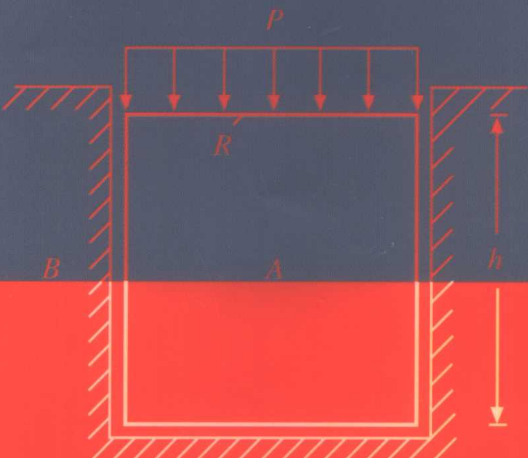
D.Gross W.Schnell
W.Ehlers P.Wriggers 合著

工程力学公式与习题

第2册

弹性静力学和流体静力学

姚振汉 王宝玺 译



TUP
清华大学出版社
Springer

工程力学公式与习题

第2册　弹性静力学和流体静力学

D. Gross　W. Schnell
W. Ehlers　P. Wriggers　合著
姚振汉　王宝玺　译

TUP
清华大学出版社

Springer

(京)新登字 158 号

中文书名：工程力学公式与习题　第 2 册　弹性静力学和流体静力学
原著书名：Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik
2 Elastostatik, Hydrostatik

北京市版权局著作权合同登记号：01-2001-1567 号

书　　名：工程力学公式与习题　第 2 册　弹性静力学和流体静力学
作　　者：D. Gross 等著　姚振汉　王宝玺　译
出 版 者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：孙　礼
印 刷 者：清华大学印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：850×1168 1/32　印张：6.25　字数：165 千字
版　　次：2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05852-0/O・268
印　　数：0001～6000
定　　价：15.00 元

序

迅速发展的中国需要工程师.在中国迈向高度工业化国家的过程中,工程师面临新的技术挑战.静力学、材料力学和动力学组成的工程力学,是许多工程科学的基石.力学使工程师们能够通过计算,预计在力的作用下结构与部件的性能及其运动.为此,未来的工程师们需要坚实的基础知识、分析能力和创造性.这样的素养只能通过练习和实践来培养.因此,学生们通常需要在独立地解决问题之前,尝试着去求解一些算例.我们期望他们取得成功.

感谢中国的同行们翻译了这三本书,也感谢清华大学出版社和施普林格出版社,感谢他们为本书在中国的出版所付出的努力.

德国,达姆斯塔特,2002 年春

D. Gross

W. Ehlers

P. Wriggers

第5版前言

这套习题集是为学生学习和准备考试而编写的. 在这第2册《弹性静力学和流体静力学》中,我们给学生提供进一步的学习材料.

弹性静力学的取材范围主要涵盖大学和高等专科学校工程力学基础课第二学期的内容. 对弹性静力学的研究,通常只有同时利用平衡条件、材料定律以及运动关系,才能求解这类静力学问题. 本课程注重对基本概念和研究方法的理解,内容限于线弹性体的小变形问题. 书中选择了大量的弹性静力学例题,特别是研究杆、梁以及简单的平面问题等结构部件. 由实际结构简化为计算模型的问题在此不进行讨论.

和这套习题集的第1册一样,也要告诫某些人,不要以为只要浏览习题的解答就可理解工程力学,那只是一种幻想. 学习者只有独立地求解习题,实在做不出来的时候再去看一下书中的解题思路,这本习题集才有它的意义.

当然,这本习题集不能代替教科书. 如果你对一个公式或者一种方法的建立不熟悉,那么你必须去掌握教科书中的有关内容,或者去找各种参考书. 本书目录后有一些参考文献供你选择.

本书前3版由BI科学出版社出版,从第4版起由施普林格出版社负责出版. 与新参与的作者一起,此版对习题集进行了全面的修改,并增加了第7章(流体静力学). 另外在第3章(弯曲)中删去了惯性矩部分,对此可以参看第1册的第9章.

