成人高等教育系列教材

# 高等数学复习指导

主　编　陈凤平
副主编　洪潮兴　吴　满

华南理工大学出版社
·广州·

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学复习指导/陈凤平主编.—广州：华南理工大学出版社，2002.6
(成人高等教育系列教材)
ISBN 7-5623-1816-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 031511 号

**总 发 行**：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行电话：020-87113487　87111048（传真）
**E-mail**：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
**责任编辑**：乔 丽
**印 刷 者**：广东省农垦印刷厂
**开　　本**：850×1168　1/32　**印张**：10.875　**字数**：280 千
**版　　次**：2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
**印　　数**：1～5000 册
**定　　价**：16.00 元

# 前　言

本书是根据国家教委高等工程专科教育《高等数学课程教学基本要求》及广东省高等教育自学考试工科各专业的《高等数学考试大纲》为考生应试复习而编写的。内容与作者所编教材同步，紧扣考点按章把课本中的重要概念、定理及公式加以归纳整理，突出重点、难点问题的剖析，使考生能较快地掌握所学内容。

围绕知识点、考核点精选例题，通过范例解析让考生明晰解题思路，掌握运算技巧，尽快提高独自解题的能力。

针对考试题型精心设计同步自测题，让考生熟悉题型、了解难度，有利于针对性复习，实用性强。自测题解答简明、扼要，得分点突出、明确。

本书是专科各专业学生备考用的复习指导书。其内容与深度也适合少学时的本科学生，是成人本科申请学士学位应试者复习备考的重要参考书。

本书由陈凤平主编，洪潮兴、吴满任副主编，参加编写的还有温旭辉、傅一平、杨立洪、杨晓炜老师。本书凝集众多常年在高等数学教学第一线老师们的经验，出版社乔丽同志为本书的编辑、出版付出辛勤的劳动，在此致以诚挚谢意。

由于我们水平所限，书中难免有不足与不当之处，恳请专家、读者批评指正。

编　者

2002 年元旦

# 目　　录

# 第一章　函数、极限与连续

## 第一节　内容提要

### 一、函数概念

如果两个变量 $x$ 与 $y$ 之间有一个对应法则 $f$，使变量 $x$ 在其可取值的数集 $X$ 内每取一个值时，变量 $y$ 按照这个对应法则总有确定的对应值，则称 $f$ 是定义在数集 $X$ 上的函数. 记为

$$y=f(x),\quad x\in X$$

函数的两个要素是：

①定义域——自变量 $x$ 的可取数集 $X$(属于实数集 $\mathbf{R}$)；

②对应法则——自变量与因变量之间的函数关系 $f$.

对应法则是理解函数概念的关键，对应法则的形式没有限制.

若函数的对应法则是解析表达式 $y=f(x)$的，可称函数是显函数.

若函数的对应法则是由方程 $F(x,y)=0$ 确定，可称 $y$ 为 $x$ 的隐函数.

若函数的对应法则是由几个解析表达式来表示的，如

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & 当\ x\leqslant 0 \\ \ln x, & 当\ 0<x\leqslant 1 \\ x-1, & 当\ 1<x \end{cases}$$

则称 $f(x)$ 为分段函数.

若对应法则是通过表格或图形来表示的,则常称为函数的表格或图形表示法.

若变量 $x$ 与 $y$ 通过第三个参变量 $t$ 的联系而成为函数,如

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

则称这是由参数方程表示的函数.

如果 $a$ 是函数 $f(x)$ 定义域内的一点,则说函数 $f(x)$ 在点 $a$ 处有定义,并用 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 表示与 $a$ 对应的函数值.

## 二、函数的特性

研究函数时应注意它是否具有某些特性,这会给研究带来方便.特性包括有界性、奇偶性、单调性以及周期性,今后将会经常论及并应用这些特性。

### 1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有定义,如果存在正数 $M$,使得当 $x$ 取 $X$ 中任何一个值时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有界.否则,称 $f(x)$ 在 $X$ 上无界.

**注意** ①数集 $X$ 可以是 $f(x)$ 的整个定义域,也可以是定义域的一部分.

②一个函数是否有界,不仅与函数本身的构造有关,还与所讨

论的数集 $X$ 有关.如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界,而在 $[1,+\infty)$ 内有界.

③若 $f(x)$ 在 $X$ 上有界,那么它的界不是惟一的,所以,定义中的 $|f(x)|\leqslant M$ 也可换成 $|f(x)|<M$.

### 2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $X$ 关于原点对称,若对一切 $x\in X$,都有

$$f(x)=f(-x)$$

则称 $f(x)$ 是偶函数,若恒有

$$f(x)=-f(-x)$$

则称 $f(x)$ 是奇函数.

**注意** ①偶函数的图形关于 $y$ 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

②若 $f(x)$ 是奇函数,且 $f(0)$ 有定义,则 $f(0)=0$.

③若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(x)+c$ 还是偶函数,其中 $c$ 可以是任意给定的某一实数.

