$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

● 弹性力学专题教材

弹性力学中的复变函数方法

许蔼中

高等教育出版社

弹性力学专题教材

弹性力学中的复变函数方法

许蕲中

高等教育出版社

弹性力学专题教材

弹性力学中的复变函数方法

许 蒨 中

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张2.625 字数63 000

1989年 5月第1版 1989年 5月第1次印刷

印数 0 001—1 120

ISBN7-04-000892-0/TB·51

定价0.80元

前　言

复变函数理论是解决弹性力学问题的有力工具，本书将介绍弹性力学平面问题的复变函数方法。此法将问题归结为寻找两个满足给定边界条件的复变解析函数。这两个解析函数除了用试选的方法确定以外，许多情况下，可以由边界条件直接求出。因此，它是解决弹性力学问题、特别是孔口和裂纹问题的一种有效的解析方法

本书是为工科院校学生和工程技术人员在学完《弹性力学简明教程》的基本内容以后，进一步学习而编写的。全书分三章，第一章扼要叙述本书用到的复变函数基础知识；后两章介绍弹性力学平面问题的复变函数方法及复变函数方法在线弹性断裂力学中的应用。

在本书编写过程中，得到杨桂通教授的指导和帮助。西安冶金建筑学院林家骥副教授和清华大学余寿文教授详细审阅书稿，提出许多宝贵意见。我校杨丽萍和王建平同志帮助绘制部分插图。在此，编者表示衷心感谢。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，望读者批评指正。

目　录

第一章　复变函数基础知识

本章将扼要介绍有关的复变函数知识。有的定理和公式未作推证，想要深入了解的读者可以看参考书[1]、[3]。

§1-1 复变函数

一、复变函数

任意一对有序实数(x、y)可以构成一个复数$z=x+\mathrm{i}y$；其中x、y分别称为z的实部和虚部，记作$\mathrm{Re}z$和$\mathrm{Im}z$。复平面上的点可以用复数z来表示，图1-1。

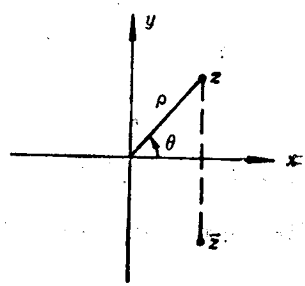

图 1-1

利用变换关系

$$x=\rho\cos\theta、y=\rho\sin\theta,$$

可得z的三角表示式和指数表示式。

$$\bar{z}=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\rho e^{\mathrm{i}\theta}。$$

复数

$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=\rho e^{-\mathrm{i}\theta}$$

称为z的共轭复数。显然，由z和$\bar{z}$可以得出

$$x=\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\ . \tag{1-1}$$

设有两个复变数z和w，z可以在z平面的某一区域D内任意取值；如果对于每一个z值，复变数w有确定的值与之对应，则称w是复变数z的函数，记为$f(z)$。将$z=x+\mathrm{i}y$代入后，分开实部和虚部可表示为

$$w=f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y), \qquad (1\text{-}2)$$

其中u和v是x、y的实函数。$f(z)$的共轭为

$$\overline{f(z)}=u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)。 \qquad (1\text{-}2')$$

如果对于一个z值，仅有一个w值与之对应，则称w是z的单值函数；否则称为z的多值函数。例如，由复数的三角表示式可知，用$\theta+2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$代替$\theta$，不会改变$z$值，即$z$可以表示为$z=\rho e^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}$，所以函数

$$w=\ln z=\ln\rho+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)$$

是z的多值函数。

二、导数

如果不管Δz按什么方式趋近于零时，极限

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，并且其值不随Δz趋近于零的方式而改变，则称$f(z)$在z点可导，并将上述极限值称为$f(z)$在z点的导数，记作$f'(z)$或$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$。

由此定义出发，可以得出与实变函数类似的求导法则和公式。

例1-1 求函数$f(z)=\frac{1+z}{1-z}$的一阶导数。

解
$$f'(z)=\frac{(1-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z)-(1+z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}。$$

设函数$f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$在$z$点可导。如果$\Delta z$沿$x$轴的方向趋近于零，即令$\Delta z=\Delta x\to0$，则可得

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}。\tag{1-3}$$

若令$\Delta z=i\Delta y\to 0$，可以得到

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}\right\}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{1-4}$$

由于函数可导，这两个极限值必定相等，因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{1-5}$$

上式称为柯西-黎曼条件。如果$u(x、y)$与$v(x、y)$在z点的一阶偏导数存在，并且连续，则复变函数$f(z)=u+iv$在z点可导的充要条件是u和v在z点满足柯西-黎曼条件。

例1-2 求$f(z)=e^z$的一阶导数。

解 $$\frac{d}{dz}(e^z)=\frac{d}{dz}[e^x\cos y+ie^x\sin y]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)+i\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y)$$

$$=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z。$$

与按指数函数求导公式计算的结果一样。

由于$\bar{z}=x-iy$，所以只要将上面公式中的y改为$-y$，就可以得出函数对$\bar{z}$求导的条件和公式。例如，函数$w(\bar{z})=P(x、y)+iQ(x、y)$对$\bar{z}$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\bar{z}}=\frac{\partial P}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial Q}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{1-6}$$

