初高中思维方法丛书

高中数学思维方法

上册

总主编　孙元清
主　编　康士凯
编　者　汪祖亨　崔永富

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思维方法. 上册/孙元清主编;康士凯分册主编. 上海:上海科学普及出版社,2003.8
(初高中思维方法丛书)
ISBN 7-5427-2516-5

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①孙... ②康... Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 055656 号

责任编辑 郭子安

初高中思维方法丛书
高中数学思维方法
上册
总主编 孙元清 主编 康士凯
上海科学普及出版社出版发行
(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

各地新华书店经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 270 000
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5427-2516-5/Q·80 定价:13.00 元

内容提要

NEI RONG TI YAO

学习数学，最重要的是学习数学的思维方法，这是人人皆知的命题，然而又是一个世界难题. 本书尝试用中学生易懂的语言，将抽象的数学思维方法表达出来，并通过典型例题，创设数学思维方法学习的情境.

本书共分三大部分. 第一部分讲述数学思维方法. 介绍如何面对形形式式的问题，怎样摆脱一筹莫展的困境，怎样使本书所讲述的思维方法转化为适合您的思维方法. 第二部分是按现行教材的编写结构，用[知识梳理]、[典型例题]、[练习]来说明该章节所涉及的数学思维方法，其中[典型例题]是通过[思维过程]、[解答]、[思维方法评析]来帮助读者体悟相关的数学思维方法. 第三部分是在全面学习中学数学各部分内容的基础上，用专题讲座形式向读者介绍几则常见的数学方法，从方法论角度探索培养数学思维能力的渠道.

前　言

QIAN　YAN

《初高中思维方法丛书》与初高中活用理科手册是两套姊妹书.编写这两套书的目的都是为了解决素质教育及其课程教材改革和考试改革所涉及的一个重要问题：怎样培养学生自主学习,这是一个能力问题,更是一个人格问题.那么,怎样培养学生会自主学习呢?自主学习的核心是兴趣,兴趣的核心是会学习,会学习的核心是会思维,会思维的核心是会发现问题、会活用知识去解决问题.因此,要培养学生会自主学习,必须重视培养学生学会思维、学会活用知识.思维要以知识为载体,知识对于任何一种思维都是必不可少的,没有知识,一个人无法思维;知识要以思维为活化剂,知识要通过思维去理解、去激化、去构建,没有思维,知识是空洞的、没有活力的、没有意义的.所以在培养学生思维时,要求学生活用知识;在要求学生活用知识时,要培养学生学会思维.

本套书为《初高中思维方法丛书》,编写时着眼于思维品质和思维能力的提高,着重于思维方法的培养,试图改革传统的课程和教学实践所培养的传统思维方式——通过机械训练、按一种方式来理解知识和认识世界,而代之以注重培养学生会从实际出发、以多种思维方式去理解知识和认识世界,包括创造性思维、分析性思维和实践性思维.为此,本书从三个层面来阐述：每门学科的一般思维方法,理解知识与活用知识解题中常用的各种思维方法,复习与考试中常用的各种思维方法等三个层面;并且以一般思维方法作为基础和指导,

以阶段或单元复习中的解题方法作为具体培养思维方法、理解与活用知识点和知识块的一种手段，以在系统复习和考试中灵活应用各种思维方法去创造性思维、分析性思维和实践性思维作为目的.

本丛书每门学科的编写由三部分组成：

第一部分，先将学科的一般思维方法一一列出，并作简要介绍和示例，使学生对思维方法有一般的了解、整体的了解，以便指导以后的学习，并在以后学习和总复习的过程中逐步加深理解.

第二部分，再以知识块中所用到的思维方法、解题思维方法、考试思维方法作具体的阐述，并配有相应的例题和习题，在每一块之前对知识块的特点作简要的说明.

第三部分，这是作为系统复习与考试用的，作为思维方法的灵活应用与综合应用，并配以例题和习题.

本丛书以学科思维方法的培养为主，不受教材版本内容的限制，知识块和知识点要根据思维方法培养的需要来选择.

本丛书的例题和习题分为三个层次：基本层次——一般的练习题；中等层次——有一定难度和简单的综合题；较高层次——研究性学习的习题、较复杂的综合题、考试和竞赛中较难的题目等. 一般说，前两个层次的习题主要放在第二部分中，最后层次的习题放在第三部分中.

