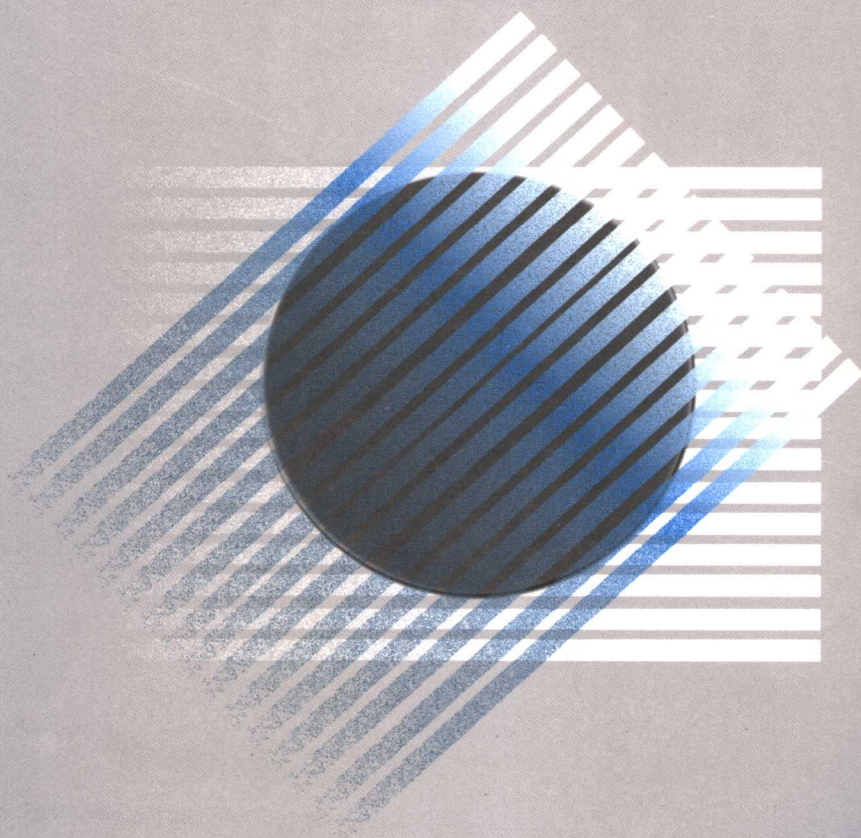


21 世纪信息通信系列教材

# 数字信号处理基础

SHUZI XINHAO CHULI JICHU

全子一 周利清 门爱东 编著



北京邮电大学出版社  
www.buptpress.com

# 数字信号处理基础

金子一 周利清 门爱东 编著

北京邮电大学出版社  
· 北京 ·

## 内 容 简 介

本书系统阐述了数字信号处理的基本原理、算法和实现技术,并介绍其相关方面的最新发展。本书的主要内容是系统地、清晰地阐述数字信号处理的两大基本方法,即 FFT 算法和数字滤波方法。前 4 章阐述了数字信号处理的基础知识并详细讲解了离散傅氏级数和离散傅氏变换,讲述了快速傅氏变换的原理和算法;第 5、6、7 章系统阐述了数字网络的信号流图表示法以及 IIR 和 FIR 数字滤波器的基本结构,详细论述了 IIR 数字滤波器的原理与设计以及 FIR 数字滤波器的原理与设计;第 8 章讲述了数字信号处理的有限字长效应;第 9 章讲述了离散随机信号数字处理的原理和方法;第 10 章简要介绍了数字信号处理器的原理、应用和发展。

本书论述深入浅出,数学推导严谨,逻辑性、系统性强,尤其着重基本概念的清楚明确阐述。本书不但可以作为电子、通信、计算机、自动化等专业本科生的教材,也可供从事数字信号处理方面工作的科研技术人员自学。

### 图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理基础/全子一,周利清,门爱东编著.北京:北京邮电大学出版社,2002

ISBN 7-5635-0561-X

I. 数... II. ①全...②周...③门... III. 数字信号—信号处理 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 052187 号

---

书 名:数字信号处理基础

作 者:全子一、周利清、门爱东

责任编辑:时友芬

出版发行:北京邮电大学出版社

社 址:北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

电话/传真:010-62282185(发行部)/010-62283578(FAX)

