

887264

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

● 弹性力学专题教材

弹性力学中的 复变函数方法

许嘉中

高等教育出版社

3325

—
0845

弹性力学专题教材

弹性力学中的复变函数方法

许蔚中

高等教育出版社

弹性力学专题教材
弹性力学中的复变函数方法

许翥中

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京顺义县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张2.625 字数63 000

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数 0 001—1 120

ISBN 7-04-000892-0/TB·51

定价0.80元

前 言

复变函数理论是解决弹性力学问题的有力工具，本书将介绍弹性力学平面问题的复变函数方法。此法将问题归结为寻找两个满足给定边界条件的复变解析函数。这两个解析函数除了用试选的方法确定以外，许多情况下，可以由边界条件直接求出。因此，它是解决弹性力学问题、特别是孔口和裂纹问题的一种有效的解析方法

本书是为工科院校学生和工程技术人员在学完《弹性力学简明教程》的基本内容以后，进一步学习而编写的。全书分三章，第一章扼要叙述本书用到的复变函数基础知识；后两章介绍弹性力学平面问题的复变函数方法及复变函数方法在线弹性断裂力学中的应用。

在本书编写过程中，得到杨桂通教授的指导和帮助。西安冶金建筑学院林家骥副教授和清华大学余寿文教授详细审阅书稿，提出许多宝贵意见。我校杨丽萍和王建平同志帮助绘制部分插图。在此，编者表示衷心感谢。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，望读者批评指正。

6/A050/01

目 录

第一章 复变函数基础知识	I
§ 1-1 复变函数	1
§ 1-2 柯西定理	5
§ 1-3 级数	8
§ 1-4 保角变换	11
§ 1-5 曲线坐标	14
§ 1-6 柯西公式	16
习题	18
第二章 平面问题的复变函数解答	19
§ 2-1 平面问题的基本方程	19
§ 2-2 用复变函数表示应力和位移的一般解	21
§ 2-3 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的确定程度	26
§ 2-4 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 表示的边界条件	27
§ 2-5 圆域问题的级数解答	30
§ 2-6 多连通域上的 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$	35
§ 2-7 多连通无限域上的 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$	39
§ 2-8 保角变换的应用	42
§ 2-9 有椭圆孔的无限大薄板	47
§ 2-10 一般孔口问题	57
小结	62
习题	63
第三章 复变函数方法在线弹性断裂力学中的应用	67
§ 3-1 基本概念	67
§ 3-2 张开型裂纹	69
§ 3-3 滑开型裂纹	72
§ 3-4 撕开型裂纹	74

习题.....77

参考书目.....78

附录

附录一	附录一
附录二	附录二
附录三	附录三
附录四	附录四
附录五	附录五
附录六	附录六
附录七	附录七
附录八	附录八
附录九	附录九
附录十	附录十
附录十一	附录十一
附录十二	附录十二
附录十三	附录十三
附录十四	附录十四
附录十五	附录十五
附录十六	附录十六
附录十七	附录十七
附录十八	附录十八
附录十九	附录十九
附录二十	附录二十
附录二十一	附录二十一
附录二十二	附录二十二
附录二十三	附录二十三
附录二十四	附录二十四
附录二十五	附录二十五
附录二十六	附录二十六
附录二十七	附录二十七
附录二十八	附录二十八
附录二十九	附录二十九
附录三十	附录三十
附录三十一	附录三十一
附录三十二	附录三十二
附录三十三	附录三十三
附录三十四	附录三十四
附录三十五	附录三十五
附录三十六	附录三十六
附录三十七	附录三十七
附录三十八	附录三十八
附录三十九	附录三十九
附录四十	附录四十
附录四十一	附录四十一
附录四十二	附录四十二
附录四十三	附录四十三
附录四十四	附录四十四
附录四十五	附录四十五
附录四十六	附录四十六
附录四十七	附录四十七
附录四十八	附录四十八
附录四十九	附录四十九
附录五十	附录五十
附录五十一	附录五十一
附录五十二	附录五十二
附录五十三	附录五十三
附录五十四	附录五十四
附录五十五	附录五十五
附录五十六	附录五十六
附录五十七	附录五十七
附录五十八	附录五十八
附录五十九	附录五十九
附录六十	附录六十
附录六十一	附录六十一
附录六十二	附录六十二
附录六十三	附录六十三
附录六十四	附录六十四
附录六十五	附录六十五
附录六十六	附录六十六
附录六十七	附录六十七
附录六十八	附录六十八
附录六十九	附录六十九
附录七十	附录七十
附录七十一	附录七十一
附录七十二	附录七十二
附录七十三	附录七十三
附录七十四	附录七十四
附录七十五	附录七十五
附录七十六	附录七十六
附录七十七	附录七十七
附录七十八	附录七十八
附录七十九	附录七十九
附录八十	附录八十
附录八十一	附录八十一
附录八十二	附录八十二
附录八十三	附录八十三
附录八十四	附录八十四
附录八十五	附录八十五
附录八十六	附录八十六
附录八十七	附录八十七
附录八十八	附录八十八
附录八十九	附录八十九
附录九十	附录九十
附录九十一	附录九十一
附录九十二	附录九十二
附录九十三	附录九十三
附录九十四	附录九十四
附录九十五	附录九十五
附录九十六	附录九十六
附录九十七	附录九十七
附录九十八	附录九十八
附录九十九	附录九十九
附录一百	附录一百

