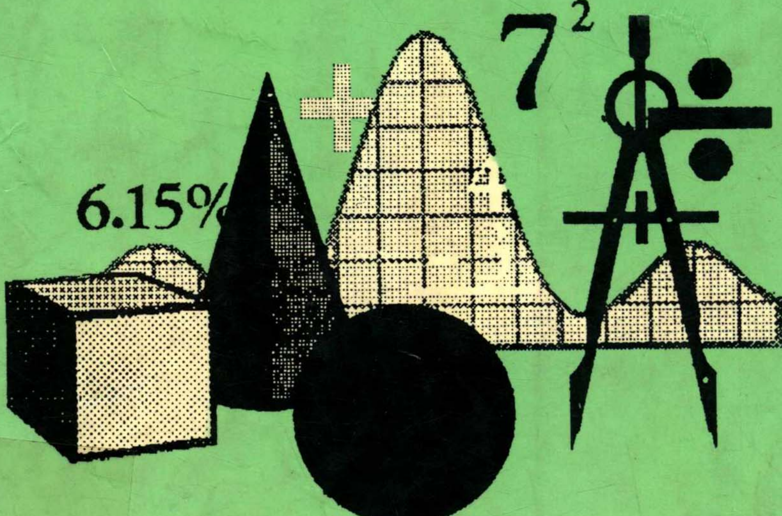
文科应用数学

WENKE YINGYONG SHUXUE

主　编　　郑　海
副主编　王　勇　任　宁



成都科技大学出版社

文科应用数学

（财经、管理、商贸、法律、公安类专业适用）

主　编　郑　海
副主编　王　勇　任　宁

成都科技大学出版社

责任编辑:王泽彬
封面设计:任 宁

文 科 应 用 数 学

郑 海 主编
王勇 任宁 副主编

成都科技大学出版社出版发行
西南政法大学印刷厂印刷
开 本:850×1168 1/32 印 张:16
1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷
印数:1—500册 字数:43千字
ISBN7-5616-3613-x/O·283

定价:23.50元

序

呈现在读者面前的这本《文科应用数学》是由西南政法大学国际经济贸易系、侦查学系、经济系的几位青年学者共同策划并组织撰写的。该书是他们在多年教学实践基础上结合高等政法院校的实际而撰写的，它不仅具有一定理论性，更具通俗性和实用性，较好地体现了应用类教材的特色。本书可作为经贸、管理、法律、公安专业的教材，也可作各类文科高等院校的教材或参考读物。

随着我国改革开放和经济体制改革的深入，经济数学方法的应用日趋广泛，我国法制化建设逐步深入，政法、公安战线数学方法的应用也日益加强。传统的靠经验办案的日子已一去不复返了，取而代之的是靠科学方法、技术手段去办案。而科学、技术手段的基础之一则是数学。随着公安、刑侦领域数理统计、对策论、运筹学等数学方法的大量应用，公安刑侦人员在理论上和实践中都需加强数学理论与方法的培养和训练。要造就一大批既懂经贸、法律，又能应用数学工具进行定量分析的综合性人才，无疑要靠教育。而卓有成效的教育，除了仰仗优秀的师资外，还少不了好的教科书。时下应用数学教科书可谓林林总总，而作为政法院校使用的《文科应用数学》教材，我还是第一次看到。读后，本人感到该书有下述特点。

基础性。数学科学博大精深，分支众多。而本书为适应初学者的需要，精心选取了其中普遍适用、不可或缺的基本理论和基础知识奉献给读者。

实用性。本书的另一特点在于实用，可谓不唯“全”，只求“实”。在着力阐述数学基础知识的同时，还朴实地介绍数学方法在经贸、法律、公安领域的大量应用，融理论性、知识性与实用性于

一体,从而使该书更具实用价值。

该书几位主编多年来活跃在经贸、法学界,成果甚多,著述颇丰。《文科应用数学》的问世,是他们诸位对经贸、法学事业和教育事业的又一份奉献。我们希望它拥有更多的读者,发挥更大的社会效益。