本丛书由具有丰富教研、教学经验的特级教师和优秀教师合作编写. 丛书主编孙元清，高中数学主编康士凯、初中数学主编周继光，高中物理主编张越、初中物理主编瞿东，高中化学主编吴铮、初中化学主编袁孝凤.

本丛书适合上海及全国各地高初中学生和教师选用，适合平时学习和阶段复习，以及考试时参考使用.

由于改革和编写尚在试验中，有欠妥和不足之处，敬请读者和专家指出宝贵的意见和建议，以便修改和完善.

高中数学由康士凯、汪祖亨、崔永富等共同编写.

孙元清

2003 年 6 月

引 言

YIN YAN

学习数学，最重要的是学习数学的思维方法，这是人人皆知的命题，然而又是一个世界难题.为了培养学生的思维能力，各国教育专家、中学优秀教师们殚精竭虑，提供了许多方案、设计了种种策略.然而，效果却不尽如人意，究其原因是多方面的，其中最典型的症结在于：理性思考下的方案能否真正成为适合学生实际情况的方案.适合学生实际的方案并不是一天就能拟就的，它需要经历一个过程，是按照数学本身的思维过程结合自身的认知方法的体验过程.笔者尝试用中学生易懂的语言，将抽象的数学思维方法表达出来，通过典型例题，创设数学思维方法学习的情境.

本书共分三大部分.第一部分讲述数学思维方法.我们将花相当多的篇幅介绍面对形形式式的问题，怎样摆脱一筹莫展的困境，使思路能顺利地从头脑中跳出来的方案，读者可以从例题中体悟.请你思考，在数学学习中，你是否遇到过类似情境？试着用本书所讲述的思维方法来解决问题.这样或许对于摆脱死记条文，改变大量重复操练的被动的学习方法是有效的.第二部分是按现行教材的编写结构，用[知识梳理]、[典型例题]、[练习]来说明该章节所涉及的数学思维方法.其中[典型例题]是通过对[思维过程]、[解答]、[思维方法评析]来帮助读者体悟该章节有关的数学思维方法.我们认为，数学问题的解决，作为学生，必须理清思路，运用最有效的思维方法来解决问题.只有你不满足于数学问题的结论，而重视思维产生的过程，重视对数

学思维方法的优劣评析，才能使自己的数学素质走向更高层次．本书这部分的编写用意亦在于此．第三部分是在全面学习中学数学各部分内容的基础上，用专题讲座形式向读者介绍几则常见的数学方法，从方法论角度探索培养数学思维能力的渠道．

在中学数学学习过程中，学生获取知识的同时，要高度关注从数学宝库中汲取思维营养，加强科学思维方法的训练．本书编写的宗旨就是将读者从机械操练的学习方法中摆脱出来，因为你最输不起的是时间．我们希望你关注的是鲜活的数学思维方法以及生动的解决问题的思考过程．

教育部在《面向21世纪教育振兴行动计划》中呼吁，“在当今及今后一个时期，缺少具有国际领先水平的创新人才，已经是制约我国竞争力的主要因素之一”．这个严峻的现实是我们付出许多沉重代价后才意识到的．要振兴中华民族，我们需要进入理想高校深造，但决不能只停留在升入高校的竞争，更应该把学习目标定在塑造国际领先水平的人才的竞争，因此，从中学时代起，努力进行各学科思维能力的培养，应是相当迫切的使命了．本书也是冀以这个历史使命而作的尝试，希望有更多的作品切实为学生摆脱题海和提高素质开展积极有益的探索．

康士凯

于上海杨浦高级中学 2003 年 6 月

目 录

MU LU

第一章

数学思维方法

学习数学，总会面对形形式式的问题，有时你会处于一筹莫展的情境. 事后对问题进行揣摸，寻找症结，其缘由往往是解题思路无法从头脑中跳出来. 许多有识之士已经意识到，要摆脱这种令人汗颜的困境，不能依靠大量重复的练习，而关键是对数学思维方法的把握. 现在我们将围绕问题解决的过程的主要环节介绍数学思维方法.

第一节　信息接受的思维方法

计算机的普及和信息时代的到来使人们对“信息”的接收越来越重视. 当面对一个问题时，首先就要围绕问题进行信息的接收与整理，从中我们可以悟出解题过程的思维方法，这就是一题上手，如果忽视对问题信息的接收与整理，便亟不可待地做起来，那么思维难免带有较多的盲目. 为了提高审清题意的素质，一般需要从以下四个方面进行探究.