第一章 复变函数基础知识

本章将扼要介绍有关的复变函数知识。有的定理和公式未作推证，想要深入了解的读者可以看参考书[1]、[3]。

§ 1-1 复变函数

一、复变函数

任意一对有序实数 (x, y) 可以构成一个复数 $z = x + iy$ ；其中 x 、 y 分别称为 z 的实部和虚部，记作 $\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$ 。复平面上的点可以用复数 z 来表示，图1-1。

利用变换关系

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

可得 z 的三角表示式和指数表示式。

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

复数

$$\bar{z} = x - iy = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho e^{-i\theta}$$

称为 z 的共轭复数。显然，由 z 和 $\bar{z}$ 可以得出

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (1-1)$$

设有两个复变数 z 和 w ， z 可以在 z 平面的某一区域 D 内任意取值；如果对于每一个 z 值，复变数 w 有确定的值与之对应，则称 w 是复变数 z 的函数，记为 $f(z)$ 。将 $z = x + iy$ 代入后，分开实部和虚部可表示为

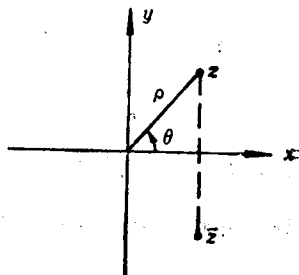


图 1-1

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y), \quad (1-2)$$

其中 u 和 v 是 x, y 的实函数。 $f(z)$ 的共轭为

$$\overline{f(z)}=u(x, y)-iv(x, y). \quad (1-2')$$

如果对于一个 z 值, 仅有一个 w 值与之对应, 则称 w 是 z 的单值函数; 否则称为 z 的多值函数。例如, 由复数的三角表示式可知, 用 $\theta+2k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$ 代替 θ , 不会改变 z 值, 即 z 可以表示为 $z=\rho e^{i(\theta+2k\pi)}$, 所以函数

$$w=\ln z=\ln \rho+i(\theta+2k\pi)$$

是 z 的多值函数。

二、导数

如果不管 Δz 按什么方式趋近于零时, 极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在, 并且其值不随 Δz 趋近于零的方式而改变, 则称 $f(z)$ 在 z 点可导, 并将上述极限值称为 $f(z)$ 在 z 点的导数, 记作 $f'(z)$ 或 $\frac{df}{dz}$ 。

由此定义出发, 可以得出与实变函数类似的求导法则和公式。

例1-1 求函数 $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ 的一阶导数。

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(z) &= \frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

设函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在 z 点可导。如果 Δz 沿 x 轴的方向趋近于零, 即令 $\Delta z=\Delta x \rightarrow 0$, 则可得

$$f'(z)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \right. \\
&\quad \left. + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right\} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1-3}
\end{aligned}$$

若令 $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} \right. \\
&\quad \left. + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right\} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1-4}
\end{aligned}$$

由于函数可导, 这两个极限值必定相等, 因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1-5}$$

上式称为柯西-黎曼条件。如果 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 z 点的一阶偏导数存在, 并且连续, 则复变函数 $f(z) = u + iv$ 在 z 点可导的充要条件是 u 和 v 在 z 点满足柯西-黎曼条件。

例1-2 求 $f(z) = e^z$ 的一阶导数。

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \frac{d}{dz}(e^z) &= \frac{d}{dz}[e^x \cos y + ie^x \sin y] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) \\
&= e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.
\end{aligned}$$

与按指数函数求导公式计算的结果一样。

由于 $\bar{z} = x - iy$, 所以只要将上面公式中的 y 改为 $-y$, 就可以得出函数对 $\bar{z}$ 求导的条件和公式。例如, 函数 $w(\bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y)$ 对 $\bar{z}$ 的导数为

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial P}{\partial y} \quad (1-6)$$

由式(1-2')、(1-6)和(1-3)可得

$$\frac{d\overline{f(z)}}{d\bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)} \quad (1-7)$$