电子信箱:publish@bupt.edu.cn

经 销:各地新华书店

印 刷:北京源海印刷厂

开 本:1/16

印 张:14

字 数:345 千字

印 数:1—5000 册

版 次:2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

---

ISBN 7-5635-0561-X/TN·255

定 价:24.00 元

• 如有质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

# 前 言

在当今高技术的发展中,有两点特别值得注意,一是通信技术中各种数字通信系统(例如,数字光纤通信系统、程控交换系统、移动通信系统等)的应用和发展;二是计算机网络技术的发展和应用(例如,因特网)。随着大规模集成电路(VLSI)的迅速发展,极大地促进了数字信号处理的广泛应用,这标志着新的信息革命时代的到来。现今,一些发达国家(美、欧、日等)及我国,信息产业已是国民经济的支柱产业,为了适应这种信息的数字处理技术的革命,教学内容的更新已是势在必行。

本书主要包含以下内容:

1. 离散系统的基本特性和基本分析方法;
2. 离散信号的基本变换以及离散信号线性卷积的各种计算方法;
3. 离散傅氏变换(DFT)的基本理论及其快速算法(FFT);
4. 数字滤波器的各种基本结构及其信号流图描述方法;
5. IIR 和 FIR 数字滤波器的基本原理及其设计方法;
6. 有限字长效应的概念和分析方法;
7. 离散随机信号处理的基本原理和方法;
8. 数字信号处理器(DSP)的硬件结构和软件系统简介。

FFT 算法和数字滤波是数字信号处理的两大基本方法,实现手段包括软件实现、硬件实现以及 DSP 实现。

经典的数字信号处理教材较多,但涉及的内容多而广泛,国外教材多是本科生和研究生共用。本书主要作为大学本科之用,内容着重在基本原理部分,力求清晰地阐述数字信号处理的基本概念及其基本应用。

本书适用于工科通信类专业(例如有线、无线通信专业、图像传输与处理、信息工程、计算机与通信等),以及电子类无线电技术专业大学本科高年级学生作为必修或选修课教材。

作者

2002 年 5 月

# 目 录

## 第 1 章 引 论

1.1 数字信号处理的定义、特点和方法	1
1.2 数学预备知识	3
习 题	8

## 第 2 章 离散时间系统与离散信号的变换

2.1 取样和内插	9
2.2 离散时间信号序列	16
2.3 离散系统及其特性,离散信号的线性卷积	18
2.4 离散信号的傅氏变换	25
2.5 离散信号的 Z 变换	29
2.6 单边 Z 变换	39
2.7 Z 变换与傅氏变换的关系	41
2.8 系统函数及其零、极点,线性非移变因果系统的稳定性	42
习 题	47

## 第 3 章 离散傅氏变换

3.1 离散傅氏级数和离散傅氏变换的导出	50
3.2 离散傅氏级数和离散傅氏变换的性质	55
3.3 Z 变换与离散傅氏变换的关系	61
3.4 用离散傅氏变换求线性卷积	62
3.5 分段卷积	68
习 题	71

## 第 4 章 快速傅氏变换

4.1 基 2 时间抽选法	75
4.2 基 2 频率抽选法	79
4.3 基 4 FFT 算法	80
4.4 IFFT	83
4.5 线性调频 Z 变换算法	85
4.6 实序列的 FFT 的高效算法	89
习 题	91