一、明确条件与结论

匆匆地回答一个你尚未明白的问题是欠明智的，但是这种现象在解题时却经常发生，它使你错解题意把思维引入歧途，也可能疏忽遗漏. 要避免陷入这种令人扼腕的困境，在解题时先需明确条件与结论. 条件是探求解题思路的依据，结论是要达到的目标，是推理的终

点. 明确条件与结论，对于找出正确的解题方法起着思维定向的作用.

明确条件与结论的具体做法是将已知条件一项一项地列出来，把结论也一项一项地列出来. 可能你会认为这还不简单！我们认为这项工作水平的高低体现一个人思维能力的强弱. 对于同样的数学材料，数学思维能力强的人会获得更多的信息. 其一，同一个已知条件，它可以有多种表达形式. 诸如一个集合，可以用描述法，也可以用列举法，即使是描述法，也往往有各种形式，此外集合还可用文氏图表示. 列出已知条件，数学思维能力强的人，总能把已知条件写成易于思考、便于推理和运算的形式. 当然列出结论，也希望是注意选择结论最恰当的表现形式. 其二，一项一项地列出条件时，尽可能把它们表述成具有相互联系的形式，而不是一个又一个孤立的条件. 把分散的条件沟通起来，往往是思维产生的基础. 最后，明确条件与结论，必须尽可能关注条件与结论的联系，如果是这样，就常能使解题思路较快地从头脑中跳出来.

典型例题

例1 已知 $\log_{18}9 = a$，$18^b = 5$，求 $\log_{36}45$.

【思维过程】 $\log_{18}9 = a$，$18^b = 5$ 是分别以对数形式与指数形式给出的已知条件，如果你注意到结论 $\log_{36}45$ 是以对数形式给出，那么把条件“$18^b = 5$”写成“$\log_{18}5 = b$”通过对数运算性质便可建立与条件“$\log_{18}9 = a$”之间的联系. 由此可见，同样一个已知条件，它可以有多种不同表达形式，把已知条件写成易于思考、便于推理和运算的形式是最基本的数学思维方法.

本题结论是求“$\log_{36}45$”，从明确结论的思维要求，就要在头脑中产生把“$\log_{36}45$”归结为用 a、b 来表达的念头.

［解］ 由题设可知 $\log_{18}9 = a$，$\log_{18}5 = b$，于是得

$$\log_{36}45 = \frac{\log_{18}45}{\log_{18}36} = \frac{\log_{18}5 + \log_{18}9}{\log_{18}18 + \log_{18}2}$$

$$= \frac{a+b}{1+(\log_{18}18-\log_{18}9)}$$

$$= \frac{a+b}{2-a}.$$

【思维方法评析】 把分散的条件集中起来，是数学解题的思维方法. 平面几何中通过添辅助线，把线段之间数量关系与位置关系集中到一个三角形中，其本质亦是如此. 本题揭示这样一种数学思维方法：沟通条件之间、条件与结论之间联系，选择条件或结论恰当的表述形式，是易产生思路的策略.

例 2 已知 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2+px+q<0\}$，$A\cap B=\{x \mid -1\leqslant x<2\}$. 求实数 p、q 满足的关系及 p、q 各自的取值范围.

【思维过程】 集合 A 可简化为 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$. 由数轴沟通集合 A 与集合 $A\cap B$ 的关系

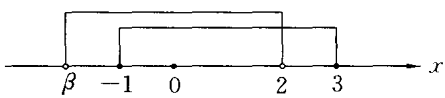


图 1-1

若将集合 B 表述为 $B=\{x \mid \beta<x<\alpha\}$，可得 $\alpha=2$，$\beta<-1$，将结果与条件 $B=\{x \mid x^2+px+q<0\}$ 联系，便可获得确定 p、q 关系的思路.

[解] 由题设得 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.
因为 $A\cap B=\{-1\leqslant x<2\}$，从数轴上分析，若将集合 B 表述为 $B=\{x \mid \beta<x<\alpha\}$，得 $\alpha=2$，$\beta<-1$.

(1) 由 $\alpha=2$，得 2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根，故 p、q 满足 $q=-2p-4$.

