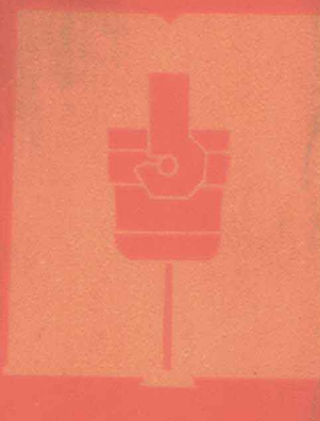
887420

高等学校教学用书

最优控制

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

高等学校教学用书

最优控制

昆明工学院　王贞荣　编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

最优控制

昆明工学院　王贞荣　编

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

850×1168 1/32　印张 10 5/8　字数 281 千字

1989年5月第一版　　1989年5月第一次印刷

印数00,001～2,900册

ISBN 7-5024-0468-6

TP·19(课)　定价2.55元

前　言

最优控制理论,是二十世纪五十年代到六十年代间,在空间技术的发展和数字计算机广泛应用的推动下，随着动态系统优化理论的迅速发展而形成的一个重要的学科分支。时至今日，动态系统优化理论不仅有许多成功的应用，而且远远超出了自动控制的传统界限，越来越广泛地应用于空间技术、系统工程、经济管理与决策等各个领域，收到了显著的成效。与此同时，最优控制自身在不断完善和充实的过程中，又产生了许多需要解决的理论问题。因此，最优控制目前是正在发展的、极其活跃的学科领域。

本书是编者在以往为本科生开设的最优控制课程教学中所写的讲义基础上，学习和汲取了其他参考教材而编写的。由于编者水平有限，书中可能存在错误或不妥之处，敬请读者指正。

本书初稿完成后，召开了审稿会议。参加会议的代表有昆明工学院廖伯瑜教授、南京航空学院胡寿松副教授、云南工学院潘城副教授、武汉钢铁学院吴源达教授、昆明工学院钟秀玲副教授。与会代表对书稿进行了认真审议，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的谢意。

编者

一九八八年四月

目　　录

1.　绪论………………………………………………………1
　1.1　概述 ………………………………………………1
　1.2　最优控制问题的实例 ………………………………2
　1.3　最优控制问题的一般提法 …………………………8
2.　最优控制中的变分法…………………………………11
　2.1　函数的极值问题 ……………………………………11
　2.2　泛函与变分的基本概念 ……………………………18
　2.3　欧拉方程 ……………………………………………27
　2.4　横截条件 ……………………………………………38
　2.5　欧拉方程与横截条件的向量形式 …………………45
　2.6　条件极值的变分问题 ………………………………50
　习　题 …………………………………………………80
3.　极小值原理……………………………………………83
　3.1　极小值原理 …………………………………………83
　3.2　极小值原理的证明 …………………………………96
　3.3　极小值原理的一些推广 ……………………………105
　3.4　离散系统的极小值原理 ……………………………117
　3.5　离散极小值原理与连续极小值原理的比较 ………126
　习　题 …………………………………………………131
4.　时间、燃料、能量最优控制问题……………………134
　4.1　非线性系统的时间最优控制问题 …………………134
　4.2　线性定常系统的时间最优控制问题 ………………139
　4.3　时间最优控制举例 …………………………………146
　4.4　离散系统的时间最优控制 …………………………169
　4.5　最少燃料消耗问题 …………………………………175
　4.6　时间和燃料综合最优控制 …………………………187

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.7 最小能量控制问题 …………………………… 193
习 题 ……………………………………… 202
5. 线性二次型性能指标的最优控制问题 ……………… 204
5.1 概述 ………………………………………… 204
5.2 有限时间状态调节器问题 ……………………… 207
5.3 线性定常系统无限时间状态调节器问题 ……… 224
5.4 输出调节器问题 ……………………………… 229
5.5 跟踪问题 …………………………………… 240
5.6 线性二次型准最优控制问题 …………………… 253
习 题 ……………………………………… 259
6. 动态规划 ………………………………………… 262
6.1 多级决策问题 ………………………………… 262
6.2 最优性原理 ………………………………… 265
6.3 离散动态规划 ………………………………… 275
6.4 动态规划的数值计算法 ……………………… 282
6.5 连续动态规划 ………………………………… 288
6.6 变分法、极小值原理与动态规划 ……………… 298
习 题 ……………………………………… 306
附录Ⅰ 矩阵理论的部分结论 ……………………… 308
附录Ⅱ 线性系统理论的部分结论 ………………… 325
习题答案 …………………………………………… 329
参考文献 …………………………………………… 333

