

圓容較義
方圓闡幽
弧矢啓秘

橢圓術
測天約術



方
圓
闡
幽

李善蘭
撰

中
華
書
局

方圓闡幽

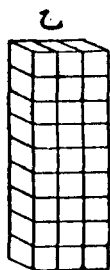
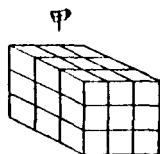
李善蘭纂
普開半竟芳說秋經海寧人諸生著有
 算術術解四元解弧矢啓鈔對數探源

第一當知西人所謂點、線、面、皆不能無體。

天地間有色者不能無形。有形者不能無體。蓋色由形著。形由體呈。今試以墨作一點于紙上。細如微塵。此形之至小者也。然非憑虛而有。乃墨所成。既爲墨所成。則其墨非體乎。是故點者。體之小而微者也。線者。體之長而細者也。面者。體之闊而薄者也。

第二當知體可變爲面。面可變爲線。

如圖甲變爲乙。則體而面矣。乙變爲丁。則面而線矣。圖只明其大意。推之爲面便可如紙之薄。爲線便可如絲之細。故盈尺之書。由疊紙而得。盈丈之絹。由積絲而成也。





體之長而細為線

第三、當知諸乘方有線面體循環之理。

一乘方爲面方。

即平

二乘方爲體。

即立

三乘方爲線。

線即中法立天元之元。西法借根方之根也。

四乘方復爲面。五乘方復爲

體。六乘方復爲線。推之。至於無窮。其爲線、面、體三者循環無已。

三乘方何以爲線也。甲爲二因之元。乙爲二因之三乘方。形相似也。

四乘方何以復爲面也。丙爲二

因之平方。丁爲二因之四乘方。形相似也。

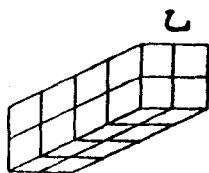
五乘方何以復爲體也。戊爲二因之立方。己爲二因之五

乘方。形相似也。

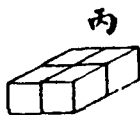
方而因之則長。長而因之則圓。圓而因之則復方。此理之自然也。



甲



乙



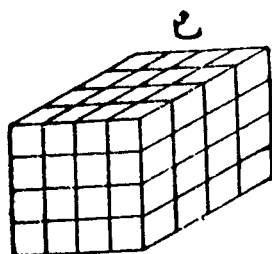
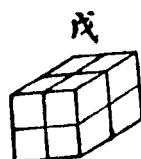
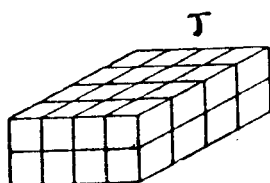
丙

第四。當知諸乘方皆可變爲面。并皆可變爲線。

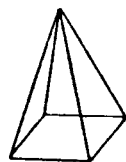
觀第二條。其理自明。

第五。當知平立尖堆之形。

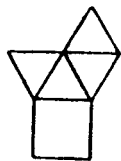
正尖堆者。尖在中央。偏尖堆者。尖在一邊。



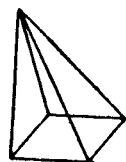
正立尖堆、底方、上四面形、如正平尖堆、大小皆同。
偏立尖堆、底方、上四面兩兩相等、而皆如偏平尖堆。
正平尖堆、中分之、成偏平尖堆。正立尖堆、四分之、成偏立尖堆。



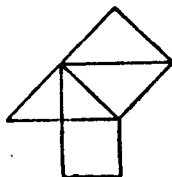
正立尖堆之形



正立尖堆之面



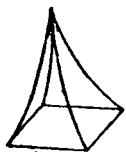
偏立尖堆之形



偏立尖堆之面

第六、當知諸乘方皆有尖堆。

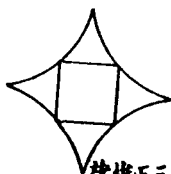
三乘以上尖堆之底、皆方、惟上四面不作平體、而成凹形、乘愈多、則凹愈甚、今圖三乘尖堆、以槩其餘。
三乘尖堆、形與立尖堆同、而凹其面、正則四面皆凹、偏則凹其兩面、若以諸面繪於平面、則正之四面、曲其兩邊、偏之四面、曲其一邊。