(2) 现讨论 p、q 的取值范围. 令 $f(x)=x^2+px+q$，显然满足

$$\begin{cases} f(2)=0, \\ \Delta=p^2-4q>0, \\ f(-1)<0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2p+q+4=0, \\ p^2-4q>0, \\ 1-p+q<0. \end{cases}$$

经整理，得 $p>-1$，$q<-2$.

【思维方法评析】

(1) 一题上手，如果不是迅速地将集合 A 表示成 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，就会使解题速度迟缓. 可见"明确条件"还表现为能用简洁、易于思考的形式表述已知条件.

(2)"把分散的条件集中起来"，是形成解题思路的关键. 如本例，通过数轴、形数结合是沟通条件之间联系的思维方法.

(3) 将集合 B 表示成 $B=\{x\mid \beta<x<\alpha\}$，由数轴上分析得 $\beta<-1$，$\alpha=2$，其中 α、β 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根. 涉及方程根的分布，最常见的思维方法就是利用函数图象进行讨论，本例即方程一根为 2，一根小于 -1，化归为函数 $f(x)=x^2+px+q$ 的图象在 $x=2$ 时，$f(2)=0$；函数图象与 x 轴有两个交点；其中在 $x=-1$ 处函数值小于零.

二、符号语言、图象语言和日常用语间的转换

同一种数学概念、定理、技能有不同的表述形式. 如最高次数是二次的整式函数，用日常用语称之为二次函数，用符号语言可表述为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，而用图象语言可表述为一条抛物线. 同样符号语言，二次函数还能表示为：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1、x_2 为抛物线与 x 轴交点的横坐标；$y=a(x-k)^2+m$，其中 (k, m) 为抛物线顶点坐标. 在具体问题中，二次函数还可有其他符号语言的表述形式. 符号语言、图象语言和日常用语，它们是数学学习中经常运用的三种语言，而且有着各自的特点. 符号语言比较简洁、严谨，它有利于正确的表达和进行推理；图象语言易产生清晰的视觉形象，它能直观地表示概念、定理的本质及相互之间关系；日常用语比较自然、生动，它能将问题所研究的对象的含义在头脑中更加明白地刻画出来，有助于启迪思路.

如果问题的叙述以抽象的字母或符号语言出现，常见的数学思维方法往往是先画出草图(诸如集合的文氏图、数轴或直角坐标上的点及曲线、几何体的直观图等)，或将问题表述为日常用语，以探索思路. 如果问题是以日常用语形式表述的，尤其是应用问题，为了便于

计算与推理，则引进字母变量或建立数学模型便是常见的数学思维方法. 至于几何问题，离开符号语言更是寸步难行. 数学思维最常见的方法，表现为各种语言之间的转换，并以此摆脱思维受阻的困境，应该说各种语言运用与转换的熟练程度也是思维敏捷性和深刻性的表现.

典型例题

例3 有关 A、B 两件事向 50 名学生调查. 赞成 A 的占全体人数$\frac{3}{5}$，其余不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余不赞成；又对 A、B 都不赞成的人数比 A、B 都赞成的人数的三分之一多 1 人. 问：A、B 都赞成的人数有多少？

【思维过程】 若把赞成 A 的学生用集合 A 表示，把赞成 B 的学生用集合 B 表示，仅从日常用语沟通问题中的三个条件，难以理出头绪. 于是试图从文氏图给于直观的思维支撑(如图 1-2).

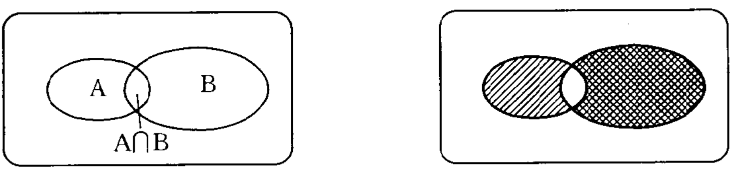


图 1-2

(1) 赞成 A 的占全体人数$\frac{3}{5}$，这项已知条件可用 $50\times\frac{3}{5}=30$ 人表示.

(2) 令 $A\cap B$ 的人数为 x，可将日常用语转化为符号语言，集合 A 中打斜线部分为 $(30-x)$；集合 B 中打叉线部分为 $(33-x)$；对 A、B 都赞成的人数为 x，则对 A、B 都不赞成人数为 $\left(\frac{x}{3}+1\right)$. 以上 4 项的人数之和即为全班人数，以此建立等量关系.