1 绪　　论

1.1 概　　述

第二次世界大战以后发展起来的自动控制理论，在用来设计与分析单输入单输出的线性定常系统时，是行之有效的。然而，随着生产的发展，特别是空间技术的发展，控制系统日趋复杂，其精度要求愈来愈高。于是，建立在传递函数和频率特性基础上的自动控制理论，即我们通常说的经典控制理论，就日益显示出它的局限性来。这种局限性首先表现在对于时变系统，传递函数根本无法定义；即使是线性定常系统，在多输入多输出时，其传递函数成为一个函数矩阵，以致从传递函数概念得出的工程上的结论往往难于应用。其次还表现在频率法本质上是一种工程方法。由频率法所获得的校正特性，只能用简单的网络来实现。而网络参数的确定，还须经过调试过程。当系统很复杂，精度要求很高时，这种半经验的方法就不大适用了。因此，人们又回到时间域，建立了以状态空间概念为基础的现代控制理论。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分。可以说，它的形成与发展奠定了整个现代控制理论的基础。早在本世纪五十年代初期，就有人发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章。随后，由于空间技术的迫切需要，这一领域受到许多数学家的密切注意。

最优控制理论所要解决的问题是：按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运行，并使给定的性能指标达到最优值。从数学观点来看，就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。这是一个变分学问题。然而，经典变分理论所能解决的，只是其容许控制属于开集的一类最优控制问题。而在工程实践中所遇到的，却多是其容许控制属于闭集的

一类最优控制问题。这就要求人们寻找求解最优控制问题的新途径。在研究最优控制问题的方法中，有两种方法最常用：一种是苏联学者庞特里亚金（Л.С.Понтрягин）的“极小值原理”；另一种是美国学者贝尔曼（R.E.Bellman）的“动态规划”。

极小值原理是庞特里亚金等人在1956年至1958年间逐步创立的。他们先是推测出极小值原理的结论，随后提出一种证明方法。极小值原理发展了经典变分原理，成为处理闭集性约束变分问题的有力工具。动态规划是贝尔曼在1953年至1958年间逐步创立的。他依据最优性原理，发展了变分学中的哈密顿-雅可比（Hamilton-Jacobi）理论，创立了动态规划。

与现代控制理论迅速发展的同时，数字计算机也在飞速地发展，并得到广泛地应用。这就有可能把计算机当作一个控制系统的组成部分，以实现“在线”控制。从而使现代控制理论的工程实现有了可能。与此同时，许多迫切需要解决的理论问题相继出现，进一步推动了现代控制理论的发展。

时至今日，最优控制理论的研究，无论在深度和广度上，都有了很大的发展。如分布参数的最优控制，随机最优控制，大系统的最优控制等等。其中仍有许多工程和理论问题尚待解决。因此，最优控制目前是正在发展中的、极其活跃的学科领域之一。

1.2 最优控制问题的实例

例1.1 最速升降问题

设有一物体M，作垂直升降运动，如图1.1所示。这里的物体可看作直升飞机或矿井中的提升机。假定在物体M内部装有一个控制器，它可以产生一个作用力$u(t)$，控制物体M上下运动。由于作用力的大小有限，所以应满足约束条件$|u(t)|\leqslant c$。其中c是常数。

设已知物体M在$t=t_0$时，离地面的高度为$x(t_0)$，垂直运动的速度为$\dot{x}(t_0)$。问题是寻找作用力$u(t)$的变化规律，使物体M

最快地到达地面，且到达地面时的速度为零。

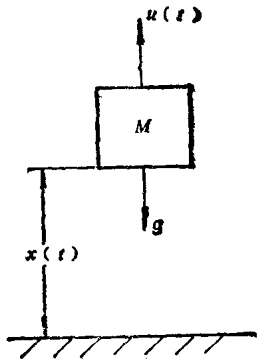


图 1.1 最速升降示意图

为简单起见，设物体M的质量为1。用$x(t)$表示物体离地面的高度，其方向是向上为正，向下为负；作用力$u(t)$是向上为正，向下为负。根据牛顿第二定律，有

$$\frac{dx^2(t)}{dt^2}=u(t)-g \tag{1.1}$$

式中 $-g$项表示物体所受的重力。

令 $x_1(t)=x(t)$，$x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}$，则物体的状态方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt}&=x_2(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt}&=u(t)-g\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

