

高等学校试用教材

高等数学

下册

(第二分册)

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下册

(第二分册)

西安交通大学高等数学教研室编

内 容 提 要

本书是编者在1964年和1975年出版的《高等数学》的基础上改编而成。共分上、下两册,各册又分第一、第二分册出版。本书是下册第二分册,内容包括曲线与曲面积分、微分方程、场论、广义积分与含参变数的积分、傅里叶级数与傅里叶积分。

本书可供工科院校各专业使用。

高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

(第二分册)

西安交通大学高等数学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 210,000

1979年9月第1版 1980年3月第1次印刷

印数 00,001—30,000

书号 13012·0390 定价 0.65 元

目 录

第十三章 线积分、面积分及各类积分的联系	271
§ 1 曲线弧长与第一型线积分	271
1-1 空间曲线的弧长	272
1-2 第一型线积分的计算法与应用	276
§ 2 曲面面积与第一型面积分	282
2-1 曲面面积	283
2-2 第一型面积分的计算法	289
§ 3 第二型线积分和面积分	291
3-1 第二型线积分的定义与性质	291
3-2 第二型线积分的计算法 两型线积分的联系	296
3-3 第二型面积分	301
§ 4 各类积分的联系	308
4-1 平面线积分与二重积分的联系——格林公式	308
4-2 曲面积分与三重积分的联系——奥斯特洛格拉茨基公式	312
4-3 空间线积分与面积分的联系——斯托克斯公式	315
§ 5 线积分与路线无关问题	319
5-1 平面线积分与路线无关的条件	319
5-2 二元函数全微分的求积问题	325
5-3 空间线积分与路线无关问题	332
第十四章 微分方程	342
§ 1 一阶微分方程	342
1-1 一阶方程及其解的几何意义	342
1-2 全微分方程	344
1-3 一阶线性微分方程	350
1-4 一阶方程的近似解法	359
§ 2 线性微分方程	364
2-1 线性齐次方程解的性质及其求法	365
2-2 非齐次方程解的性质及其求法	371

§ 3 常系数线性微分方程	374
3-1 常系数线性齐次方程的特征方程解法	375
3-2 常系数线性非齐次方程特解的待定系数解法	378
3-3 应用举例	387
*§ 4 微分方程组简介	396
4-1 一阶微分方程组及其与高阶微分方程的关系	397
4-2 首次积分与对称型微分方程组	402

第十五章 场论 410

§ 1 数量场与向量场	410
1-1 场	410
1-2 数量场的等值面	411
1-3 向量场的向量线	413
§ 2 数量场的方向导数与梯度	415
2-1 方向导数	415
2-2 梯度	417
2-3 梯度的运算法则	423
§ 3 向量场的散度与旋度	425
3-1 向量场的通量与散度	425
3-2 向量场的环量与旋度	439
§ 4 位势场、管状场与调和场	446
4-1 位势场	447
4-2 管状场	448
4-3 调和场	449
§ 5 梯度、散度、拉普拉斯式和旋度在正交曲线坐标系中的表达式	452
5-1 正交曲线坐标系	452
5-2 梯度、散度、拉普拉斯式和旋度的表达式	455

第十六章 广义积分(续)与含参变数积分 465

§ 1 广义积分的收敛判别法	465
1-1 无穷积分的收敛判别法	465
1-2 无界函数积分的收敛判别法	472
1-3 Γ 函数与B函数	475
*1-4 广义重积分	480
*§ 2 含参变数的积分	485

2-1 含参变数的积分的概念	485
2-2 函数的一致连续性	486
2-3 含参变数的积分的分析性质	487
*§3 含参变数的广义积分	493
3-1 含参变数的无穷积分的一致收敛性	493
3-2 含参变数的无穷积分的性质	494
第十七章 傅里叶级数与傅里叶积分	499
§ 1 傅里叶级数	499
1-1 三角函数系的正交性	499
1-2 欧拉-傅里叶公式 傅里叶级数	502
1-3 傅里叶级数的收敛问题	504
1-4 偶或奇函数的傅里叶级数	507
§ 2 傅里叶级数的其他形式	510
2-1 任意区间的傅里叶级数	510
2-2 傅里叶正弦、余弦级数	513
2-3 复数形式的傅里叶级数	515
*§3 傅里叶积分与傅里叶变换	521
3-1 傅里叶积分	521
3-2 傅里叶积分的其他形式	524