[解] 令赞成 A、B 的学生分别用集合 A、B 表示，且 $A\cap B$ 的

元素个数为x.由图1-2可知

$$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50.$$

解得　$x=21$(人)

故A、B都赞成的人数有21人.

【思维方法评析】 本题把涉及的数量关系归结为集合问题,是思维切入点.然而问题中数量关系较多,怎样使抽象的数量关系具体化,借助图象语言是常用的思维方法.正基于此,本例用集合的文氏图支撑抽象的数量关系的沟通,其思路的萌发就会自然产生.又如例2,涉及的数量关系也甚抽象,而转化为图象语言,用数轴来支撑思维,就显得直观多了.

例4 若抛物线$y=x^2+ax+2$与连接$M(0,1)$、$N(2,3)$的线段(包括M、N两点)有两个相异的交点,求a的取值范围.

【思维过程】 (1) 日常用语:"连接$M(0,1)$、$N(2,3)$的线段"可转化为过M、N的直线在M、N之间的部分,然后转化为符号语言$y=x+1$, $x\in[0,2]$.

(2) 日常用语:"$y=x^2+ax+2$与连接$M(0,1)$、$N(2,3)$的线段有两个相异的交点"转化为符号语言"$\begin{cases}y=x^2+ax+2,\\y=x+1.\end{cases}$ $x\in[0,2]$有两个解"思路便打开了.

[解] 如图1-3,过$M(0,1)$、$N(2,3)$的直线方程为$y=x+1$,要使抛物线$y=x^2+ax+2$与线段MN有两个相异的交点,必须且只须

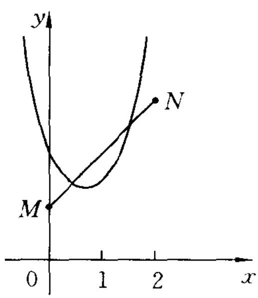


图1-3

$$\begin{cases}y=x^2+ax+2,\\y=x+1.\end{cases}\quad x\in[0,2]$$

有两个实数解.即方程

$$x^2+ax+2=x+1,$$

$$x^2+(a-1)x+1=0.$$

当$x\in[0,2]$时有两个相异实数解.

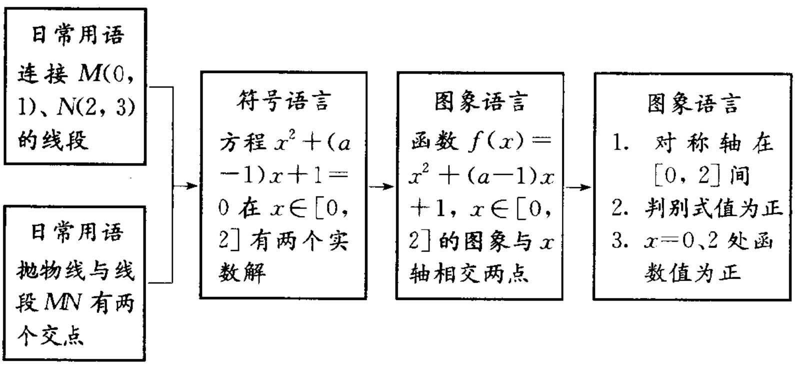
令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，当 $f(x)$ 满足下列条件

$$\begin{cases}0<-\dfrac{a-1}{2}<2,\\ \Delta=(a-1)^2-4>0,\\ f(0)=1\geqslant 0,\\ f(2)=2a+3\geqslant 0\end{cases}\quad \text{时，}$$

满足题设. 解上面方程组，得 a 的取值范围为

$$-\frac{3}{2}\leqslant a<-1.$$

【思维方法评析】 本例是典型的各种语言的转换：



由此可以悟出在类似的问题中，各种语言之间的转换能力的训练是提高思维能力的途径.

三、关键字句的斟酌

考察数学问题的解决过程，我们都曾遇到过思维经历瓶颈的状态，在几个字或一句话前百思不得其解. 而经人指点后即刻产生豁然开朗之感. 数学问题中这类句子或字，我们称为关键字句.

在数学问题的编拟过程中，为了考核学生的观察能力、分析能力，检查对概念中各项条件的理解，了解对基本技能的掌握水平，编题者往往要变换概念的表现形式，精简命题从条件到结论的中间环

节，肢解命题各项条件之间的联系，隐去问题涉及的数学思想的背景. 这种情况下，就需要我们透过问题叙述的字句去发掘这些本质与规律. 如果是相当熟悉而简单的问题，很难考验你的数学思维能力，而正是编题者从上述思考出发，创设的数学情境，对学生形成关键词句斟酌能力的要求.