<b>第 5 章 数字滤波器的结构</b>	
5.1 引言 .....	93
5.2 数字网络的信号流图 .....	93
5.3 IIR 数字滤波器的结构 .....	101
5.4 FIR 数字滤波器的结构 .....	106
习题 .....	112
<b>第 6 章 IIR 数字滤波器的理论与设计</b>	
6.1 IIR 数字滤波器的设计概述 .....	115
6.2 模拟滤波器的数字仿真 .....	116
6.3 脉冲响应不变法 .....	119
6.4 双线性变换法 .....	121
6.5 模拟滤波特性的逼近 .....	125
6.6 数字滤波器的变换 .....	137
6.7 IIR 数字滤波器的计算机辅助设计方法 .....	140
习题 .....	143
<b>第 7 章 FIR 数字滤波器的理论与设计</b>	
7.1 线性相移 FIR 数字滤波器的特性 .....	145
7.2 窗口法 .....	152
7.3 频率取样法 .....	160
7.4 FIR 数字滤波器的优化设计 .....	161
7.5 IIR 滤波器与 FIR 滤波器的比较 .....	168
习题 .....	169
<b>第 8 章 数字信号处理中的有限字长效应</b>	
8.1 引言 .....	171
8.2 A/D 变换的字长效应 .....	172
8.3 乘积的舍入误差 .....	174
8.4 系数量化的影响 .....	180
8.5 极限环振荡 .....	181
习题 .....	183
<b>第 9 章 离散随机信号及其谱估计</b>	
9.1 离散时间随机信号 .....	186
9.2 离散随机信号通过线性非移变系统 .....	190
9.3 估计准则以及离散随机信号数字特征的估计 .....	192
9.4 功率谱估计的非参数方法 .....	196

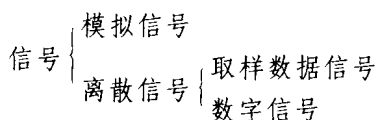
9.5 功率谱估计的参数方法 .....	200
习题 .....	207
<b>第 10 章 数字信号处理器简介</b>	
10.1 引言 .....	210
10.2 TMS320 系列高速数字信号处理器 .....	210
10.3 DSP 的应用现状和发展前景 .....	213
<b>参考文献</b> .....	215

# 第1章 引论

## 1.1 数字信号处理的定义、特点和方法

### 1.1.1 数字信号

信号可以这样来分类：



模拟信号是时间的连续函数,在规定的时间内任意时刻信号都有一定的数值(幅值),而且此数值是在一定的范围内随时间连续变化的,例如脉冲信号、正弦信号、斜波信号、语音信号等,如图 1.1 所示。

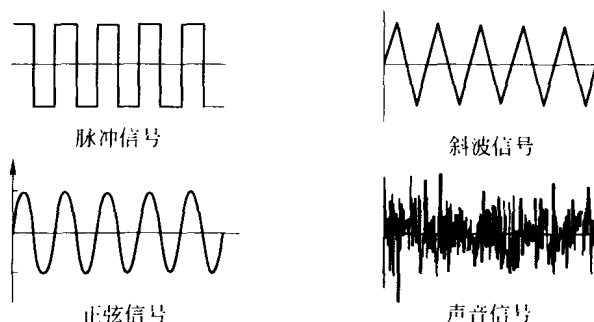


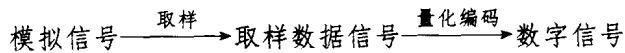
图 1.1 模拟信号

离散信号只在一组特定的时刻有数值,而在其它时间数值为零,因此离散信号又叫离散时间信号。若离散信号的幅值在一定范围内可连续取值,则为取样(或抽样)数据信号;将取样信号的幅值量化并变为二进制数码序列,则为数字信号。

例如一个模拟信号,如图 1.1 所示,假设该正弦波是函数  $f(t) = 8 \sin \Omega_0 t$ ,它不仅是时间的连续函数,而且其幅值的大小也是在一定的范围内(8 与 -8 之间)连续变化的。如果对此信号进行取样,也即每隔一定的时间间隔取一数值,则得到一个数据序列,此时的信号在时间上是离散的,但其幅值大小仍可以在 8 和 -8 之间任意取值,这就是取样数据信号。取样数据信号又叫做取样信号或抽样信号或采样信号。如果对取样信号进行量化编码,比如采用 4 bit 线性编码来处理上述取样信号,则每个样值的大小用 4 位二进制码表示,其取值只能为 7,6, ..., 1,0, -1, ..., -8,这就是数字信号,也就是说,数字信号在时间上和数值上都是离散的。



综上所述,有:



## 1.1.2 数字信号处理

### 1. 什么是数字信号处理

数字信号处理是研究如何用数字或符号序列来表示信号以及如何对这些序列进行处理的一门学科。大家知道,模拟信号的特征是用波形来描述的,而离散信号实际上是一串数据,是一个数字序列,这是它与模拟信号的根本区别,因此,对数字信号的处理肯定与对模拟信号的处理不同。数字信号既然是数据序列,其处理实际上就是进行各种数学运算,如加、减、乘以及各种逻辑运算等等。因此,数字信号处理既可以是软件处理也可以是硬件处理。所谓软件处理,就是对所需要的运算编制程序,然后在数字计算机上实现,其处理灵活、方便。所谓硬件处理,就是用加法器、乘法器、延时器以及它们的各种组合来构成数字电路,以实现所需要的运算。硬件处理显然不如软件处理方便灵活,但能对数字信号进行实时处理。近年来日益广泛采用的各种数字信号处理器(如 TI TMS320 系列、Philips Trimedia 系列等)可以认为是软硬件处理方式的结合,这种处理是用数字信号处理芯片以及存储器来组成硬件电路,所需要的运算靠特定的汇编语言编程来实现。因此,采用数字信号处理器既方便灵活,又能做到实时处理,所以数字信号处理器(DSP)已经越来越广泛地应用于包括通信在内的各个领域之中。

### 2. 数字信号处理的优点

数字处理与模拟处理相比较,有以下一些优越性:

#### (1) 精度高

对模拟信号的处理,是用由电感、电容、电阻等元件所组成的模拟系统来实现的,而模拟元件精度达到  $10^{-3}$  已经很不容易了。若将模拟信号数字化以后进行处理,在数字系统中 17 位字长可达到  $10^{-5}$  精度,而目前在计算机和微处理器中,采用 16 位、32 位的存储器已经很普遍了,再配合适当编程或采用浮点算法,达到相当高的精度是不成问题的。因此,在一些要求高精度的系统中,只能采用数字技术。

#### (2) 可靠性高

模拟系统中各种参数受温度、环境影响较大,因而易出现感应、杂散效应,甚至会出现震荡等等;而数字系统受温度、环境影响较小。模拟信号受到干扰即产生失真,而数字信号由于只有两种状态,因此,所受的干扰只要在一定范围以内,就不会产生影响,这就是说,数字信号抗干扰能力强。另外,如果用数字信号进行传输,在中继站还可以再生。总的说来,信号的数字处理可靠性高。

#### (3) 灵活性强

一个数字系统的性能主要取决于各乘法器的系数,而这些系数存放于系数存储器中,只需对这些存储器输入不同的数据,就可以改变系统参数从而得到不同性能的系统。数字信号的灵活性还表现在可以利用一套计算设备同时处理多路相互独立的信号,即所谓的“时分复用”,这在数字电话系统中是非常有用的技术。

(4) 便于大规模集成化

数字部件具有高度的规范性,易于实现大规模集成化。

(5) 数字信号便于加密处理

由于数字信号实际上为数据序列,因此便于加密运算处理。

(6) 对于低频信号尤其优越

处理低频信号的模拟元件如电感、电容等一般都体积较大、制作不易、使用不便。如果转换成数字信号来进行处理,由于频率低,对数字部件的速度要求不高,因而容易实现。

数字处理当然也有不足之处。目前,数字系统的速度还不能达到处理很高频率信号(例如射频信号)的要求。但随着大规模集成电路、高速数字计算机的发展尤其是微处理器的发展,数字系统的速度将会越来越高,数字信号处理也会越来越显示出其优越性。

当前数字技术正在取代传统的模拟技术,日益广泛地应用于数字通信、图像传输、自动控制、遥感技术、雷达技术、电子测量技术、生物医学工程以及地震学、波谱学、震动学等许多领域。

### 3. 数字信号处理的方法

由于数字信号本身的特点以及高速数字计算机和微处理器的应用,使得一些数字信号处理算法应运而生,其中最突出的是数字滤波算法和快速傅氏变换算法。

数字滤波是对输入数字信号进行一系列数字相加、数乘以及时延等运算,得到了满足一定要求的输出数字信号。这里所谓的滤波和模拟信号的滤波有相同的意义,即在输出信号中保留了所需要的频率成分,而滤除了其它的频率成分。

快速傅氏变换是离散傅氏变换的快速算法,可以利用它来进行频谱分析和信号滤波。本书将分别对快速傅氏变换和数字滤波器进行介绍。

## 1.2 数学预备知识

下面简略介绍本书将要用到的有关数学知识,只介绍其常用结论,不作证明。本节所涉及的信号(函数)都是模拟信号。

### 1.2.1 傅氏变换

傅氏变换就是对信号进行频谱分析。若信号  $h(t)$  满足绝对可积的条件,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

