高等学校试用教材

高等数学

下册

（第二分册）

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下册

（第二分册）

西安交通大学高等数学教研室编

内容提要

本书是编者在 1964 年和 1975 年出版的《高等数学》的基础上改编而成. 共分上、下两册, 各册又分第一、第二分册出版. 本书是下册第二分册, 内容包括曲线与曲面积分、微分方程、场论、广义积分与含参变数的积分、傅里叶级数与傅里叶积分.

本书可供工科院校各专业使用.

高等学校试[illegible]教材

高等数学

下册

(第二分册)

西安交通大学高等数学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 210,000

1979 年 9 月第 1 版 1980 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—30,000

书号 13012·0390 定价 0.65 元

目　录

第十三章　线积分、面积分及各类积分的联系

上一章我们已经给出了多元函数在各种区域上积分的一般定义. 本章将在此基础上，讨论线积分和面积分. 此外，还将讨论多元函数各类积分之间的联系，并建立相应的公式.

本章所建立的概念和公式是研究各种物理场(比如温度场、电场等)的重要数学工具，在科学技术中有着广泛的应用. 为了便于读者集中精力领会这些概念和公式，在这一章中，我们将着重从数学上进行阐述，至于在物理场中的应用，将在第十五章中讨论.

§1　曲线弧长与第一型线积分

在上一章§1中我们已经知道，如果积分$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega$ 的积分域(Ω)取作空间(或平面)曲线C，那末这个积分就是第一型线积分$\int_C f(M)ds$. 这时，(12-5)式右边积分和数中的$\Delta\Omega_k(k=1, 2, \cdots, n)$便是$C$的各小段弧$(\Delta s_k)$的长度$\Delta s_k$，$M_k$便是$(\Delta s_k)$上任意取的一个点，而$d$就是小弧段$(\Delta s_k)$的最大长度：$d=\max\Delta s_k$. 于是第一型线积分就是和数$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k$当$d\to 0$时的极限，即

$$\int_C f(M)ds=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k \tag{13-1}$$

当C是空间曲线时，$f(M)$一般为三元函数$f(x, y, z)$；C是平面曲线时，$f(M)$一般为二元函数$f(x, y)$.

这里我们应当注意两点:

1° 虽然被积函数 $f(M)$ 是一个二元或三元的函数——$f(x,y)$ 或 $f(x,y,z)$，但由于点 M 始终被限制在曲线 C 上，x、y 或 x、y、z 并不彼此独立而是受曲线 C 的方程的约束，实际上是一维的，因此，线积分的符号用一个"$\int$"表示.

2° 由于 Δs_k 是每一小段弧的长度，所以规定它是正的.

由曲线积分的定义(13-1)可知，线积分的计算涉及曲线 C 的各小段弧的长度．下面我们先来讨论空间曲线的弧长.

1-1 空间曲线的弧长

平面曲线的弧长定义(上册第 411 页脚注)可以一字不改地作为空间曲线弧长的定义．利用曲线的参数方程，我们可以把曲线的长度公式由平面推广到空间．不过在这里我们不从弧微分的积分得出，而是从定义出发导出弧长公式.

设空间曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\qquad (13\text{-}2)$$

给出，其中 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上有连续的导数，而 α 与 β 分别为曲线段的端点 A 与 B 所对应的参数值 (图 13.1)．为了确定 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长 s，我们首先在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意插入 $n-1$ 个分点:

$$A=P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n=B$$

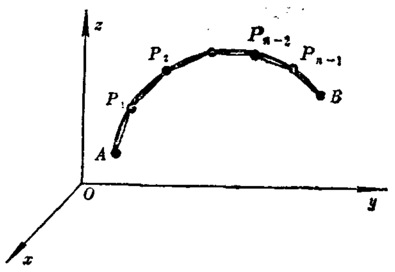

图 13.1

设它们对应的参数值分别为

$$\alpha=t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n=\beta$$

然后把相邻的分点连接起来，得内接折线如图 13.1 所示. 据空间两点间的距离公式，内接折线的长度 L_n 显然是

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2+(\Delta z_k)^2}$$

这里

$$\Delta x_k=x(t_k)-x(t_{k-1})$$
$$\Delta y_k=y(t_k)-y(t_{k-1})$$
$$\Delta z_k=z(t_k)-z(t_{k-1})$$