答案

第十三章 线积分、面积分及 各类积分的联系

上一章我们已经给出了多元函数在各种区域上积分的一般定义。本章将在此基础上,讨论线积分和面积分。此外,还将讨论多元函数各类积分之间的联系,并建立相应的公式。

本章所建立的概念和公式是研究各种物理场(比如温度场、电场等)的重要数学工具,在科学技术中有着广泛的应用。为了便于读者集中精力领会这些概念和公式,在这一章中,我们将着重从数学上进行阐述,至于在物理场中的应用,将在第十五章中讨论。

§1 曲线弧长与第一型线积分

在上一章 §1 中我们已经知道,如果积分 $\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$ 的积分域 (Ω) 取作空间(或平面)曲线 C , 那末这个积分就是第一型线积分 $\int_C f(M) ds$ 。这时, (12-5) 式右边积分和数中的 $\Delta\Omega_k (k=1, 2, \dots, n)$ 便是 C 的各小段弧 (Δs_k) 的长度 Δs_k , M_k 便是 (Δs_k) 上任意取的一个点, 而 d 就是小弧段 (Δs_k) 的最大长度: $d = \max \Delta s_k$ 。于是第一型线积分就是和数 $\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k$ 当 $d \rightarrow 0$ 时的极限, 即

$$\int_C f(M) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k \quad (13-1)$$

当 C 是空间曲线时, $f(M)$ 一般为三元函数 $f(x, y, z)$; C 是平面曲线时, $f(M)$ 一般为二元函数 $f(x, y)$ 。

这里我们应当注意两点:

1° 虽然被积函数 $f(M)$ 是一个二元或三元的函数—— $f(x, y)$ 或 $f(x, y, z)$, 但由于点 M 始终被限制在曲线 C 上, x, y 或 x, y, z 并不彼此独立而是受曲线 C 的方程的约束, 实际上是一维的, 因此, 线积分的符号用一个“ $\int$ ”表示。

2° 由于 Δs_k 是每一小段弧的长度, 所以规定它是正的。

由线积分的定义(13-1)可知, 线积分的计算涉及曲线 C 的各小段弧的长度。下面我们先来讨论空间曲线的弧长。

1-1 空间曲线的弧长

平面曲线的弧长定义(上册第 411 页脚注)可以一字不改地作为空间曲线弧长的定义。利用曲线的参数方程, 我们可以把曲线的长度公式由平面推广到空间。不过在这里我们不从弧微分的积分得出, 而是从定义出发导出弧长公式。

设空间曲线段 $\widehat{AB}$ 由参数方程

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (13-2)$$

给出, 其中 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数, 而 α 与 β 分别为曲线段的端点 A 与 B 所对应的参数值(图 13.1)。为了确定 $\widehat{AB}$ 的弧长 s , 我们首先在 $\widehat{AB}$ 上任意插入 $n-1$ 个分点:

$$A=P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n=B$$

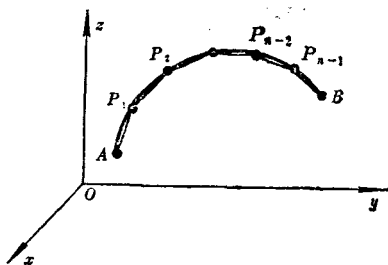


图 13.1

设它们对应的参数值分别为

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$$

然后把相邻的分点连接起来, 得内接折线如图 13.1 所示. 据空间两点间的距离公式, 内接折线的长度 L_n 显然是

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

这里

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$$

$$\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1})$$

令 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, 在每个子区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上, 应用拉格朗日公式有

$$\Delta x_k = \dot{x}(t'_k) \Delta t_k, \quad \Delta y_k = \dot{y}(t''_k) \Delta t_k, \quad \Delta z_k = \dot{z}(t'''_k) \Delta t_k$$