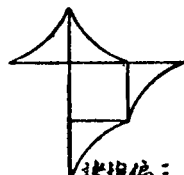
三乘正立尖堆之形



三乘偏立尖堆之形



三乘正立尖堆之面



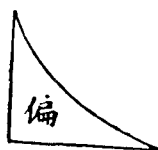
三乘偏立尖堆之面

第七當知諸尖堆有積疊之理。

元數。即立天起于絲髮而遞增之。而疊之。則成平尖堆。一定之元數。疊之。則成平方。上少下多之元數。疊之。則成平尖堆。第一層一第二層二第三層三平方數。起於絲髮而漸增之。而疊之。則成立尖堆。一定之平方。疊之。則成立方。上少下多之平方。疊之。則成立尖堆。第一層一第二層二第三層三立方數。起於絲髮而漸增之。變爲面。體可變面而疊之。則成三乘尖堆。第一層一第二層二第三層三三乘方數。起於絲髮而漸增之。變爲面。而疊之。則成四乘尖堆。第一層一第二層二第三層三從此遞推。可至無窮。然則多一乘層之尖堆。皆少一乘方。漸增漸疊而成也。

第八當知諸尖堆之算法。

以高乘底。爲實。本乘方數加一。爲法。除之。得尖堆積。設如立尖堆。高九尺。底方三尺。底面當得九尺。以高乘底。得八十一尺。爲實。乘數加一得三。爲法。除之。得尖堆積二十七尺。第九當知二乘以上尖堆。其所堆之面。皆可變爲線。



面變爲線。則諸尖堆皆成平體而曲其邊。正則曲二邊。偏則曲一邊。乘益多則曲益甚。

第十。當知諸尖堆既爲平面。則可併爲一尖堆。

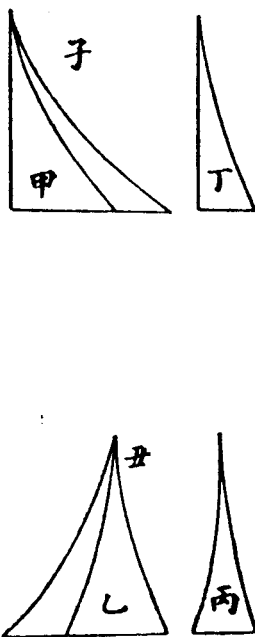
諸尖堆既爲平面。則無稜角。故可併。

弟心梅按立尖堆亦可併。

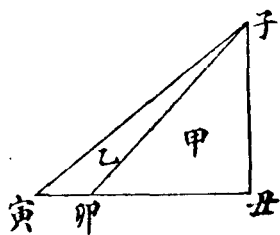
法先立一尖堆。如甲。次以一尖堆凸其一面。如先

立尖堆之曲線。如丙。則兩尖堆便可合而爲一矣。諸尖堆皆以此法併之。

丁與甲皆偏尖堆。合而爲一。則成子形。乙與丙皆正尖堆。合而爲一。則成丑形。



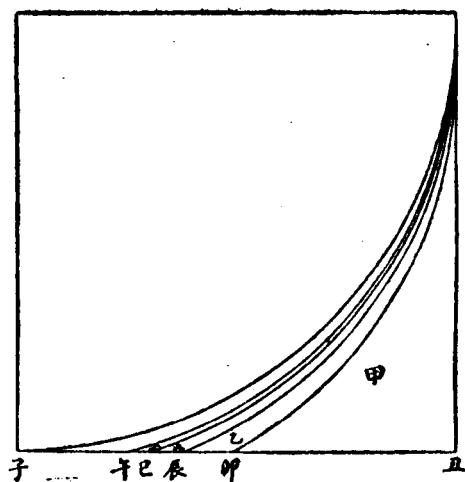
曰。如是則丙與丁形既變矣。其積得無有增減乎。曰。無也。請以算平三角法明之。
如圖。乙爲一直角二銳角形。二銳角之對邊。一爲一尺。一爲三尺。法當以一尺乘三尺。半之。得一尺半。
爲平三角積。