则其傅氏变换存在。此条件意指信号  $h(t)$  在区间  $(-\infty, \infty)$  内包含有限能量,这是傅氏变换存在的充分条件,并非必要条件。若信号  $h(t)$  具有无限能量,但具有有限功率,即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h^2(t) dt < \infty$$

存在,则此信号仍可以进行傅氏变换。

傅氏变换对主要有两种形式:

第一种形式:

$$\begin{aligned} H_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ h_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_1(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (1.1)$$

第二种形式:

$$\begin{aligned} H_2(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) e^{-j\Omega t} dt \\ h_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

形式二中的  $\Omega$  为圆频率或叫做角频率,它与形式一中的频率  $f$  之间满足关系:  $\Omega = 2\pi f$ , 这样,第一、二种形式的函数之间有关系:

$$\begin{aligned} h_2(t) &= h_1(t) \\ H_2(\Omega) &= H_2(2\pi f) = H_1(f) \end{aligned} \quad (1.3)$$

## 1.2.2 特殊函数

### 1. 单位阶跃函数

定义:

$$U\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{t}{a} < \frac{t_0}{a} \\ 1/2 & \frac{t}{a} = \frac{t_0}{a} \\ 1 & \frac{t}{a} > \frac{t_0}{a} \end{cases} \quad (1.4)$$

这里  $a$  为标尺因子,  $a \neq 0$ , 由此定义可知,此函数只与  $a$  的正负有关,与  $a$  的大小无关;  $t_0$  是时间的移位;图 1.2 是  $a > 0$  时的图形。

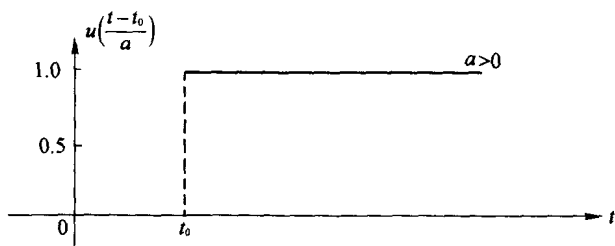


图 1.2 单位阶跃函数

当  $t_0 = 0$ 、 $a = 1$  时,为单位阶跃函数的常见形式  $u(t)$ ,其傅氏变换为

$$u(t) = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \quad (1.5)$$

## 2. 矩形函数

定义:

$$\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} 0 & |t-t_0| > \frac{|a|}{2} \\ 1/2 & |t-t_0| = \frac{|a|}{2} \\ 1 & |t-t_0| < \frac{|a|}{2} \end{cases} \quad (1.6)$$

这里  $a \neq 0$ , 其图形如图 1.3 所示。由图可看出, 矩形函数的高度为 1, 中心点在  $t = t_0$  处, 宽度和面积均为  $|a|$ 。此函数只与  $|a|$  的大小有关, 与  $a$  的正负无关。

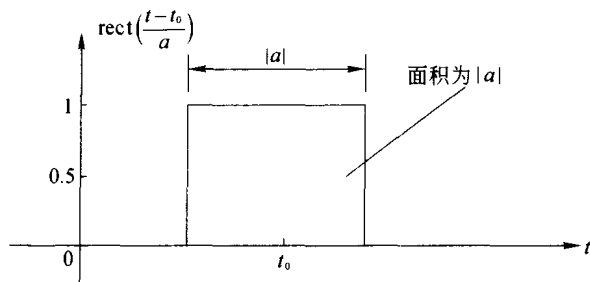


图 1.3 矩形函数

当  $t_0 = 0, a = 1$  时, 矩形函数为  $\text{rect}(t)$ , 其傅氏变换为

$$\text{sinc} \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sin(\Omega/2)}{\Omega/2} \quad (1.7)$$

## 3. sinc 函数

定义:

$$\text{sinc}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \frac{\sin[\pi(t-t_0)/a]}{\pi(t-t_0)/a} \quad (1.8)$$

显然有  $\text{sinc}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \text{sinc}\left(\frac{t-t_0}{-a}\right)$ , 因此不妨设  $a > 0$  时, 其图形如图 1.4 所示。