对关键字句进行推敲，首先明确它主要形式有哪些？我们认为主要包括以下五个方面：

(1) 概念中容易疏忽的限定词. 如二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$，其中 $a \neq 0$ 便是限定词，又如例 6 中，涉及共轭虚根成对出现的条件是实系数一元 n 次方程，其中限定词是“实系数”，而复系数一元 n 次方程不一定有此性质.

(2) 问题中陌生的、抽象的词语、记号，它们往往有数学背景，课本上没有现成概念或记号. 理解这些陌生的、抽象的词语、记号往往成了思路形成的关键. 诸如例 5 中，区间 I_k 上函数解析式表示就是一例.

(3) 问题中易疏忽的特殊位置或特殊情况. 它们常是思维的盲点.

(4) 相近的基本概念之间的些微差别. 概念之间即便是一字之差，其内涵就不尽相同，漠视这些细微差别，思维便差之千里.

(5) 定理成立的每一项前提或条件.

典型例题

例 5 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k \in \mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,\ 2k+1]$，已知当 $x \in I_0$ 时，$f(x) = x^2$.

(i) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式；

(ii) 对自然数 k，求集合 $M_k = \{a \mid$ 使方程 $f(x) = ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数解$\}$.

【思维过程】 使人感到困惑的主要原因是对 I_k、M_k 这些符号比较陌生. 对关键符号如果感到陌生、抽象，那么有效的方法是将它们的含义具体化.

(1) 为求 $I_k = (2k-1,\ 2k+1]$ 上 $f(x)$ 解析式，可先考察在 I_0、I_1、I_2 上的 $f(x)$ 解析式：

在 $I_0=(-1,1]$ 上，$f(x)=x^2$；

在 $I_1=(1,3]$ 上，由周期性，相当于将 $y=x^2$ 的图象向右平移 2 个单位，得 $f(x)=(x-2)^2$；

在 $I_2=(3,5]$ 上，同理，相当于将 $y=x^2$ 的图象向右平移 4 个单位，得 $f(x)=(x-4)^2$；

于是在 $I_k=(2k-1,2k+1]$ 上，当 $k>0$ 时，相当于将 $y=x^2$ 的图象向右平移 $2k$ 个单位，得 $f(x)=(x-2k)^2$.

(2) 求 $M_k=\{a\mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数解，其中 $k\in\mathbf{N}\}$，同样对 M_k 这个陌生的记号，仍可将它具体化. 注意到 $f(x)=(x-2k)^2$，$x\in I_k$，问题即可理解为 $(x-2k)^2=ax$ 在 $(2k-1,2k+1]$ 上有两个不相等实数解，求 a 的范围，这样思路便易产生.

[解] (i) 已知 $f(x)=x^2$，$x\in(-1,1]$，且 $y=f(x)$ 是以 2 为周期的函数，故在 $I_k=(2k-1,2k+1]$ 上，当 $k>0$ 时，$y=f(x)$ 的图象相当于把 $y=f(x)$ 在 I_0 上的图象向右平移 $2k$ 个单位，于是

$$f(x)=(x-2k)^2,\ x\in I_k.$$

(ii) 由题意，即求 a 的范围，使 $(x-2k)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数解，其中 $k\in\mathbf{N}$.

事实上，令 $y=ax$，$y=(x-2k)^2$，求在 $(2k-1,2k+1]$ 上两函数图象有两个不同交点.

如图 1-4，当 $a>0$ 时，若直线 $y=ax$ 的斜率小于等于直线 OA 的斜率(其中 A 点坐标为 $(2k+1,1)$)，则 $y=ax$ 与 $y=(x-2k)^2$ 的图象在 $(2k-1,2k+1]$ 上有两个不同交点.

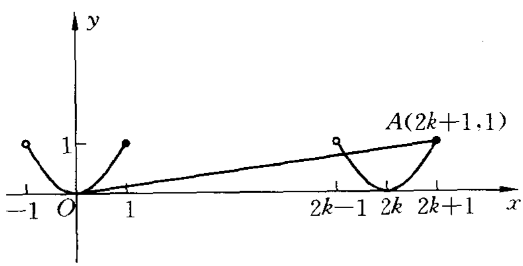


图 1-4