如果 $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是 z 和 $\bar{z}$ 的函数, 则利用复合函数的求导法则, 并考虑式(1-1)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (1-8)$$

要注意, 这里条件(1-5)不成立。

三、解析函数

如函数 $f(z)$ 在 z_0 的某一个很小的邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析。若 $f(z)$ 在区域 D 的所有点解析, 就称函数 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数。区域 D 内的单值解析函数, 称作全纯函数或正则函数。单连通域内的解析函数必是单值函数。

§1-6节将说明: 某一区域内的解析函数的导数也是该区域内的解析函数, 因此, 任何解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部和虚部必存在连续的二阶偏导数。由柯西-黎曼条件(1-5)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

因此有

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = 0. \quad (1-9)$$

可见解析函数的实部和虚部都是调和函数。而且只要给出其中一个，就可以由柯西-黎曼条件求出另一个(常数项不确定)，因此称它们为共轭调和函数。在单连通域内，若给定的 u 或 v 是单值函数，则求出的共轭调和函数也是单值的；但是在多连通域内可能是多值的^[3]。

例1-3 已知函数 $H(z, \bar{z}) = h_1(x, y) + ih_2(x, y)$ 的实部和虚部有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0$ 。证明 H 是 z 的解析函数。

证 由式(1-8)可得

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \right\} = 0,$$

因此 $\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0,$

即 $\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\partial h_1}{\partial y},$

h_1 和 h_2 满足柯西-黎曼条件，所以 H 是 z 的解析函数。

§ 1-2 柯西定理

一、曲线积分

可以类似于实变函数那样定义复变函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分(图1-2)。为了求积分的值，可以先用参数方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

表示曲线 C ，其中 t 为实变数。设 C 的端点为 $z_0 = z(t_0)$ 和 $z_1 = z(t_1)$ ，

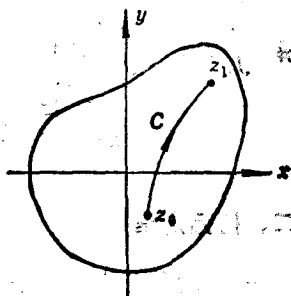


图1-2

则

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)] \cdot z'(t) dt. \quad (1-10)$$

例1-4 求 $\oint_C z^n dz$, 其中 n 为正整数, C 是以原点为圆心、半径等于1的单位圆周(图1-3)。

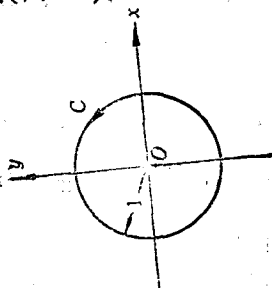


图1-3

解 在圆周 C 上, $\rho=1$; 因此, $z=\rho e^{i\theta}=e^{i\theta}$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$ 。

$$\oint_C z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

如果 $f(z)$ 是 D 域内的正则函数, 则利用下面的柯西定理可以证明积分值只取决于起点 z_0 和终点 z_1 , 与积分路线 C 无关。这时可以用类似于实函数的不定积分公式进行计算。

例1-5 求 $\int_C z^n dz$, 其中 C 如图1-2所示。

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_C z^n dz &= \int_{z_0}^{z_1} z^n dz \\ &= \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

二、柯西定理

例1-4中的积分为零不是偶然的, 它是下述定理的一个实例。

柯西定理(证明略): 若 $f(z)$ 是在一条分段光滑的简单闭曲线

C 内解析, 在包含 C 的闭区域上连续的函数, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (1-11)$$

容易将上述定理推广到复连通域的情况。例如 $f(z)$ 是在以 C_0 、 C_1 、 C_2 为边界的复连通域 D 内及边界上解析的函数, 若如图-4所示引进两条虚线, 将复连通域 D 切割成单连通域; 规定各边

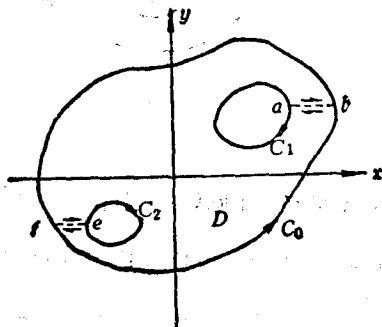


图 1-4

界的正方向如图中箭头所示, 即沿曲线正方向前进时, 区域 D 处于左侧。现在 $f(z)$ 是以 C_0 、 C_1 、 C_2 及两条虚线为边界的闭单连通域内的解析函数, 根据式(1-11)有

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \int_{a-b} f(z) dz \\ + \int_{b-a} f(z) dz + \int_{c-e} f(z) dz + \int_{e-c} f(z) dz = 0. \end{aligned}$$