### 3. 函数的单调性

设 $x_1<x_2$ 是区间 $I$ 上的任意两点,若恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad \text{或} \quad f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调增加或单调减少.

在定义域上,单调增加(或单调减少)的函数称为单调函数.如 $y=x^3$ 是单调函数,它在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加;而 $y=\frac{1}{x}$ 不是单调函数.

### 4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的实数 $T$，使得关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

对于定义域内的任何 $x$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 使上式成立的最小正数 $T$ 为该函数的周期.

若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $T$ 为周期的函数，则 $F(x)=f(ax+b)$ 也是周期函数，周期是 $\frac{T}{a}$（其中 $a>0$，$b$ 为实数）.

若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是周期分别为 $T_1,T_2$ 的周期函数，且 $\frac{T_1}{T_2}$ 是有理数，则 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 也是周期函数，其周期 $T$ 为 $T_1$ 与 $T_2$ 的最小公倍数.

## 三、反函数

设有函数 $y=f(x)$，若在它的值域 $E$ 内每取定一个 $y$ 值 $y_1$，按关系式 $y=f(x)$ 有惟一确定的 $x$ 值 $x_1$ 与之对应，即 $x_1$ 适合 $f(x_1)=y_1$，则 $y=f(x)$ 确定了一个以 $y$ 为自变量、以 $x$ 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数.

$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 表示了变量 $x$ 与 $y$ 之间的同一种数量关系，但函数的对应法则 $f$ 与 $\varphi$ 却是两个不同的法则，因此，与之相应的函数 $f(x)$ 与 $\varphi(y)$ 表示的是不同的函数关系. 习惯上，又常以 $x$ 作为自变量，故常将反函数 $\varphi(y)$ 记为 $\varphi(x)$.

## 四、求极限的方法

这部分将结合例题在范例解析中加以归纳总结.

## 五、函数的连续性

### 1. 连续性的概念

设 $f(x)$在 $x_0$ 及其邻域内有定义,则 $f(x)$在 $x_0$ 处连续是指

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

或

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

可见函数在点 $x_0$ 处有极限与连续的关系是:

$$\text{连续}\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}\text{有极限}$$

上式又等价于

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处左连续;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处右连续.

显然,$f(x)$在点 $x_0$ 处左连续且右连续$\Longleftrightarrow f(x)$在点 $x_0$ 处连续.

若 $f(x)$在区间 $I$ 内的每一点 $x$ 处都连续,则称 $f(x)$是区间 $I$ 上的连续函数.

### 2. 间断点及其分类

若 $f(x)$在点 $x_0$ 处不连续,但在 $x_0$ 的某去心邻域内有定义,则称 $x_0$ 为 $f(x)$的间断点.

间断点分为两大类:若在 $f(x)$的间断点 $x_0$ 处,左极限 $f(x_0-0)$及右极限 $f(x_0+0)$分别存在,则称 $x_0$ 是 $f(x)$的第一类间断点.此时,$f(x_0-0)=f(x_0+0)$,但却不等于$f(x_0)$或

$f(x_0)$不存在，这样的间断点又叫做可去间断点；而$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$的间断点叫做跳跃间断点.

左极限$f(x_0-0)$及右极限$f(x_0+0)$中至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.无穷间断点、振荡间断点都是第二类间断点.

初等函数没有定义的孤立点是间断点.分段函数的分段点可能是间断点，也可能是连续点，需具体判定.

### 3. 闭区间上连续函数的性质

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则：

(1)必存在$x_1\in[a,b]$使$M=f(x_1)\geqslant f(x)\ (x\in[a,b])$；

(2)必存在$x_2\in[a,b]$使$m=f(x_2)\leqslant f(x)\ (x\in[a,b])$；

将(1),(2)合并可得$f(x)$必在$[a,b]$上取得最大值及最小值.

(3)若再有$f(a)\cdot f(b)<0$，则必存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=0$（函数取零值定理）.

(4)若$C$适合$[f(a)-C][f(b)-C]<0$，则存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=C$（介值定理）.

(5)若$C$适合$m\leqslant C\leqslant M$，则存在$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=C$（介值定理推论）.

## 第二节　范例解析

**例 1**　下列函数均属于$y=ax+b$的类型，试根据$x,y$所代表的实际意义确定其定义域.

(1)从地面以初速度$v_0$垂直上抛一个质点，质点的速度$y$与

时间 $x$ 的关系为

$$y=v_0-gx$$

若记 $T_0=\dfrac{v_0}{g}$,则当 $x=T_0$ 时质点达到最高点,再经过时间 $T_0$,质点回到地面.故所给函数的定义域是 $D_1:[0,2T_0]$.

(2)在平面直角坐标系下,直线上点 $(x,y)$ 的坐标满足关系

$$y=kx+b$$

直线上点的坐标中的 $x$ 可取任意实数.故所给函数的定义域为 $D_2:(-\infty,+\infty)$.