杨新民 教授

1998 年元月 8 日

前 言

为适应政法院校教学需要，我们组织了西南政法大学各专业数学教师编写了这本教材。

该教材在编写过程中，始终贯彻"以应用为目的、必需够用为度"的指导思想，在保证内容的科学性和系统性的前提下，不片面追求完整性，突出了针对性和应用性。本书在内容的确定上，参考了经济数学教学大纲要求，根据政法院校各专业的实际情况，力求反映政法院校各专业所需数学基础知识和有关应用问题，并采用"模块结构"以便各专业在教学中对内容的取舍。

本书在编写过程中，得到了西南政法大学教材工作委员会的关心和支持，国家级有突出贡献优秀专家、重庆师范学院数学与计算机科学系杨新民教授对教材提出了审稿意见，并欣然作序。在编写教材时，还参阅了有关教材和资料。成都科技大学出版社和西南政法大学印刷厂对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢。

撰稿者分工如下。

高世全：第 1 章、第 5 章。

任　宁：第 2 章、第 7 章、第 8 章、第 10 章。

袁　源：第 3 章。

郑　海：第 4 章、第 9 章。

王　勇：第 6 章、第 11 章、第 12 章。

由于编者水平、经验所限，本书还存在不足之处，衷心希望得到同行及广大读者的指正。

编　者

1998 年元月 8 日

目　　录

x_0的邻域 $\delta>0$, $(x_0-\delta, x_0+\delta) \Leftrightarrow O_\delta(x_0)$

去心邻域 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta) \Leftrightarrow O_\delta(x_0)-x_0$

δ为半径

第 1 章　函　数

关于∞的邻域 $M>0$ $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty) \Leftrightarrow O_M(\infty)$

17 世纪笛卡尔把变量引入数学，使数学从研究常量进一步发展到研究变量. 函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象. 在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数关系，它正是本章所要介绍的内容.

初等函数(概念)由最基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在其定义域内有统一的解析表达式

1.1　函数的概念

隐函数: 例如 $y+yx+\sin x=0$, 表达式 $f(x,y)=0$

1.1.1　函数定义

$\sin x=0$

客观事物的运动和变化都是相互联系、相互制约的，反映在数量上，就是变量与变量之间的依存关系. 相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系.

例 1.1　某工厂每日最多生产甲产品 2000 件，固定成本为 380 元，单位变动成本为 10 元，则每日的日产量 x 与每日总成本 y 的关系可表达为

$$y = 380 + 10x.$$

其中 x 的取值范围为$[0,2000]$.

例 1.2　某百货商店记录了某种化妆品历年来的月销售量(单位:瓶)，并将近十年来的平均月销售量列于表 1.1.

表 1.1

月　　份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.1 表示了该商店化妆品的销售量 S 与月份 t 之间的相互关系，且当 t 在 $1,2,\cdots,12$ 中任意取定一个数值时，从表中就可确定个平均月销售量 S 的对应数值.

我们还可以列举其它变量之间相互依存的具体例子，它们所反映的具体意义虽然不同，但都有共同的本质，这就是：在某一变化过程中有两个变量，它们是相互联系的，而且当其中一个变量在某一范围中取定了某个确定的值时，另一个变量按照一定的规律总有确定的值和它对应. 概括这些共同的本质. 我们就得出如下的函数定义.

定义 1.1 设 x 与 y 是两个变量. 如果当变量 x 在实数的某一范围中任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f，总有确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记作

$$y = f(x),$$

其中变量 x 叫做**自变量**，而变量 y 叫做**因变量**.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数具有确定的对应值，那么就称它为函数在 x_0 处的**函数值**，记为 $y_0 = f(x_0)$. 使函数有定义的自变量 x 的全体，叫做函数的**定义域**，记为 D；对应于 x 的函数值的全体叫函数的**值域**，记作 E. 两者一般都用区域表示，有时也用不等式表示.

研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据所考察的问题的实际意义来确定的. 在数学研究中，有时不考虑函数的实际意义，而只抽象地用解析式表达. 这时我们约定：函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的一切实数值. 例如函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$.