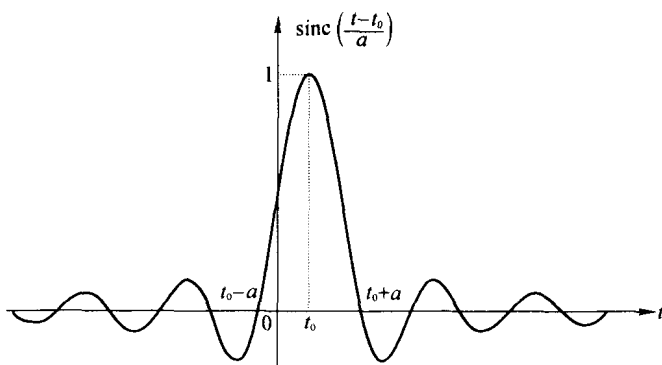


图 1.4 sinc 函数

曲线对  $t$  轴形成的面积为  $a$ , 即  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[(t-t_0)/a] dt = a$ 。

函数的傅氏变换为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{t\sigma}{2\pi}\right) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{\sigma} \operatorname{rect}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right) \quad (1.9)$$

这里  $\sigma$  为一确定的角频率。

由此可看出, 矩形函数与 sinc 函数互为傅氏变换。

#### 4. $\delta$ 函数(冲激函数)

定义:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

其图形如图 1.5 所示。

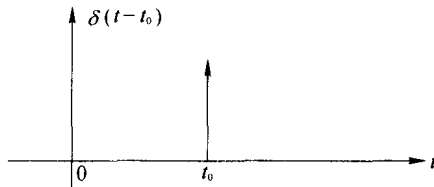


图 1.5  $\delta$  函数

若  $t_1 < t_0 < t_2$ , 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1.11)$$

即  $\delta$  函数的面积集中在  $t = t_0$  处, 且为 1。可推广有

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

(1)  $\delta$  函数的特性

设  $a, t_0$  为实常数, 则

① 标尺特性

$$\left. \begin{aligned} \delta(-t) &= \delta(t) \\ \delta\left(\frac{t-t_0}{a}\right) &= |a| \delta(t-t_0) \\ \delta(at-t_0) &= \frac{1}{|a|} \delta(t-t_0/a) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

② 相乘特性

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1.15)$$

(2)  $\delta$  函数的导数

$\delta$  函数的  $k$  阶导数记为  $\delta^{(k)}(t)$ ,  $\delta^{(k)}(t) = \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$ 。设函数  $f(t)$  在  $t = t_0$  处有  $k$  阶导数, 则  $\delta$  函数的导数由下述特性定义为:

$$\left. \begin{aligned} \delta^{(k)}(t - t_0) &= 0 & t \neq t_0 \\ \int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta^{(k)}(t - t_0) dt &= (-1)^k f^{(k)}(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

这里,  $f^{(k)}(t_0) = \left. \frac{d^k(f)}{dt^k} \right|_{t=t_0}$ .

$\delta$  函数是单位阶跃函数的导数, 即

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} u(t - t_0) \quad (1.17)$$

(3)  $\delta$  函数的傅氏变换

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\longleftrightarrow e^{-j\Omega t_0} \\ e^{j\Omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \quad (1.18)$$

即  $\delta$  函数和指数函数互为傅氏变换。

(4)  $\delta$  函数的卷积特性

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (1.19)$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (1.20)$$

## 5. 梳状函数

定义:

$$\text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \quad (1.21)$$

即由  $\delta$  函数周期延拓而成。

更一般形式:

$$\text{comb}\left(\frac{t - t_0}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t - t_0}{T} - n\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT) \quad (1.22)$$

其图形如图 1.6 所示。

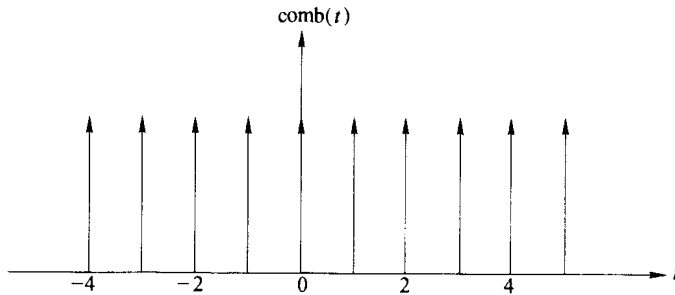


图 1.6 梳状函数

由此函数可引出一个重要的函数, 即采样函数:

$$p(t) = \frac{1}{T} \text{comb}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.23)$$