由式(1-2′)、(1-6)和(1-3)可得

$$\frac{\mathrm{d}\overline{f(z)}}{\mathrm{d}\bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\overline{f'(z)} \tag{1-7}$$

如果$f(z,\bar{z})=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是$z$和$\bar{z}$的函数，则利用复合函数的求导法则，并考虑式(1-1)可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\\\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

要注意，这里条件(1-5)不成立。

三、解析函数

如函数$f(z)$在z_0的某一个很小的邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0解析。若$f(z)$在区域D的所有点解析，就称函数$f(z)$是区域D内的解析函数。区域D内的单值解析函数，称作全纯函数或正则函数。单连通域内的解析函数必是单值函数。

§1-6节将说明：某一区域内的解析函数的导数也是该区域内的解析函数，因此，任何解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$的实部和虚部必存在连续的二阶偏导数。由柯西-黎曼条件(1-5)可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-\partial^2 v}{\partial x\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-\partial^2 u}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}。$$

因此有

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \nabla^2 v=0。\qquad (1\text{-}9)$$

可见解析函数的实部和虚部都是调和函数。而且只要给出其中一个，就可以由柯西-黎曼条件求出另一个(常数项不确定)，因此称它们为共轭调和函数。在单连通域内，若给定的u或v是单值函数，则求出的共轭调和函数也是单值的；但是在多连通域内可能是多值的[3]。

例1-3 已知函数$H(z,\bar{z})=h_1(x,y)+\mathrm{i}h_2(x,y)$的实部和虚部有连续的一阶偏导数，且$\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}}=0$。证明$H$是$z$的解析函数。

证 由式(1-8)可得

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\right\}=0,$$

因此 $$\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial x}=0,$$

即 $$\frac{\partial h_1}{\partial x}=\frac{\partial h_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial h_2}{\partial x}=-\frac{\partial h_1}{\partial y},$$

h_1和h_2满足柯西-黎曼条件，所以H是z的解析函数。

§1-2 柯西定理

一、曲线积分

可以类似于实变函数那样定义复变函数$f(z)$沿曲线C的积分(图1-2)。为了求积分的值，可以先用参数方程

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$$

表示曲线C，其中t为实变数。设C的端点为$z_0=z(t_0)$和$z_1=z(t_1)$，

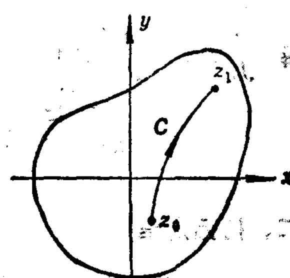

图1-2

则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]\cdot z'(t)\mathrm{d}t。\quad (1\text{-}10)$$

例1-4 求$\oint_C z^n\mathrm{d}z$，其中n为正整数，C是以原点为圆心、半径等于1的单位圆周（图1-3）。

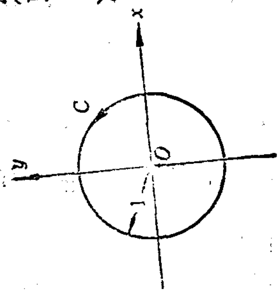

图1-3

解 在圆周C上，$\rho=1$；因此，$z=\rho e^{i\theta}=e^{i\theta}$，$\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$。

$$\oint_C z^n\mathrm{d}z=i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{n+1}\,e^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0。$$

如果$f(z)$是D域内的正则函数，则利用下面的柯西定理可以证明积分值只取决于起点z_0和终点z_1，与积分路线C无关。这时可以用类似于实函数的不定积分公式进行计算。

例1-5 求$\int_C z^n\mathrm{d}z$，其中C如图1-2所示。

解 $\int_C z^n\mathrm{d}z=\int_{z_0}^{z_1} z^n\mathrm{d}z$

$$=\frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{z_1^{n+1}-z_0^{n+1}}{n+1}。$$

二、柯西定理

例1-4中的积分为零不是偶然的，它是下述定理的一个实例。

柯西定理（证明略）：若$f(z)$是在一条分段光滑的简单闭曲线

C内解析、在包含C的闭区域上连续的函数，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0 \qquad (1-11)$$

容易将上述定理推广到复连通域的情况。例如$f(z)$是在以C_0、C_1、C_2为边界的复连通域D内及边界上解析的函数，若如图1-4所示引进两条虚线，将复连通域D切割成单连通域；规定各边

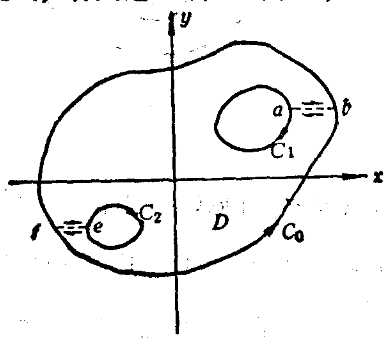

图1-4

界的正方向如图中箭头所示，即沿曲线正方向前进时，区域D处于左侧。现在$f(z)$是以C_0、C_1、C_2及两条虚线为边界的闭单连通域内的解析函数，根据式(1-11)有