如果自变量在定义域内任取一个确定值，函数都只有唯一一个确定值和它对应，这种函数叫做**单值函数**. 如例 1.1、例 1.2 中的函数都是单值函数. 否则叫做**多值函数**. 例如半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$. 它表示圆上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的关系. 当 $-r \leqslant x \leqslant r$ 时，y 就有两个数值与之对应，所以 y 是 x 的多值函数.

以后凡是没有特别说明时,所称的函数都是指单值函数.

若两个函数的定义域和对应法则相同,则称这两个函数**相同**(或**相等**).至于自变量和因变量用什么记号表示,则无关紧要.因此,只要它们定义域相同,对应法则相同,则称这两个函数是同一个函数.

例 1.3 下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\frac{x}{x}$,$p(x)=1$;

(2)$f(x)=|x|$,$\varphi(t)=\sqrt{t^2}$.

解 (1)不相同.因为定义域不同,$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$,而$p(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)相同.因为$f(x)$和$\varphi(t)$的依存关系相同,定义域也相同,均为$(-\infty,+\infty)$.

1.1.2 函数的表示法

表达函数的方法,通常有以下三种.

1) 公式法

例 1.1 中用 $y=380+10x$ 表示总成本是产量的函数,像这种用数学式子表示自变量和因变量对应关系的方法叫**公式法**.公式法简明准确,便于理论分析和计算.这里有一点必须指出:用公式法表示函数,不一定总是用一个式子表示.如有必要,也可以分段用几个式子来表示一个函数,这类函数称做**分段函数**.例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

这是用两个解析式子给定的一个函数,其定义域是整个数轴.当自变量在区间$(-\infty,0]$内取值时,对应的函数值按$y=x^2$计算;当x在区间$(0,+\infty)$内取值时,函数值按$y=x+1$计算.它的图像由两个部分组成,左半段是抛物线,右半段是直线.见图 1.1.

但需要说明的是在有些实际问题中遇到的函数关系,很难甚至不能用公式表示.

2) 表格法

在实际应用中常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表. 如例 1.2. 如此表示函数的方法叫做**表格法**. 其优点是给定了自变量的值后,可以直接查到对应的函数值. 但表中所列数据往往是有限的、不完全的,不便于进行理论分析.

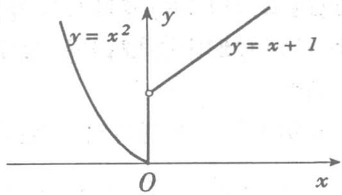


图 1.1

3) 图示法

对于函数 $y = f(x)$,在其定义域内取一个 x 值时,就可得到确定的对应值 y. 以这一对 x, y 值为坐标,在平面坐标 xOy 定出一个点 $M(x, y)$. 当 x 变化时,M 点应在平面上运动并描成一条曲线(图 1.2),这条曲线就叫做函数 $y = f(x)$ 的图形.

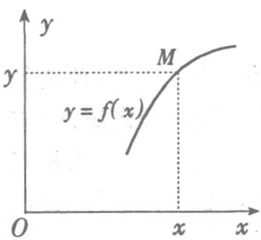


图 1.2

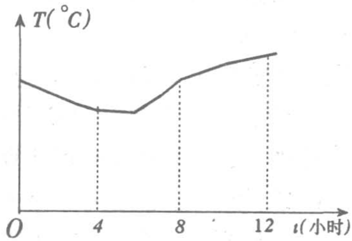


图 1.3

用函数的图像来表示函数的方法叫**图示法**. 如用温度自动记录仪描下来的温度变化曲线(图 1.3) 就表示了温度 T 与时间 t 的函数关系. 图示法的优点是鲜明直观,但不便作理论分析.

1.1.3 函数符号 $f(x)$ 的使用

在函数定义中我们已经指出:自变量 x 的函数通常记为

$$y = f(x).$$

h173

应该注意,这里记号“$f(\ )$”表示变量 y 与变量 x 之间的对应法则. $f(x)$ 表示将法则 $f(\ )$ 施加于 x,如果把 $f(x)$ 中括号内的 x 换成定义域 D 中的具体数值 x_0 或某个数学表达式 $\varphi(x)$,则表示将法则 $f(\ )$ 施用于该具体数值 x_0 或 $\varphi(x)$.