令 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$，在每个子区间$[t_{k-1}, t_k]$上，应用拉格朗日公式有

$$\Delta x_k=\dot{x}(t_k')\Delta t_k,\quad \Delta y_k=\dot{y}(t_k'')\Delta t_k,\quad \Delta z_k=\dot{z}(t_k''')\Delta t_k$$

其中 t_k', t_k'', t_k''' 在 t_{k-1} 与 t_k 之间. 把上式代入 L_n 的表达式得

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k'')+\dot{z}^2(t_k''')}\,\Delta t_k$$

这里 t_k', t_k'', t_k''' 虽然一般说来并不相同，但是在 $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ 连续的假定下，我们可以证明(从略)，当最大的 Δt_k 趋向零时，和数 L_n 的极限与把 t_k'', t_k''' 都换成 t_k' 后所得的和数

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')+\dot{z}^2(t_k')}\,\Delta t_k$$

的极限是相等的，而这个和数就是函数$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$在区间$[\alpha, \beta]$ 上的积分和数，于是根据定积分的定义及存在定理，可得

$$\lim_{\max\Delta t_k\to 0}L_n=\lim_{\max\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')+\dot{z}^2(t_k')}\,\Delta t_k$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

而根据弧长的定义，上式左端的极限就是$\overset{\frown}{AB}$的弧长 s，从而我们有

$$\boxed{s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt} \tag{13-3}$$

相应地，我们有空间曲线的**弧微分**

$$\boxed{ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt} \tag{13-4}$$

或

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

由以上讨论可知，当 $x(t), y(t), z(t)$ 在区间$[\alpha, \beta]$上有连续的导数时，曲线(13-2)是可求长的，其长度由公式(13-3)确定. 所以光滑曲线或按段光滑曲线是可求长的.

应当注意，为了保证弧长 s 为正，公式(13-3)中的积分上限 β 必须大于积分下限 α.

我们在第十章 4-2 中已知，当空间曲线(13-2)在点 $(x(t), y(t), z(t))$的切线的正向与曲线的正向①一致时，切线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos\beta=\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

---

① 参看下册第一分册第 100 页脚注.

将上式分子分母同乘以 dt, 并利用(13-4)式, 得

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}}$$

例 1 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta$ 一个螺距之间的长度.

解 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2+k^2}d\theta$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\sqrt{a^2+k^2}$$

例 2 求曲线 $x^2+z=4,\ 4x+3y=12$ 由点 $(0,\ 4,\ 4)$ 至点 $\left(2, \frac{4}{3}, 0\right)$的长度.

解 先把曲线化为以 x 为参数的参数方程:

$$x=x,\quad y=4-\frac{4}{3}x,\ z=4-x^2\quad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

于是长度

$$s=\int_0^2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ dx=\int_0^2\sqrt{\frac{25}{9}+4x^2}dx=\frac{13}{3}+\frac{25}{36}\ln 5$$

如果 C 是平面曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

那末在(13-3)和(13-4)中令 $z(t)\equiv 0$, 便得

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}(t)}\,dt$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\ dt$$

与上册第四章中用几何直观推得的结果完全一致.

练 习 1-1

1. 求空间曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 由点 $(1, 0, 1)$ 到点$(0, e^{\frac{\pi}{2}},$

$e^{\frac{\pi}{2}}$)的长度 s.

2. 求下列空间曲线的弧长 s:

(1) $x^2=3y, 2xy=9z$ 由点$(0,0,0)$到点$(3,3,2)$;

(2) $4ax=(y+z)^2, 4x^2+3y^2=3z^2$ 由原点到点(x,y,z).

1-2 第一型线积分的计算法与应用

当曲线C的方程为已知时，第一型线积分就可以化成定积分来计算. 为了简便起见，下面先就平面线积分进行讨论.

