架上下弦杆的杆件称为腹杆。坚直的腹杆称竖杆 (以 V 表示), 倾斜的腹杆称斜杆 (以 D 表示)。任一弦杆上相邻两节点间的距离称为节间长度 (以 λ 表示)。上下弦杆上相对两节点间的距离称为桁架高度 (以 h 表示)。

桁架的分类是按照它的若干特征来进行的。

1. 按照外形可分为平行弦桁架 (图 1-4a), 曲弦桁架 (图 1-4b), 及三角形桁架 (图 1-4c)。曲弦桁架中的杆件仍是平直的, 只是各节点位于一曲线上, 形成曲弦。

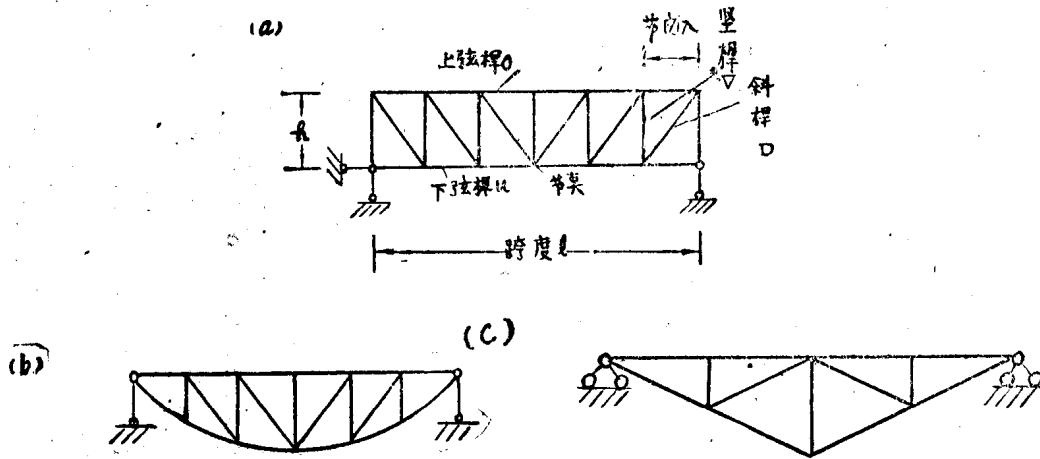


图 1-4

2. 按照腹杆系统可分为斜杆式 (图 1-5a), 三角形式 (图 1-5b), 单斜杆式 (图 1-5c), 多斜杆式 (图 1-5d), 多重腹杆式 (图 1-5e) 及再分式桁架 (图 1-5f) 等。

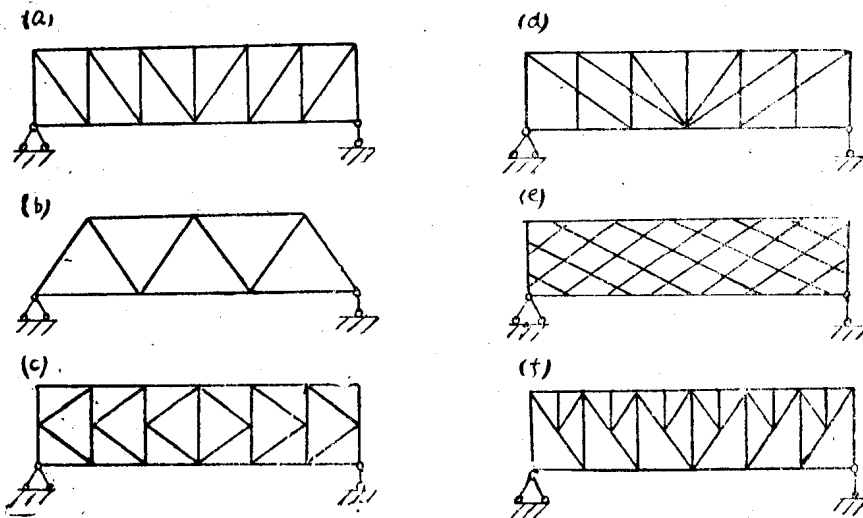


图 1-5

§ 1-3 桁架的机动分析

1. 机动分析的目的

任何杆件结构在外力作用下，总是要发生一些变形的，但杆件中所产生的变形（拉伸、压缩或弯曲等）较各该杆件原有的尺寸是很小的，所以这种变形并不致影响结构几何形状改变，这类结构属于几何不变形的结构，或称为几何稳定的结构。如果结构在很小外力作用下，由于结构本身组成不够完善，在杆件发生变形之前，就产生极大的形状改变，而不能维持原有的几何外形，这类结构属于几何可变形的结构，或称为几何不稳定的结构。此外，不但结构本身的组织是几何不变形的，同时它与支承部分的联系也需要是几何稳定的，这样才能承受外载荷的作用。前者的内部组织的几何不变性亦称为结构的内部稳定性；而后者则属于结构的外部稳定性。这种几何不变性或几何稳定性是结构承担载荷的必备条件之一。关于结构的这种几何不变性的研究称为机动分析。根据使用要求，在结构中仅能采用几何稳定的结构，相反，在机械上应该采用可动部分组成的几何不稳定的结构。