初始条件为

$$x_1(t_0)=x_{10},\quad x_2(t_0)=x_{20}$$

现在的问题是，寻找一个控制作用力$u(t)$，满足约束条件$|u(t)|\leq c$，使其物体在最短时间内由初态（x_{10}，x_{20}）转移到终态（0，0）。换句话说，也就是使性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f} dt=t_f-t_0 \tag{1.3}$$

为最小，且$x_1(t_f)=0$，$x_2(t_f)=0$。这种控制$u(t)$的方式，称为最优控制，记为$u^*(t)$。

例1.2　月球上的软着陆问题

如图1.2所示，为了使宇宙飞船在月球表面实现软着陆（到达月球表面时的速度为零），要寻找发动机推力的最优控制规律，以便使燃料的消耗为最少。

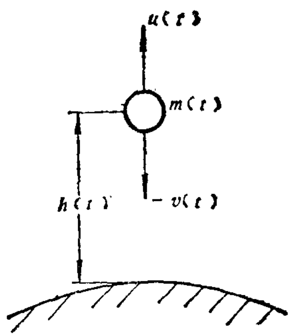


图 1.2　月球上的软着陆示意图

设飞船质量为$m(t)$，高度为$h(t)$，垂直速度为$v(t)$，发动机推力为$u(t)$，月球表面的重力加速度可视为常数g，飞船的自身质量为M，所带燃料为F，初始高度为h_0，初始垂直速度为v_0。那么，飞船的运动方程式可表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{h}(t)&=v(t)\\ \dot{v}(t)&=\frac{u(t)}{m(t)}-g\\ \dot{m}(t)&=-ku(t)\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

式中　k是一常数。

初始条件

$$\left.\begin{aligned}h(0)&=h_0\\v(0)&=v_0\\m(0)&=M+F\end{aligned}\right\}\qquad(1.5)$$

终端条件

$$\left.\begin{aligned}h(t_f)&=0\\v(t_f)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.6)$$

约束条件

$$0\leqslant u(t)\leqslant a\qquad(1.7)$$

式中a是发动机的最大推力。

性能指标是使燃料消耗为最少，也就是使飞船在着陆时的质量为最大，即

$$J=m(t_f)\qquad(1.8)$$

达到最大值。

我们的任务是，寻求发动机推力的最优控制规律$u(t)$，在满足约束条件（1.7）下，使飞船由初态(1.5)转移到终态(1.6)，并且使性能指标（1.8）为最大。

例 1.3 最快拦截问题

设我方发射一枚导弹（简称拦截器L），其任务是在空中拦截另一枚来自敌方的导弹（简称目标M)。现在的问题是，应当怎样控制拦截器L的运动，才能最快地击中目标M。

为简单起见，假设拦截器和目标的运动是在同一平面内，如

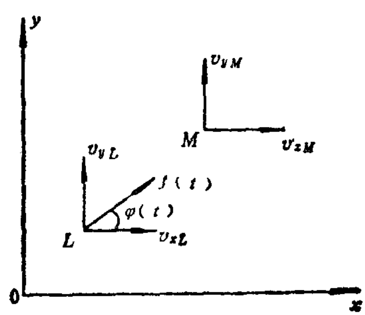


图 1.3 最快拦截问题

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

图1.3所示。

设目标M的运动方程是

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_M(t)=v_{xM}(t)\\&\dot{v}_{xM}(t)=0\\&\dot{y}_M(t)=v_{yM}(t)\\&\dot{v}_{yM}(t)=-g\end{aligned}\right\}\quad(1.9)$$