设平面光滑曲线C的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

$f(x,y)$在C上连续，则第一型线积分$\int_C f(x,y)ds$存在，且

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt}\qquad(13\text{-}5)$$

现在我们来推导公式(13-5). 由(13-1)式,

$$\int_C f(x,y)ds=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设弧段(Δs_k)两端点对应的参数值为 t_{k-1}, t_k，其上(ξ_k,η_k)点对应的参数值为 τ_k，即 $\xi_k=x(\tau_k), \eta_k=y(\tau_k)$ $(t_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant t_k)$. 因为

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

应用积分中值定理，就有

$$\Delta s_k=\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')}\Delta t_k\quad(t_{k-1}\leqslant t_k'\leqslant t_k)$$

这里 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 于是，和数

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k=\sum_{k=1}^n f(x(\tau_k),y(\tau_k))\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')}\Delta t_k$$

根据假设条件，可知函数 $f(x(t),\ y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}$在区间

$[\alpha, \beta]$上连续，当 $\max\Delta t_k \to 0$ 时，可以证明上式右边的极限就是定积分$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$. 而当 $d=\max\Delta s_k \to 0$ 时，$\max\Delta t_k \to 0$，所以和数$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$当 $d\to 0$ 时的极限存在，即线积分$\int_C f(x,y)ds$ 存在，且等于定积分

$$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

这就得到了(13-5)式.

由(13-5)式可知，线积分$\int_C f(x, y)ds$ 中的 ds，就是积分路线 C 的弧微分. 要计算线积分$\int_C f(x,y)ds$，只要把 x, y 用曲线 C 上的点$(x(t), y(t))$代入，并把 ds 换成 C 的弧微分，就可化成(13-5)式右边的定积分.

如果 C 是空间光滑曲线:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

那末在与前述平面线积分类似的假定下，同样可以得到

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \tag{13-6}$$

显然，如果积分路线 C 是按段光滑曲线，那末可先按段应用以上公式，然后把所得结果相加，根据积分性质，可知公式(13-5)与公式(13-6)同样成立. 今后我们假定积分路线 C 都是光滑曲线或按段光滑曲线.

应当注意，由于(13-5)与(13-6)两式中的 ds 是积分路线 C 的弧长的微分，我们在前面线积分的定义中规定它总是正的. 所以公式右边定积分的上限必须大于下限，以保证 $ds>0$.

例 1 求 $I=\int_C xyzds$, 其中 C 是螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, $z=k\theta$ 的一段($0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$).

解 $I=\int_0^{2\pi} a^2\cos\theta\sin\theta\cdot k\theta\sqrt{a^2+k^2}d\theta$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\theta\sin 2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\left(\frac{-\theta\cos 2\theta}{2}\bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\pi ka^2\sqrt{a^2+k^2}$$

例 2 求 $I=\int_C xds$, 其中 C 是连接点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 的直线段 AB(图 13.2).

解 AB 的参数方程为

$$\begin{aligned} x&=x_1+(x_2-x_1)t=(1-t)x_1+tx_2 \\ y&=y_1+(y_2-y_1)t=(1-t)y_1+ty_2 \end{aligned} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}dt=Ldt$$

(L 为 AB 的长度)

$$I=\int_C xds=\int_0^1[(1-t)x_1+tx_2]Ldt=L\frac{x_1+x_2}{2}=Lx_C$$

这里的 x_C 是 AB 中点 M 的横坐标.

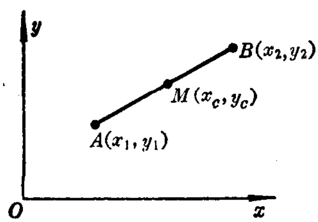

图 13.2

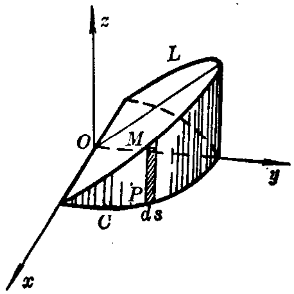

图 13.3

例 3 求$I=\int_C y ds$, 其中C是抛物线$y^2=4x$从点$(1,2)$到点$(1,-2)$的一段.