机动分析的目的是要判别一个已知结构在任何载荷作用下是否保持其几何不变形的能力，并且研究在怎样的情况下，这种能力才能得到保证。

2. 自由度

在机械原理里，我们已知道任何物体或物体系统的独立参变数的数目，称为它们的自由度。一个刚体在平面中运动时的位置，可用三个独立参变数来决定，例如刚体上任一点 A 的座标 x 和 y ，以及通过 A 点任一直线于横标 x 的倾角 α （图 1-6）。因此刚体在平面中具有三个自由度。

如果对刚体给予某种约束或控制，则可减少若干自由度。当刚体给予一端固定的链杆（支座链杆）控制后，则刚体位置将由 α_1 和 α_2 （图 1-7）来决定，亦即减少一个自由度，因此，一个链杆相当于一个机动连系。

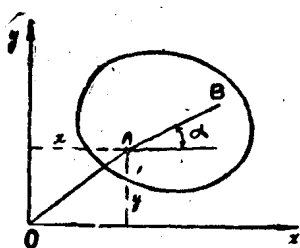


图 1-6

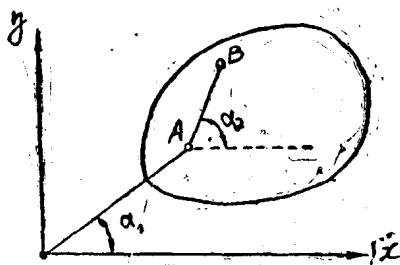


图 1-7

如刚体在 A 点用铰固定后，它的位置将仅由一个独立参变数 α 来决定（图 1-8），亦即减少了两个自由度，因此每个铰相当于两个机动连系。

如果令 A 为组成结构的刚体数目， M 为用于连接这些刚体的单铰的数目， C_0 为支座链杆的数目。当各刚体都可在平面上自由运动时，则自由度的总数将等于 $3A$ 。现每个铰可减少二个自由度，则 M 个铰就减少 $2M$ 个自由度，每一个支座链杆可减少一个自由度，则 C_0 个支座链杆就减少 C_0 个自由度，这样结构的自由度将减少为：

$$W = 3A - 2M - C_0 \quad (1-1)$$

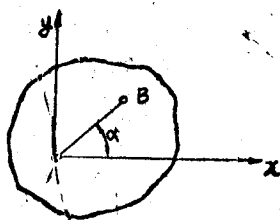
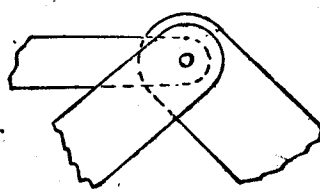


图 1-8



(a)



(b)

图 1-9

这里必须注意， $\bar{A}$ 是表示单铰的数目。如果遇到 n 根杆件具有同一个铰的情况，则这种铰称为复铰。当具有 n 根杆件时，应将它作为 $(n-1)$ 个单铰来计算。例如在图 1-9 a 上的复铰具有三根杆件，所以应当作两个 ($III=3-1=2$) 单铰来计算，图 1-9 b 为其计算简图。

若 $W > 0$ 则表示该结构具有可动性；当 $W = 0$ 时，表明具有保证结构几何不变形（即不动的）最少控制数，它属于静定而几何稳定的结构；当 $W < 0$ 时表明结构的控制数超过最少控制数，即具有多余控制，它属于超静定范围。现以 J 表示多余控制数，则 $J = -W$ ，即

$$J = -W = C_0 + 2 III - 3 \bar{A} \quad (1-2)$$

当结构没有支座链杆时，即 $C_0 = 0$ ，它的自由度是由两部分组成的。一部分是结构内部各杆件间相互可动度 V ；另一部分是整个结构在它的平面内的自由度，显然，后者应等于 3。因此结构总的自由度为：

$$W = 3 \bar{A} - 2 III = V + 3 \quad (1-3)$$

结构内部可动度

$$V = W - 3 = 3 \bar{A} - 2 III - 3 \quad (1-4)$$

任一几何不变形的结构，其自由度应等于零或小于零，亦即应符合下列条件：

$$W \leq 0$$

这是结构几何不变形的必要条件。

在前面已简要说明了结构的自由度和几何不变形的条件，现在我们再进而讨论桁架结构。

在平面桁架中，节点都认为是铰接，因此铰的数目很多，而且主要是复铰，所以按公式 (1-1) 来确定自由度，是并不十分便利的。因而必须将上式加以简化，得出更实用的算式。

设桁架的杆件数等于 $\bar{A}$ ，每一杆件的端点有一个铰，亦即每根杆件具有两个铰，所以铰的总数为 $2\bar{A}$ 。但任何一个节点具有 n 个杆件时，则其相应的单铰数目不是 n ，而是 $(n-1)$ ，即每一节点使铰数减少一个。所以具有 $\bar{A}$ 根杆件的桁架中，若有 γ 个节点，则单铰总数为： $III = 2\bar{A} - \gamma$ ，将此值代入自由度一般公式中，则得：

$$W = 3\bar{A} - 2(2\bar{A} - \gamma) - C_0$$

即

$$W = 2\gamma - \bar{A} - C_0 \quad (1-5)$$

这个公式便是我们判别桁架几何不变形的实用公式，在这个公式中，它只牵涉到节点数目