当我们把一个具体函数 $y = 2x^2 + 5x + 1$ 用记号 $y = f(x)$ 来表示,就有

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1.$$

这时,记号“$f(\ )$”表示这样的对应法则:对应的 y 值,是由括号内的 x 值经过运算

$$2(\quad)^2 + 5(\quad) + 1$$

得到的.

当自变量 x 取某一个定值 x_0 时,对应的函数值记为

$$f(x_0) \text{ 或 } y\Big|_{x=x_0}.$$

对于函数 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ 来说,

$$f(0) = 2(0)^2 + 5(0) + 1 = 1,$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 1 = -1,$$

$$f\left(\frac{1}{1+x}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 5\cdot\frac{1}{x+1} + 1$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{5}{x+1} + 1.$$

1.1.4　函数的简单特性

1) 奇偶性

如果函数 $y = f(x)$,当 x 只改变符号时,函数值不变,即

$$f(-x) = f(x),$$

那么,函数 $y = f(x)$ 叫做偶函数.

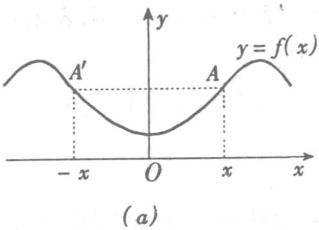
如果函数 $y = f(x)$,当 x 改变符号时,函数值也改变符号,即

$$f(-x) = -f(x),$$

那么,函数 $y = f(x)$ 叫做奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴,见图 1.4(a);奇函数的图形对称

于坐标原点，见图 1.4(b).



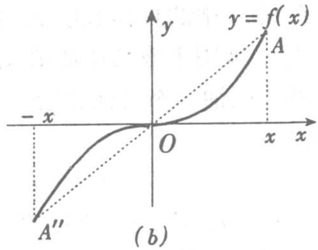


图 1.4

2) 单调性

如果函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b)内随 x 增大而增大，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

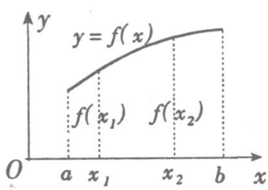


图 1.5

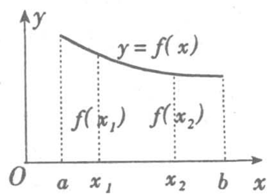


图 1.6

则函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调增加的**，如图 1.5；如果函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b)内随 x 增大而减小，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调减少的**，如图 1.6.

例如，幂函数 $y = x^3$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的；余弦函数 $y = \cos x$ 在区间$[0,\pi]$内是单调减少的.

3) 有界性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 M，使得当 x 取定义域的每一个值时，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 为该定义域上的**有界函数**. 如果不存在这样的正数 M，则称为**无界函数**.

例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对于任何实数 x，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$.

一个函数的有界或无界与讨论的区间有关. 也就是说，同一函数在某一区间内可能是有界的，而在另一区间可能是无界的.

例如，函数 $y = 1/x$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为当 x 接近于零时，$1/x$ 就无限增大，即不存在一个能使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 成立的正数. 而在区间 $(1,2)$ 内，函数 $y = 1/x$ 就是有界的了，因为至少存在这样一个正数 $M = 1$，能使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 成立.

4) 周期性

如果对函数 $y = f(x)$，存在一个常数 $T(T \neq 0)$，使得对于 x 在定义域内的一切值，都有 $f(x + T) = f(x)$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数的**周期**. 习惯上，函数的周 期 是指使 $f = (x + T) = f(x)$ 成立的 T 的最小正数.

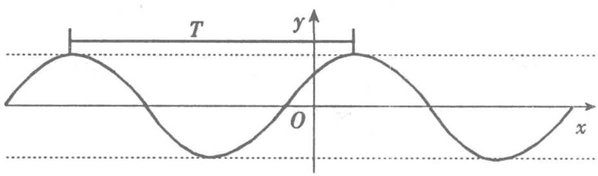


图 1.7

例如，$y = \sin x$，$y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y = \mathrm{tg} x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于一个以 T 为周期的周期函数，它的图形在定义域内每隔长度为 T 的相邻区间，有相同的形状，如图 1.7.