由  $\delta$  函数的傅氏变换, 可得梳状函数和采样函数的傅氏变换:

$$\text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega} \quad (1.24)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\Omega} \quad (1.25)$$

以上主要介绍了一些预备知识, 以及一些常用的模拟信号(函数)。

## 习 题

1.1 给定  $f(t) = \text{rect}(t+2) + \text{rect}(t-2)$ , 画出下列函数的图形:

(1)  $f(t)$  (2)  $g(t) = f(t-1)$

(3)  $h(t) = f(t)u(t)$  (4)  $f(t/2)$

1.2 设  $f(t)$  是某一函数,  $a, t_0, T$  为实常数, 证明:

(1)  $f(t)\delta\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = |a|f(t_0)\delta(t-t_0)$

(2)  $f(t)\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{t_0}{a}\right)\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)$

(3)  $f(t)\text{comb}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_0+nT)\delta(t-t_0-nT)$

1.3

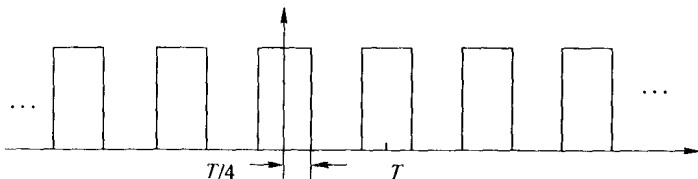
(1) 如  $f(t) \longleftrightarrow F(\Omega)$ , 证明:

$$F(\Omega) * e^{-j\Omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{-j(\Omega-y)t} dy = 2\pi f(t)e^{-j\Omega t}$$

(2) 用(1)的结果, 证明频域卷积定理

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\Omega) * F_2(\Omega)$$

1.4 求下图中  $f(t)$  脉冲的傅氏变换。



1.5 证明:  $H(\Omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + n\Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\Omega + n\Omega_0)$

1.6 证明:  $\frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + n\Omega_0)$ ,  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

## 第 2 章 离散时间系统与离散信号的变换

本章讨论模拟信号与离散信号之间的转换关系;学习有关离散时间系统的一些基本知识;学习离散信号的两种主要变换:傅氏变换和 Z 变换。本章内容是离散信号处理的基础。

### 2.1 取样和内插

信号的数字处理与模拟处理相比有许多优点,但在实际问题中,要进行处理的往往是模拟信号。因此,进行数字处理的第一个问题就是要将其离散化(取样),然后进行量化编码,再对获得的数字信号进行处理。数字处理的结果最后要由离散信号恢复成连续信号。将模拟信号(连续信号)离散化的过程称为抽样或取样,将离散信号变为连续信号(模拟信号)的过程称为内插,其过程如图 2.1 所示,本节就只讨论取样和内插这两个问题。

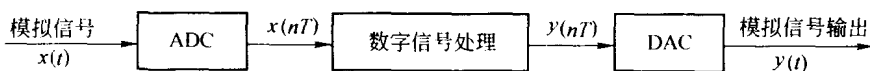


图 2.1 取样和内插

#### 2.1.1 取样

将连续信号变为离散信号最常用的是等间隔周期取样,即每隔固定时间  $T$  取一个信号值,如图 2.2 所示。其中  $T$  称为取样周期,其倒数为取样频率  $f_s = 1/T$ ,而  $\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$  则为取样角频率。

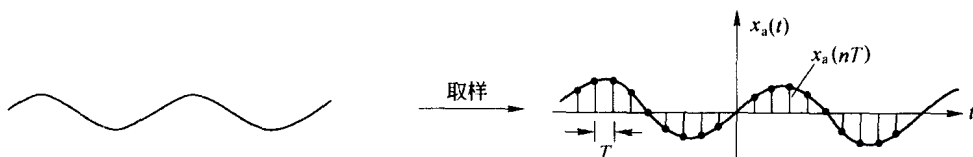


图 2.2 连续信号的取样

取样过程所得到的  $x_a(nT)$  是  $x_a(t)$  每隔一定时间的取样值序列,在每两个相隔的样点之间,可用各种不同的曲线来连接,那么,由  $x_a(nT)$  能否确定并恢复出  $x_a(t)$  呢? 下面将会看到,只要满足一定的条件,离散信号  $x_a(nT)$  就可以按照一定的方式恢复出  $x_a(t)$  来。