其中 t'_k, t''_k, t'''_k 在 t_{k-1} 与 t_k 之间. 把上式代入 L_n 的表达式得

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(t'_k) + \dot{y}^2(t''_k) + \dot{z}^2(t'''_k)} \Delta t_k$$

这里 t'_k, t''_k, t'''_k 虽然一般说来并不相同, 但是在 $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ 连续的假定下, 我们可以证明(从略), 当最大的 Δt_k 趋向零时, 和数 L_n 的极限与把 t''_k, t'''_k 都换成 t'_k 后所得的和数

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(t'_k) + \dot{y}^2(t'_k) + \dot{z}^2(t'_k)} \Delta t_k$$

的极限是相等的, 而这个和数就是函数 $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的积分和数, 于是根据定积分的定义及存在定理, 可得

$$\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} L_n = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(t'_k) + \dot{y}^2(t'_k) + \dot{z}^2(t'_k)} \Delta t_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

而根据弧长的定义, 上式左端的极限就是 $\widehat{AB}$ 的弧长 s , 从而我们有

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \quad (13-3)$$

相应地, 我们有空间曲线的弧微分

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \quad (13-4)$$

或

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

由以上讨论可知, 当 $x(t), y(t), z(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数时, 曲线(13-2)是可求长的, 其长度由公式(13-3)确定. 所以光滑曲线或按段光滑曲线是可求长的.

应当注意, 为了保证弧长 s 为正, 公式(13-3)中的积分上限 β 必须大于积分下限 α .

我们在第十章 4-2 中已知, 当空间曲线(13-2)在点 $(x(t), y(t), z(t))$ 的切线的正向与曲线的正向^①一致时, 切线的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos \beta = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}}$$

① 参看下册第一分册第 100 页脚注.

将上式分子分母同乘以 dt , 并利用(13-4)式, 得

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

例 1 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = k\theta$ 一个螺距之间的长度.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2 + k^2} d\theta \\ &= \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \sqrt{a^2 + k^2} \end{aligned}$$

例 2 求曲线 $x^2 + z = 4, 4x + 3y = 12$ 由点 $(0, 4, 4)$ 至点 $(2, \frac{4}{3}, 0)$ 的长度.

解 先把曲线化为以 x 为参数的参数方程:

$$x = x, \quad y = 4 - \frac{4}{3}x, \quad z = 4 - x^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

于是长度

$$s = \int_0^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{25}{9} + 4x^2} dx = \frac{13}{3} + \frac{25}{36} \ln 5$$

如果 C 是平面曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

那末在(13-3)和(13-4)中令 $z(t) \equiv 0$, 使得

$$\begin{aligned} s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ ds &= \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \end{aligned}$$

与上册第四章中用几何直观推得的结果完全一致.

练 习 1-1

1. 求空间曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 由点 $(1, 0, 1)$ 到点 $(0, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$,

$\frac{\pi}{2}$) 的长度 s .

2. 求下列空间曲线的弧长 s :

(1) $x^2 = 3y, 2xy = 9z$ 由点 $(0, 0, 0)$ 到点 $(3, 3, 2)$;

(2) $4ax = (y+z)^2, 4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ 由原点到点 (x, y, z) .

1-2 第一型线积分的计算法与应用

当曲线 C 的方程为已知时, 第一型线积分就可以化成定积分来计算. 为了简便起见, 下面先就平面线积分进行讨论.