我们感谢施普林格出版社与我们很好的合作和对书籍很好的编排与装帧,还出版了我们编写的工程力学教科书.我们也希望感兴趣的读者能友好地接受这一新版.

Darmstadt und Stuttgart, 1998 年 1 月

D. Gross　W. Schnell　W. Ehlers　P. Wriggers

中译版序

“工程力学”作为工程学科的一门基础课程，在培养工程师的过程中，起着重要的作用.它为后续的工程类课程铺设了路基.学生们在学习“工程力学”课的过程中，通过练习和解题，掌握工程力学的基本概念和分析方法.这些概念与方法在工科的后续课程中，既是基础性的知识，也是解决各类工程结构与构件的受力、变形与运动的基本方法.《工程力学的公式与习题》是“工程力学”课程的一个要素，一个重要的组成部分.

德国达姆斯塔特工业大学的工程力学基础教学可追溯到1820年，可谓历史悠久.这一套工程力学的例题与习题集在该校已使用多年，在德国的其他工业大学也多采用，目前已出第5版，它汇集了德国同行及学生们在工程力学课程中教与学的经验.与同类书籍相比，本书有以下鲜明的特点：一是少而精，抓住基本概念与基本演算，由浅入深地加以阐述演示，不追求面面俱到，不追求题型的各种变化.抓住了主要概念与主要分析方法，将题型的多样演化让学生去发挥.不求学生在题型上“见多识广”，集中于学生基本功的训练.二是作者们将静力学、材料力学与动力学综合在一起，有分工，又有呼应地将工程力学三部分内容一体化.将相关的内容统一设计，逐步展开.三位作者对这三部分内容都有长年的教学经验.基于以上理由，这是一套有特色的书，我很高兴地将它推荐给国内读者.于是我邀请清华大学工程力学系任文敏教授、姚振汉教授、陆明万教授，分别翻译了工程力学第1,2,3册.他们长期从事工程力学的教学与研究工作，并在20世纪80年代分别获得联邦德国(或瑞士)的工程博士学位.由他们翻译这一套书，可谓教、学与研究结合，中文与德文互通，真是难得.我在此对他们在

教学与研究工作十分繁忙的情况下，利用业余时间及假期，使这一套书得以译就，表示深深的感谢.

希望这一套书对从事工程力学的教与学的师生们能有所帮助.

余寿文

2002 年 1 月于清华园

参考文献与符号

参考文献

教　科　书

1 Brommund E, Sachs G. Technische Mechanik, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1991

2 Bruhns Q T, Lehmann Th. Elemente der Mechanik Ⅱ, Band 2: Elastostatik. Vieweg, Braunschweig 1994

3 Gere J M, Timoshenko S. Mechanics of Materials, 4th Edition. PWS Publishing Company, Boston 1997

4 Gummert P, Reckling K A. Mechanik, 3. Auflage. Vieweg, Braunschweig 1994

5 Hagedorn P. Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre, 2. Auflage. Harri Deutsch, Thun 1995

6 Hahn H G. Technische Mechanik fester Körper, 2. Auflage. Hanser 1992

7 Magnus K, Müller H H. Grundlagen der Technischen Mechanik, 6. Auflage. Teubner, Stuttgart 1990

8 Pestel E, Wittenburg J. Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre, 2. Auflage. B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992

9 Schnell W, Gross D, Hauger W. Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik, 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1995

习　题　集

10 Bruhns O T. Aufgabensammlung Technische Mechanik Ⅱ, Band 2: Festigkeitslehre für Bauingenieure und Maschinenbauer.

Vieweg, Braunschweig 1996
11 Dankert H, Dankert J. Technische Mechanik, Computerunterstützt, 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 1995
12 Hagedorn P. Aufgabensammlung Technische Mechanik, 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 1992
13 Hauger W, Lippmann H, Mannl V. Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3. Springer-Verlag, Berlin 1991
14 Lugner P, Desoyer K, Novak A. Technische Mechanik. Aufgaben und Lösungen, 4. Auflage. Springer-Verlag, Wien 1992

符号

在习题解答中采用下列符号：

$\uparrow$：表示在箭头方向所有力的总和等于零.

$\overset{\curvearrowleft}{A}$：表示对于参考点 A 的所有力矩的总和等于零.