式中 $(x_M,\ y_M)$ 表示平面中目标M的位置，$(v_{xM},\ v_{yM})$ 表示目标M的速度，g表示重力加速度。

设拦截器的质量为$m(t)$；发动机的有效喷气速度为c，假定是一常数。用$f(t)$表示推力，其质量变化率就等于燃料消耗率，即

$$\dot{m}(t)=-\frac{1}{c}f(t)\qquad(1.10)$$

用$\varphi(t)$表示推力与水平线的夹角，称为方向角；$(x_L,\ y_L)$ 表示拦截器L的位置坐标，$(v_{xL},\ v_{yL})$ 表示其速度，那么拦截器的运动方程是

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_L(t)=v_{XL}(t)\\&\dot{y}_L(t)=v_{yL}(t)\\&\dot{v}_{xL}(t)=\frac{f(t)}{m(t)}\cos\varphi(t)\\&\dot{v}_{yL}(t)=\frac{f(t)}{m(t)}\sin\varphi(t)-g\\&\dot{m}(t)=-\frac{1}{c}f(t)\end{aligned}\right\}\quad(1.11)$$

为了进一步简化描述运动状况的数学表达式，我们取相对运动坐标，令

$$x(t)=x_L(t)-x_M(t)$$
$$y(t)=y_L(t)-y_M(t)$$
$$v_x(t)=v_{xL}(t)-v_{xM}(t)$$
$$v_y(t)=v_{yL}(t)-v_{yM}(t)$$

于是方程（1.9）和（1.11）可合写成下列相对运动方程

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}(t)&=v_x(t)\\
\dot{y}(t)&=v_y(t)\\
\dot{v}_x(t)&=\frac{f(t)}{m(t)}\cos\varphi(t)\\
\dot{v}_y(t)&=\frac{f(t)}{m(t)}\sin\varphi(t)\\
\dot{m}(t)&=-\frac{1}{c}f(t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

此外，由于推力$f(t)$不可能超出发动机的最大推力F，所以应满足约束条件

$$|f(t)|\leqslant F \tag{1.13}$$

拦截器装载的燃料也是有限的，我们用m_0表示满载燃料时的质量，用m_e表示燃料耗完时的质量。

根据以上分析，可将最快拦截问题叙述如下：

已知动态系统的运动方程（1.12）及其初始条件

$$\left.\begin{aligned}
x(t_0)&=x(0)\\
y(t_0)&=y(0)\\
v_x(t_0)&=v_x(0)\\
v_y(t_0)&=v_y(0)\\
m(t_0)&=m_0
\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

现在的任务是，寻求怎样控制拦截器的推力$f(t)$的大小（满足约束条件（1.13））和推力的方向角$\varphi(t)$，才能以最短时间

$$J=\int_0^{t_f} dt=t_f^* \tag{1.15}$$

击中目标。即到达终态$x(t_f^*)=0$，$y(t_f^*)=0$
并满足条件

$$m(t_f^*)\geqslant m_e \tag{1.16}$$

1.3 最优控制问题的一般提法

由上述三个最优控制问题的实例，可将最优控制问题的提法叙述如下：

设已知受控系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),t]$$

初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

其中　　$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$，$t\in[t_0,\ t_f]$

$$\boldsymbol{u}(t)\in\Omega\subseteq R^m$$

向量函数$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),t]$是$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$和$t$的连续函数，并对$\boldsymbol{x}(t)$和$t$连续可微。

现在要寻找在区间$[t_0,\ t_f]$中分段连续的最优控制函数$\boldsymbol{u}^*(t)$，以便把状态$\boldsymbol{x}(t)$从初态$\boldsymbol{x}_0$转移到终态$\boldsymbol{x}(t_f)$，$\boldsymbol{x}(t_f)\in S$，并使下列性能指标

$$J=\theta[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\ t]dt$$

达到极值。其中θ和L都是$\boldsymbol{x}(t)$和t的连续可微函数。

综上所述，可见最优控制问题的数学描述应包含以下四个方面的内容：

（1）受控动态系统的状态方程

状态方程反映了受控动态系统在运动过程中所应遵循的运动规律。在集中参数的情况下，其运动规律可以用一组一阶常微分方程来描述，写成向量形式是

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t] \tag{1.17}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)$表示n维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$表示m维控制向量。显而易见，方程（1.17）概括了方程（1.2）、（1.3）和（1.12）三个情况。