设平面光滑曲线 C 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

$f(x, y)$ 在 C 上连续, 则第一型线积分 $\int_C f(x, y) ds$ 存在, 且

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \quad (13-5)$$

现在我们来推导公式(13-5). 由(13-1)式,

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

设弧段 (Δs_k) 两端点对应的参数值为 t_{k-1}, t_k , 其上 (ξ_k, η_k) 点对应的参数值为 τ_k , 即 $\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k) (t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k)$. 因为

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

应用积分中值定理, 就有

$$\Delta s_k = \sqrt{\dot{x}^2(t'_k) + \dot{y}^2(t'_k)} \Delta t_k \quad (t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k)$$

这里 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. 于是, 和数

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \sqrt{\dot{x}^2(t'_k) + \dot{y}^2(t'_k)} \Delta t_k$$

根据假设条件, 可知函数 $f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ 在区间

$[\alpha, \beta]$ 上连续, 当 $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ 时, 可以证明上式右边的极限就是定积分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$, 而当 $d = \max \Delta s_k \rightarrow 0$ 时,

$\max \Delta t_k \rightarrow 0$, 所以和数 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ 当 $d \rightarrow 0$ 时的极限存在, 即

线积分 $\int_C f(x, y) ds$ 存在, 且等于定积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

这就得到了(13-5)式.

由(13-5)式可知, 线积分 $\int_C f(x, y) ds$ 中的 ds , 就是积分路线 C 的弧微分. 要计算线积分 $\int_C f(x, y) ds$, 只要把 x, y 用曲线 C 上的点 $(x(t), y(t))$ 代入, 并把 ds 换成 C 的弧微分, 就可化成(13-5)式右边的定积分.

如果 C 是空间光滑曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

那末在与前述平面线积分类似的假定下, 同样可以得到

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \quad (13-6)$$

显然, 如果积分路线 C 是按段光滑曲线, 那末可先按段应用以上公式, 然后把所得结果相加, 根据积分性质, 可知公式(13-5)与公式(13-6)同样成立. 今后我们假定积分路线 C 都是光滑曲线或按段光滑曲线.

应当注意, 由于(13-5)与(13-6)两式中的 ds 是积分路线 C 的弧长的微分, 我们在前面线积分的定义中规定它总是正的. 所以公式右边定积分的上限必须大于下限, 以保证 $ds > 0$.

例1 求 $I = \int_C xyz ds$, 其中 C 是螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = k\theta$ 的一段 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int_0^{2\pi} a^2 \cos \theta \sin \theta \cdot k\theta \sqrt{a^2 + k^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} k a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} k a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \left(-\frac{\theta \cos 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \pi k a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \end{aligned}$$

例2 求 $I = \int_C x ds$, 其中 C 是连接点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 的直线段 AB (图 13.2).

解 AB 的参数方程为

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t = (1-t)x_1 + tx_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t = (1-t)y_1 + ty_2$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dt = L dt$$

(L 为 AB 的长度)

$$I = \int_C x ds = \int_0^1 [(1-t)x_1 + tx_2] L dt = L \frac{x_1 + x_2}{2} = L x_c$$

这里的 x_c 是 AB 中点 M 的横坐标.

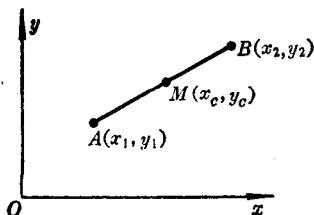


图 13.2

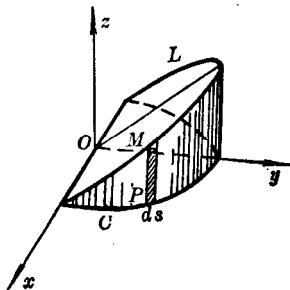


图 13.3

例3 求 $I = \int_C y ds$, 其中 C 是抛物线 $y^2 = 4x$ 从点 $(1, 2)$ 到点 $(1, -2)$ 的一段.

解 这里把 C 的方程写成 $x = \frac{y^2}{4}$, $-2 \leq y \leq 2$, 才保证函数是单值的, 所以应把 y 作为自变量, 因而 $ds = \sqrt{1+x'^2} dy$,

$$I = \int_{-2}^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy = 0$$

(因为被积函数是奇函数).

下面我们举例说明第一型线积分的应用.