**例 2**　求函数 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{2+x}{4-x}}+\ln(2+x-x^2)$ 的定义域.

**分析**　所给函数是由纯数学式表示的初等函数.它的定义域就是在实数范围内使该数学式的所有运算都有意义的所有 $x$ 值的集合.

**解**　(1)依对数函数要求 $2+x-x^2>0$,解得　$D_1:-1<x\leqslant 2$.

(2)作为分母 $4-x\neq 0$,解得　$D_2:x\neq 4$.

(3)依 $\sqrt{u}$ 的要求 $\dfrac{2+x}{4-x}\geqslant 0$,解得　$D_3:-2\leqslant x<4$.

(4)依 $\arcsin V$ 的要求 $\sqrt{\dfrac{2+x}{4-x}}\leqslant 1$,解得　$D_4:x\leqslant 1$.

故所求定义域为 $D=D_1\cap D_2\cap D_3\cap D_4=(-1,1]$.

**例 3**　设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & \text{当 } x\geqslant 0\\ 1+x^2, & \text{当 } x<0\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}\log_2 x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1\\ \sqrt{x^2-1}, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

**分析**　函数概念的要素之一是因变量 $y$ 与自变量 $x$ 之间的对应法则.函数记号 $y=f(x)$ 中的“$f(\quad)$”就表示这一法则.本例

要求我们在理解函数定义的基础上,依照对应法则计算复合函数的表达式.

**解** 先讨论 $f[g(x)]$.

因 $$f(x)=\begin{cases}2^x, & \text{当 } x\leqslant 0\\ 1+x^2, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

则 $$f[g(x)]=\begin{cases}2^{g(x)}, & \text{当 } g(x)\leqslant 0\\ 1+g^2(x), & \text{当 } g(x)>0\end{cases}$$

而当 $0<x\leqslant 1$, $g(x)=\log_2 x\leqslant 0$; 当 $x>1$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}>0$.

故 $$f[g(x)]=\begin{cases}2^{\log_2 x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1\\ 1+(\sqrt{x^2-1})^2, & \text{当 } x>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1\\ x^2, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

再讨论 $g[f(x)]$.

因 $$g(x)=\begin{cases}\log_2 x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1\\ \sqrt{x^2-1}, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}\log_2 f(x), & \text{当 } 0<f(x)\leqslant 1\\ \sqrt{f^2(x)-1}, & \text{当 } f(x)>1\end{cases}$$

而当 $x\leqslant 0$ 时 $0<2^x\leqslant 1$; 当 $x>0$ 时 $1+x^2>1$.

故 $$g[f(x)]=\begin{cases}\log_2 2^x, & \text{当 } x\leqslant 0\\ \sqrt{(1+x^2)^2-1}, & \text{当 } 0<x\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant 0\\ x\sqrt{2+x^2}, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

从上述解题过程可见,已知 $f(x)$、$g(x)$,要求 $f[g(x)]$本质上是由自变量 $x$ 对应的$f(x)$这一对应法则 $f$ 出发,试问按这一法则当自变量是 $g(x)$时对应什么? 解决这类问题只需用 $g(x)$替换 $f(x)$中的 $x$ 即可.

**例 4**　设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数并适合：①对任意 $x$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$；②$f(1)=a\ (a\neq 0)$，求 $f(0)$，$f(2)$及 $f(n)$($n$ 为整数).

**分析**　由已知条件①知 $f(2)$是关键数值，而具体值仅已知 $f(1)$，注意到 $f(x)$是奇函数，且$(-1)+2=1$，故有如下解法.

**解**　因 $f(x)$为奇函数，于是 $f(-1)=-f(1)=-a$.

故　$f(2)=-f(-1)+f(-1+2)=-(-a)+a=2a$.

而 $f(0)+f(2)=f(2+0)$，从而得 $f(0)=0$.

从已有的三个结果可推测 $f(n)=na$，应用数学归纳法：

假设 $n=0,1,2,\cdots,k-1,k$ 都有 $f(n)=na$，则当 $n=k+1$ 时

$$f(k+1)=f(2)+f(k-1)=2a+(k-1)a=(k+1)a$$

故对一切非负整数 $n$，都有 $f(n)=na$ 成立.

若 $m$ 为负整数，则 $-m$ 为正整数，则

$$f(m)=-f(-m)=-[(-m)a]=ma$$

综上所述，对一切 $n\in Z$ 都有 $f(n)=na$.

**例 5**　对下列函数作奇偶性判断，并使用下列约定记号作答.

(A)是奇函数，不是偶函数；　(B)是偶函数，不是奇函数；

(C)既非奇函数，亦非偶函数；(D)既是奇函数，亦是偶函数.

①$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；

②$y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$；

③$y=\arccos x\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$；

④$y=\ln[1+|x|+x]\arctan(|x|-x)$；

⑤$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

⑥$y=e^{\sqrt[3]{1-x^3}}+e^{\sqrt[3]{1+x^3}}$；

⑦$y=(\cos x+\sin x)^2$.

**分析**　判定函数奇偶性的根本在于比较 $f(x)$与 $f(-x)$之