$\leadsto$：表示由此导出.

目　　录

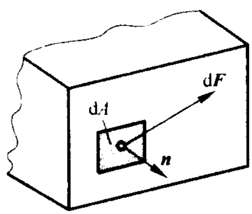
1 应力、应变与弹性定律

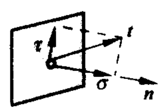
1.1 应力与平衡条件

应力是作用在截面的单位面积上的力. **应力矢量** $\boldsymbol{t}$ 定义为

$$\boldsymbol{t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}A},$$

式中：$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$——作用在单位面积 $\mathrm{d}A$ 上的力，Pa（$1\mathrm{Pa}\equiv1\mathrm{N/m^2}$）.





注意：应力矢量及其分量与截面方向（截面法线矢量 $\boldsymbol{n}$）有关.

应力矢量的分量：

σ ——正应力（垂直于截面的应力分量）；

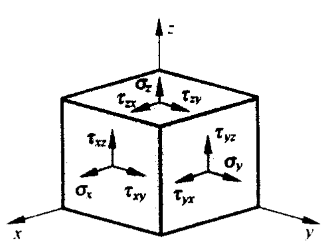
τ ——剪应力（在截面内的应力分量）.

符号规定：应力分量的正值表示为作用在截面正侧的正向分量，或在截面负侧的负方向分量.

空间应力状态：可通过 3 个互相正交截面上的应力矢量（分量）完全确定.

应力矩阵：

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$



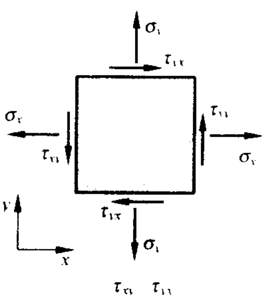
根据力矩平衡条件，有

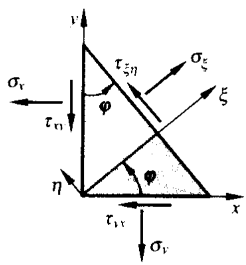
$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{xz}=\tau_{zx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}.$$

应力矩阵的分量是一个**二阶张量**的分量，由于 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$，该张量是**对称张量**.

平面应力状态：可通过两个互相正交截面上的应力矢量（分量）完全确定. 在第三个方向（此处为 z 方向）上的应力分量均为零（$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$），

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{bmatrix}.$$





坐标转换公式

$$\sigma_\xi=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi+\tau_{xy}\sin 2\varphi,$$

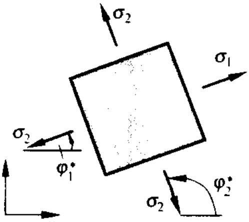
$$\sigma_\eta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi-\tau_{xy}\sin 2\varphi,$$

$$\tau_{\xi\eta}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi.$$

主应力（极值主应力）

$$\boxed{\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}},$$

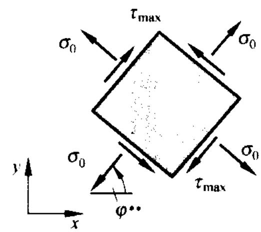
$$\boxed{\tan 2\varphi^*=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}}.$$



注意:

- 在这些截面上剪应力为零!
- 主应力方向之间互相正交: $\varphi_1^*, \varphi_2^* = \varphi_1^* \pm \frac{\pi}{2}$.

最大剪应力



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\varphi^{**} = \varphi^* \pm \frac{\pi}{4}.$$

在这些截面上正应力的值为

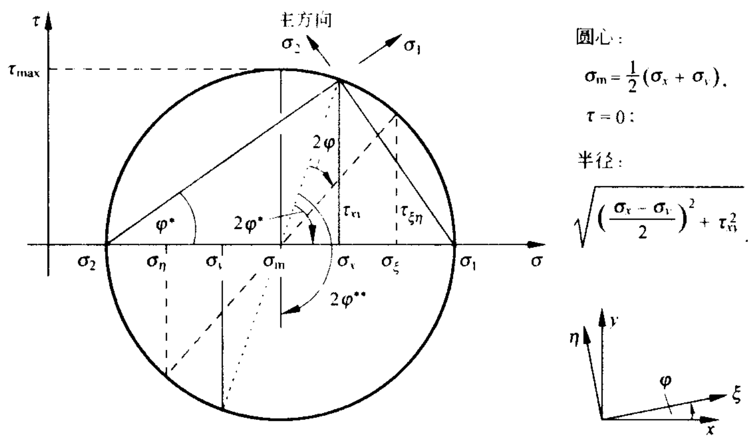
$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y)/2.$$