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overline{ab}} f(z)\mathrm{d}z$$
$$+\int_{\overline{ba}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overline{ef}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overline{fe}} f(z)\mathrm{d}z=0。$$

显然沿每条虚线的两次方向相反的积分互相抵消，由此可得

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z=0。$$

和式(1-11)对比可知，只要将C理解为包含所有的边界曲线，就可以将柯西定理推广应用于复连通域的情况。

例1-6　求$\oint_{C_0}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$，其中$C_0$是围绕原点的任意一条闭曲线，图1-5。

解 由于$\frac{1}{z}$在不含原点的任何区域上是解析的。现在以原点

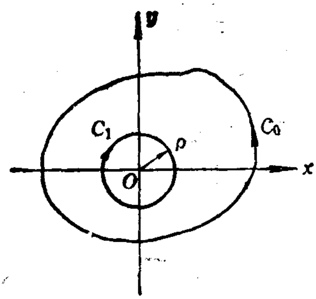

图1-5

为圆心，用很小的半径ρ作圆C_1，则在C_0与C_1为边界的闭复连通区域内，$\frac{1}{z}$是解析函数，根据上述定理可得

$$\oint_{C_0}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=-\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_{2\pi}^{0}\frac{\mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\rho e^{\mathrm{i}\theta}}=2\pi\mathrm{i}。$$

§1-3 级 数

一、复数形式的傅立叶级数

由高等数学已知，如果实变函数$f(x)$在区间$[0, 2\pi]$上具有有限个极值点或第一类间断点，则可以展开成傅立叶级数

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \qquad (1\text{-}12')$$

其中

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x。$$

将

$$\cos kx=\frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx}),\quad \sin kx=\frac{1}{2i}(e^{ikx}-e^{-ikx})$$

代入(1-12′)式，得

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k-\mathrm{i}\beta_k}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\frac{\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)。$$

引入记号

$$a_0=\frac{\alpha_0}{2}，\quad a_k=\frac{\alpha_k-\mathrm{i}\beta_k}{2},a_{-k}=\frac{\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k}{2},$$

可得复数形式的傅立叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\tag{1-12}$$

系数

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)(\cos kx-\mathrm{i}\sin kx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

现在考虑复数表达式$f_1(\theta)+\mathrm{i}f_2(\theta)$，其中$f_1(\theta)$和$f_2(\theta)$是实函数，且可展为傅立叶级数：

$$f_1(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$f_2(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\qquad d_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_2(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta;$$

若令

$$a_k=c_k+\mathrm{i}d_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1+\mathrm{i}f_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta,$$

则有

$$f_1+\mathrm{i}f_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_k+\mathrm{i}d_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}。\tag{1-13}$$

二、泰勒级数

复变解析函数和幂级数有密切的联系。幂级数在它的收敛域内必能表示一个解析函数；反之圆域内的解析函数总能展成幂级数。可以证明[1]，如果函数$f(z)$在以z_0为圆心，R为半径的圆域内解析，则对圆内任意一点z有

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k, \tag{1-14}$$

其中$f^{(k)}(z_0)$表示$f(z)$在z_0点的k阶导数。级数(1-14)称为$f(z)$的泰勒级数。

例1-7 将$f(z)=\ln(1+z)$展成z的幂级数。

解 $f(z)$在原点的各阶导数值为

$$f'(0)=1, \qquad f''(0)=-1, \cdots,$$

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!, \cdots。$$

所以

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k。$$

函数$f(z)=\ln(1+z)$在点$z=-1$无意义，所以上面的级数展开式仅在圆域$|z|<1$内成立。

和实变函数的泰勒级数一样，不论用什么方法将解析函数展开成幂级数时，展开式是唯一的。如设$f(z)$展开为级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_k(z-z_0)^k+\cdots,$$

令$z=z_0$，即得$f(z_0)=a_0$；将上式对z求导k次，再令$z=z_0$，即

得

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=a_k,\ (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

可见系数$a_k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$和式(1-14)中的系数相同，因此展开式是唯一的。

泰勒级数展开要求函数在圆域内处处解析，而对于圆环域内解析的函数，可以展成下面的罗朗级数。

三、罗朗级数

如果函数$f(z)$在环域$R_1<|z-z_0|<R_0$内解析，则在此域内$f(z)$能唯一地展开成罗朗级数：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{1-15}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

式中的C表示以z_0为圆心，半径为$R(R_1<R<R_0)$的任意圆周，图1-6。对C的积分取逆时针方向。

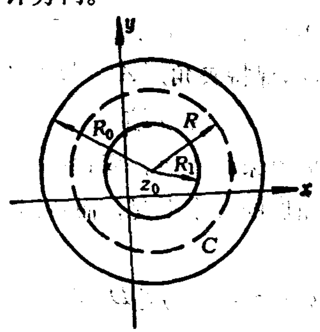

图1-6

§ 1-4 保 角 变 换

用复变函数方法求解弹性力学问题，常常要将被研究的区域