今改此形爲一鈍二銳三角形。法當取夾鈍角之一邊引長之。如寅卯邊引長至丑復自對邊之角。如子作垂線。與引長線成直角。如丑然後量其垂線得三尺。再量其引長之線亦得三尺。合原邊一尺爲四尺。以乘垂線半之得六尺。以原邊一尺乘之。以總數四尺除之。得一尺半。與前積同。安得謂形變而積有增減乎。梅接其高同其底同其乘數同則雖斜正偏倚不同其積無不同也。

已上十條之理既明。然後可明方圓之理。方內函圓。方圓之較。即諸乘方之合尖堆也。起再乘。次四乘。次六。次八。次十。至於無窮。其數有偶而無奇。一陰一陽之道也。再乘尖堆之底。二分半徑之一也。以其餘四分。之爲四乘尖堆之底。又以其餘六分之。爲六乘尖堆之底。其尖堆若干乘。則底亦若干分之一焉。如是。至於無盡。生生不窮之道也。

幅陰用全圓四分之一諸尖堆十乘已上亦不具列。



如圖甲爲立尖堆乙爲四乘尖堆丙爲六乘尖堆丁爲八乘尖堆其餘之細者則十乘已上諸尖堆也。乘數益多則尖堆之體益狹。半徑子半之得丑卯爲甲之底其餘卯四分之一得卯辰爲乙之底又以

其餘_{子辰}六分之得辰巳爲丙之底。又以其餘_{子巳}八分之得巳午爲丁之底。十乘以上。做此可推。既得諸尖堆之底。依前第八條法。以求其積。既得諸積。四因之。以減外大方積。便見大圓真積也。

梅案伯兄此書言理而不及數恐學者不能無惑今請以數明之準八線法半徑幕內減餘弦幕餘以平方開之爲正弦用減半徑爲餘矢餘矢者諸尖堆元數之合也然近底之元數難分近尖之元數易分今試以半徑幕爲億以餘弦幕爲一則所得之餘矢必近尖而諸元數可分矣

半徑冪

餘弦冪

減餘

開得正弦

八七四九九九九三三七四九九九
九六〇九三七四九九七二六五六二四
九

餘矢

一二五〇〇〇〇六二五〇〇〇〇
〇三九〇六二五〇〇二七三四三七五

○五者、立尖堆之底也。二分半徑之一今降四位。餘弦萬分半徑故其底法降八位也。每降一位則○一二五者、四乘尖堆之底也。四分再乘今降四位。其底降一位則故其底法降十六位也。每降一位則○六二五者、六乘尖堆之底也。六分四乘今降四位。其底降一位則故其底法降二十四位也。每降一位則○三九〇六二五者、八乘尖堆之底也。八分六乘今降四位。其底降一位則故其底法降三十二位也。每降一位則○二七三四三七五者、十乘尖堆之底也。十分八乘今降四位。其底降一位則故其底法降四十位也。每降一位則伯兄之說可謂信而有徵矣。猶未也。更以二之餘弦驗之。

半徑冪 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

餘弦冪 〇〇〇〇〇〇〇〇〇四

減餘 〇九九九九九九六

開得正弦 〇九九九九九九七九九九九九九七

九九九九九九五九九九九九九八

九九九九九九七一九九九九九九一五

九

餘矢 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇二〇〇〇〇〇〇〇〇二

○○○○○○○○四○○○○○○一○
 ○○○○○○○二○○○○○○八四
 ○

立尖堆、倍其高、則當四其底。今果五變爲二○、四乘尖堆、倍其高、則當十六其底。今果一二五變爲二○
 ○○、六乘尖堆、倍其高、則當六十四其底。今果六二五變爲四○○○、八乘尖堆、倍其高、則當二百五十六其底。今果三九○六二五變爲一○○○○○○○○○、十乘尖堆、倍其高、則當一千二十四其底。今果二七三四三七五變爲二八○○○○○○○○也。
八四者十二乘尖堆倍高之底然則方圓之較、其爲諸尖堆之合、可無疑矣。