应力不变量

$$\mathrm{I}_\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$\mathrm{II}_\sigma = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}^2 = \sigma_1 \sigma_2.$$

莫尔应力圆



- 莫尔圆总可以根据 3 个独立的量(例如 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 或 $\sigma_x, \sigma_y, \varphi^*$)画出.
- 剪应力 τ_{xy} 为横坐标 σ_x 处的纵坐标($\tau_{\xi\eta}$ 为 σ_ξ 处的纵坐标).
- 变换角 φ 可以在圆上反方向加倍(2φ)画出.

平衡方程

空间问题(三维情况)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{aligned}\right\}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=0.$$

平面问题(二维情况)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=0.$$

其中

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}=\sum_i\left(\frac{\partial\sigma_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{iy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{iz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_i.$$

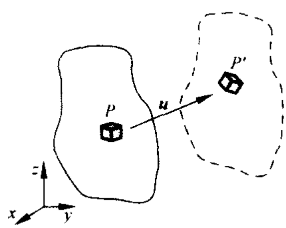
1.2 应变

应变描述立方体体积单元的边长变化(相对伸长)和角度变化(剪切变形,角应变).

位移矢量

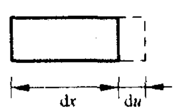
$$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{e}_x+v\boldsymbol{e}_y+w\boldsymbol{e}_z$$

式中:u,v,w——位移分量.



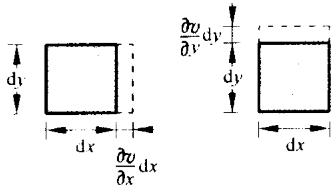
单轴应变状态

相对伸长 $\boxed{\varepsilon=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$.

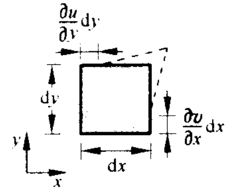


双轴应变状态

$$\boxed{\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}},\quad\boxed{\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}},\quad\boxed{\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}}.$$



相对伸长



角应变

三轴应变状态

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

应变矩阵

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

注：

- 应变和应力同是一个**二阶对称张量**的分量．由此可以将应力张量的所有特性（如坐标转换公式等）比拟到应变张量：$\sigma_x \to \varepsilon_x$，$\tau_{xy} \to \gamma_{xy}/2$ 等．
- 对于**平面应变状态**，有 $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$．

1.3 弹性定律

实验测定的应力和应变之间的线性关系用胡克弹性定律来描述．其适用范围受**比例极限**（单轴情况为 σ_p）的限制．弹塑性材料的比例极限大多和**屈服极限**（单轴情况为 σ_F）相重合．

单轴应力状态(杆、梁)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}.$$

式中：E——弹性模量；

α_T——热膨胀系数；

ΔT——温度的增量.

平面应力状态

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_T \Delta T,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_T \Delta T,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

剪切模量：$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$,

式中：ν 为横向伸缩系数(泊松比).

三轴应力状态

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha_T \Delta T,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \Delta T,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}.$$

一些材料常数

表 1.1 几种材料的常数

材料	E/MPa	ν	α_T/℃$^{-1}$
钢	2.1×10^5	0.3	12×10^{-6}
铝	0.7×10^5	0.3	23×10^{-6}
铜	1.2×10^5	0.3	16×10^{-6}
水泥	0.3×10^5	0.15～0.30	10×10^{-6}
木材	0.1×10^5		3×10^{-6}～9×10^{-6}

说明：$1\,\mathrm{MPa}=10^6\,\mathrm{Pa}=10^3\,\mathrm{kN/m^2}=1\,\mathrm{N/mm^2}$.