**取样定理:** 设  $f_m$  是一连续信号  $x_a(t)$  的频谱的最高频率,当对  $x_a(t)$  进行抽样时,只要取样频率  $f_s$  等于或大于  $2f_m$ ,就可以由取样序列  $x_a(nT)$  来唯一准确地恢复出  $x_a(t)$ 。

下面从时域和频域两个方面来分析取样过程,将会清楚地看到,为什么只要满足了取样定理的条件,所得到的取样序列就能唯一确定出原来的连续信号,并由此可以知道恢复原来信号的基本方法。



首先进行时域分析。设  $x_a(t)$  为一个限带信号,其最高频率为  $\Omega_m$ 。容易看出,将  $x_a(t)$  取样实际上就是使  $x_a(t)$  与取样函数  $p(t)$  相乘,如图 2.3 所示,相乘结果(取样信号)以  $\hat{x}_a(t)$  表示。

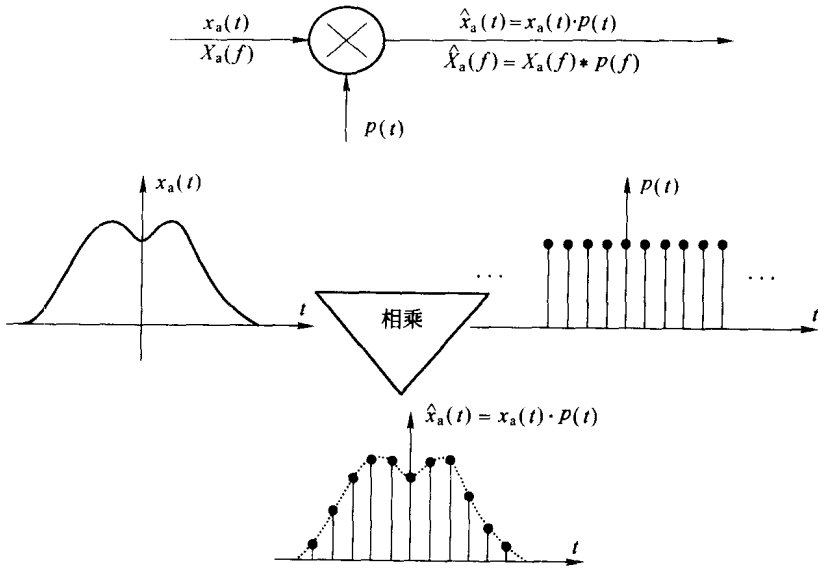


图 2.3 取样过程的数学模型

已知取样函数  $p(t) = \frac{1}{T} \text{comb}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ,  $T$  为取样周期。故

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \end{aligned} \quad (2.1)$$

式(2.1)表示,抽样数据信号  $\hat{x}_a(t)$  (这里仍将其作为连续时间变量  $t$  的函数)是无穷多个  $\delta$  函数的加权组合,权值正是  $x_a(t)$  的各个抽样值。

下面进行频域分析。由模拟信号傅氏变换的性质可知,两个信号若在时域是相乘的关系,映射到频域则为卷积的关系,即

若在时域有

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p(t) \quad (2.2)$$

则在频域有

$$\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X_a(\Omega) * P(\Omega)] \quad (2.3a)$$

或

$$\hat{X}_a(f) = X_a(f) * P(f) \quad (2.3b)$$

这里  $\hat{X}_a(\Omega)$ 、 $X_a(\Omega)$ 、 $P(\Omega)$  分别表示  $\hat{x}(t)$ 、 $x_a(t)$ 、 $p(t)$  的傅氏变换。

要得到  $\hat{X}_a(\Omega)$ , 首先应求得  $P(\Omega)$ 。在 1.2 节中曾给出过  $P(\Omega)$  的表示式,但现在要得