显然沿每条虚线的两次方向相反的积分互相抵消, 由此可得

$$\oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

和式(1-11)对比可知, 只要将 C 理解为包含所有的边界曲线, 就可以将柯西定理推广应用于复连通域的情况。

例1-6 求 $\oint_{C_0} \frac{1}{z} dz$, 其中 C_0 是围绕原点的任意一条闭曲线, 图1-5。

解 由于 $\frac{1}{z}$ 在不含原点的任何区域上是解析的。现在以原点

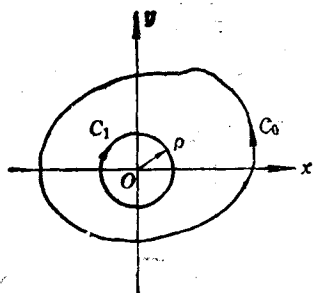


图 1-5

为圆心，用很小的半径 ρ 作圆 C_1 ，则在 C_0 与 C_1 为边界的闭复连通区域内， $\frac{1}{z}$ 是解析函数，根据上述定理可得

$$\oint_{C_0} \frac{1}{z} dz = - \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = - \int_{2\pi}^0 \frac{i \rho e^{i\theta} d\theta}{\rho e^{i\theta}} = 2\pi i.$$

§ 1-3 级数

一、复数形式的傅立叶级数

由高等数学已知，如果实变函数 $f(x)$ 在区间 $[0; 2\pi]$ 上具有有限个极值点或第一类间断点，则可以展开成傅立叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (1-12')$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

将

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

代入(1-12')式, 得

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{ikx} + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{-ikx} \right).$$

引入记号

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad a_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad a_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2},$$

可得复数形式的傅立叶级数

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad (1-12)$$

系数

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

现在考虑复数表达式 $f_1(\theta) + if_2(\theta)$, 其中 $f_1(\theta)$ 和 $f_2(\theta)$ 是实函数, 且可展为傅立叶级数:

$$f_1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

$$f_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta}, \quad d_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta;$$

若令

$$a_k = c_k + id_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-ik\theta} d\theta,$$

则有

$$f_1 + if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + id_k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}. \quad (1-13)$$

二、泰勒级数

复变解析函数和幂级数有密切的联系。幂级数在它的收敛域内必能表示一个解析函数；反之圆域内的解析函数总能展成幂级数。可以证明^[1]，如果函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心， R 为半径的圆域内解析，则对圆内任意一点 z 有

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k, \end{aligned} \quad (1-14)$$

其中 $f^{(k)}(z_0)$ 表示 $f(z)$ 在 z_0 点的 k 阶导数。级数(1-14)称为 $f(z)$ 的泰勒级数。

例1-7 将 $f(z)=\ln(1+z)$ 展成 z 的幂级数。

解 $f(z)$ 在原点的各阶导数值为

$$f'(0)=1, \quad f''(0)=-1, \quad \dots,$$

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!, \quad \dots$$

所以

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k.$$

函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 在点 $z=-1$ 无意义，所以上面的级数展开式仅在圆域 $|z|<1$ 内成立。

和实变函数的泰勒级数一样，不论用什么方法将解析函数展开成幂级数时，展开式是唯一的。如设 $f(z)$ 展开为级数：

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_k(z-z_0)^k + \dots,$$

令 $z=z_0$ ，即得 $f(z_0)=a_0$ ；将上式对 z 求导 k 次，再令 $z=z_0$ ，即

得

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k, \quad (k=1, 2, \dots).$$

可见系数 $a_k (k=0, 1, 2, \dots)$ 和式(1-14)中的系数相同, 因此展开式是唯一的。

泰勒级数展开要求函数在圆域内处处解析, 而对于圆环域内解析的函数, 可以展成下面的罗朗级数。

三、罗朗级数

如果函数 $f(z)$ 在环域 $R_1 < |z - z_0| < R_0$ 内解析, 则在此域内 $f(z)$ 能唯一地展开成罗朗级数:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1-15)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

式中的 C 表示以 z_0 为圆心, 半径为 $R (R_1 < R < R_0)$ 的任意圆周, 图1-6。对 C 的积分取逆时针方向。

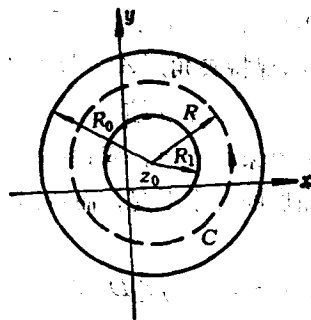


图1-6

§ 1-4 保角变换

用复变函数方法求解弹性力学问题, 常常要将被研究的区域