解 这里把C的方程写成$x=\frac{y^2}{4}$, $-2\leqslant y\leqslant 2$, 才保证函数是单值的, 所以应把y作为自变量, 因而$ds=\sqrt{1+x'^2}dy$,

$$I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}dy=0$$

(因为被积函数是奇函数).

下面我们举例说明第一型线积分的应用.

柱面的侧面积 设有半片椭圆柱面$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, 其上部被平面$z=y$所截(图 13.3). 求截下部分的侧面积$A$.

解 这个椭圆柱面的准线是xOy平面上的半个椭圆C:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y\geqslant 0)$$

把C划分为许多小弧段, 则对应于$P(x, y)$点处的弧元素ds上一小片柱面面积, 近似等于以ds为底、以截线L在M点的竖坐标$z=y$为高的长方形面积, 从而得面积微分

$$dA=yds$$

将dA沿曲线C无限积累, 得侧面积

$$A=\int_C yds$$

其中C是xOy平面上的半个椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y\geqslant 0)$.

为了计算这个线积分, 把C化为参数方程:

$$x=\sqrt{5}\cos t, \quad y=3\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

于是

$$A=\int_C yds=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}dt$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$=-3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}du=6\int_0^1\sqrt{5+4u^2}du$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

物质曲线的重心与转动惯量 设有一半圆弧，其上均匀分布着质量，求它的重心和对直径的转动惯量.

解 由对称性，知重心的横坐标 $\bar{x}=0$，设线密度为 μ，因为质量均匀分布，μ 是一常数. 在半圆弧上任取一点 $P(x, y)$，求出 P 点处的弧元素(ds)的质量 dm对 x 轴的静矩:

$$dM_x=ydm=\mu yds$$

这就是对 x 轴的静矩微分. 把静矩微分 dM_x 沿半圆弧 C 积分，得

$$M_x=\int_C \mu yds$$

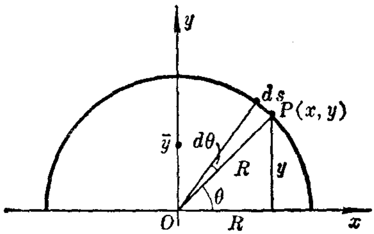

图 13.4

由图 13.4, $y=R\sin\theta$, $ds=Rd\theta$, 故

$$M_x=\int_C \mu yds=\mu\int_0^{\pi}R^2\sin\theta d\theta=2\mu R^2$$

而半圆弧的质量 $m=\pi R\mu$，所以重心的纵坐标

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{2\mu R^2}{\pi R\mu}=\frac{2R}{\pi}$$

再求(ds)的质量dm对直径即x轴的转动惯量:

$$dI_x = y^2 dm = \mu y^2 ds$$

这就是对x轴的转动惯量微分. 把转动惯量微分dI_x沿半圆弧C积分,得半圆弧对x轴的转动惯量

$$I_x = \int_C \mu y^2 ds = \mu \int_0^\pi R^3 \sin^2\theta d\theta = \mu R^3 \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{\mu\pi R^3}{2} = \frac{m}{2} R^2$$

这里$m = \mu\pi R$为半圆弧的质量.

练 习 1-2

1. 计算沿下列各曲线C的第一型线积分:

(1) $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, 从点$(0, -2)$到点$(4, 0)$的线段;

(2) $\int_C (x^2+y^2)^n ds$, C为圆周$x^2+y^2=a^2$;

(3) $\int_C y^2 ds$, C为摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $\int_C z ds$, C为螺线$x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t(0\leqslant t\leqslant t_0)$;

(5) $\int_C (x+y) ds$, C为以$(0, 0)$, $(1, 0)$和$(0, 1)$为顶点的三角形周界;

(6) $\int_C x^2 ds$, C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

2. 试导出沿极坐标方程$\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示的曲线$C$的线积分计算公式:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)} d\theta$$

3. 计算下列第一型线积分:

(1) $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, C为圆周$x^2+y^2=ax$;

(2) $\int_C x ds$, C为对数螺线$\rho=ae^{k\theta}(k>0)$在圆$\rho=a$内的部分.