柱面的侧面积 设有半片椭圆柱面 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0, z \geq 0$, 其上部被平面 $z = y$ 所截(图 13.3). 求截下部分的侧面积 A .

解 这个椭圆柱面的准线是 xOy 平面上的半个椭圆 C :

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (y \geq 0)$$

把 C 划分为许多小弧段, 则对应于 $P(x, y)$ 点处的弧元素 ds 上一小片柱面面积, 近似等于以 ds 为底、以截线 L 在 M 点的竖坐标 $z = y$ 为高的长方形面积, 从而得面积微分

$$dA = y ds$$

将 dA 沿曲线 C 无限积累, 得侧面积

$$A = \int_C y ds$$

其中 C 是 xOy 平面上的半个椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (y \geq 0)$.

为了计算这个线积分, 把 C 化为参数方程:

$$x = \sqrt{5} \cos t, \quad y = 3 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

于是

$$\begin{aligned}
 A &= \int_C y ds = \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt \\
 &= -3 \int_0^\pi \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} d(\cos t) \\
 &= -3 \int_1^{-1} \sqrt{5 + 4u^2} du = 6 \int_0^1 \sqrt{5 + 4u^2} du \\
 &= 9 + \frac{15}{4} \ln 5
 \end{aligned}$$

物质曲线的重心与转动惯量 设有一半圆弧，其上均匀分布着质量，求它的重心和对直径的转动惯量。

解 由对称性，知重心的横坐标 $\bar{x}=0$ ，设线密度为 μ ，因为质量均匀分布， μ 是一常数。在半圆弧上任取一点 $P(x, y)$ ，求出 P 点处的弧元素 (ds) 的质量 dm 对 x 轴的静矩：

$$dM_x = y dm = \mu y ds$$

这就是对 x 轴的静矩微分。把静矩微分 dM_x 沿半圆弧 C 积分，得

$$M_x = \int_C \mu y ds$$

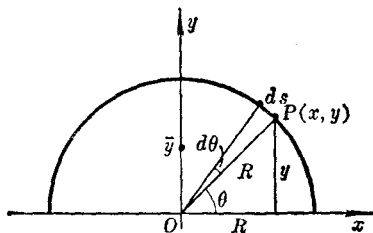


图 13.4

由图 13.4, $y = R \sin \theta$, $ds = R d\theta$, 故

$$M_x = \int_C \mu y ds = \mu \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = 2\mu R^2$$

而半圆弧的质量 $m = \pi R \mu$ ，所以重心的纵坐标

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{2\mu R^2}{\pi R \mu} = \frac{2R}{\pi}$$

再求(ds)的质量 dm 对直径即 x 轴的转动惯量:

$$dI_x = y^2 dm = \mu y^2 ds$$

这就是对 x 轴的转动惯量微分, 把转动惯量微分 dI_x 沿半圆弧 C 积分, 得半圆弧对 x 轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C \mu y^2 ds = \mu \int_0^\pi R^3 \sin^2 \theta d\theta = \mu R^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu \pi R^3}{2} = \frac{m}{2} R^2 \end{aligned}$$

这里 $m = \mu \pi R$ 为半圆弧的质量.

练 习 1-2

1. 计算沿下列各曲线 C 的第一型线积分:

(1) $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, 从点 $(0, -2)$ 到点 $(4, 0)$ 的线段;

(2) $\int_C (x^2 + y^2)^n ds$, C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$;

(3) $\int_C y^2 ds$, C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(4) $\int_C z ds$, C 为螺旋线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

(5) $\int_C (x+y) ds$, C 为以 $(0, 0)$, $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 为顶点的三角形周界;

(6) $\int_C x^2 ds$, C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

2. 试导出沿极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) 表示的曲线 C 的线积分计算公式:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta$$

3. 计算下列第一型线积分:

(1) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(2) $\int_C x ds$, C 为对数螺线 $\rho = ae^{k\theta}$ ($k > 0$) 在圆 $\rho = a$ 内的部分.