（2）状态方程的边界条件

动态系统的运动过程，归根到底是状态空间中从一个状态到另一个状态的转移。如果把这种转移看成是n维状态空间R^n中点的运动，则一个动态过程就对应于状态空间中的一条轨线。在最优控制问题中，初始时刻$t=t_0$的初始状态通常是已知的，即$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，而到达终端的时间$t_f$和终端状态$\boldsymbol{x}(t_f)$则因问题而异。就终端时间$t_f$而言，它可以有两种情况：一种是固定的，另一种是变动的或自由的。如例1.1和例1.3中的最短时间。至于终端状态$\boldsymbol{x}(t_f)$，情况要复杂一些：$\boldsymbol{x}(t_f)$既可以是状态空间中一个固定的点，如例1.1和例1.2；也可以是状态空间中一个变动的点，如例1.3；还可以是$\boldsymbol{x}(t_f)$中一些分量固定，另一些分量自由的情况；如此等等。但是，无论哪一种情况，我们都可以用一个目标集S加以概括，并用$\boldsymbol{x}(t_f)\in S$来表示。如果终端状态是一个固定点$\boldsymbol{x}_f$，则目标集S仅有一个元素$\boldsymbol{x}_f$；若终端状态应满足某些约束条件，则目标集S是n维空间中的超曲面；若终端状态不受约束，则目标集S扩展到整个n维空间。

（3）容许控制

从上述三例可以看出，控制问题有两类：一类是其变化范围受限制的控制，如例1.1中的作用力$|u(t)|\leqslant C$，例1.2中发动机的推力$0\leqslant u(t)\leqslant\alpha$和例1.3中的推力$|f(t)|\leqslant F$；另一类是其变化范围不受限制或实际上不受限制的控制，如例1.3中推力方向角$\varphi(t)$，因可作$\pm 360°$的变化而不受限制。

对每一个控制问题来说，控制变量$\boldsymbol{u}(t)$有一个取值范围。这个取值范围对应于m维控制空间R^m中的一个集合Ω，于是$\boldsymbol{u}(t)$的每一个值对应于集合Ω中的一个元素。凡属集合Ω的控制，称为容许控制，Ω称为控制域。在前面提到的两类控制中，前一类

控制属于某一闭集，后一类控制属于某一开集。今后我们将会看到，这两类控制问题，在处理方法上有着本质的区别。最优控制一定是容许控制，即

$$u(t)\in\Omega\subseteq R^m$$

（4）性能指标

在状态空间中，要实现状态由初态$x(t_0)$到终态$x(t_f)$的转移，可以通过不同的控制函数来实现。为了衡量控制系统在每一控制函数作用下工作的好坏，需要用一个性能指标来判断。性能指标的内容与形式，取决于最优控制问题所要完成的任务。不同的控制问题，有不同的性能指标。然而，即使是同一个问题，其性能指标可能因人们的着眼点不同而异；有的要求时间最短，有的注重燃料最省，或者两者兼顾。

在有些参考文献中，性能指标也称为：性能泛函、目标函数或价值函数。

2　最优控制中的变分法

最优控制问题，是在一定的约束条件下，寻求使性能指标达到极值时的控制函数。当受控对象的运动特性是由向量微分方程来描述，性能指标由泛函来表示时，就成了在微分方程约束下求泛函的条件极值问题。从十七世纪末开始逐渐发展成一门完整的数学分支的变分法，是求解泛函极值的一种经典方法，因此也是研究最优控制问题的一种重要工具。

本章的中心内容，是介绍经典变分学的基本原理，并把这些原理加以推广，用以求解某些最优控制问题。尽管经典变分法有其局限性，然而本章所涉及的变分学及最优控制问题的一些基本概念，在最优控制理论中是最基本的东西。建立这些概念，有助于对以后各章内容的理解和掌握。

2.1　函数的极值问题

由于泛函的极值问题与函数的极值问题在处理问题的途径和概念上有一定的联系，因此，我们先介绍函数的极值问题。

2.1.1　一元函数的极值

连续可微一元函数 $y=f(x)$，在定义区间 (a,b) 的 x_0 处，存在极值的必要条件是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\dot{f}(x)\right|_{x=x_0}=0 \tag{2.1}$$

充分条件是

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\left.\ddot{f}(x)\right|_{x=x}<0\qquad \text{极大点} \tag{2.2}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com