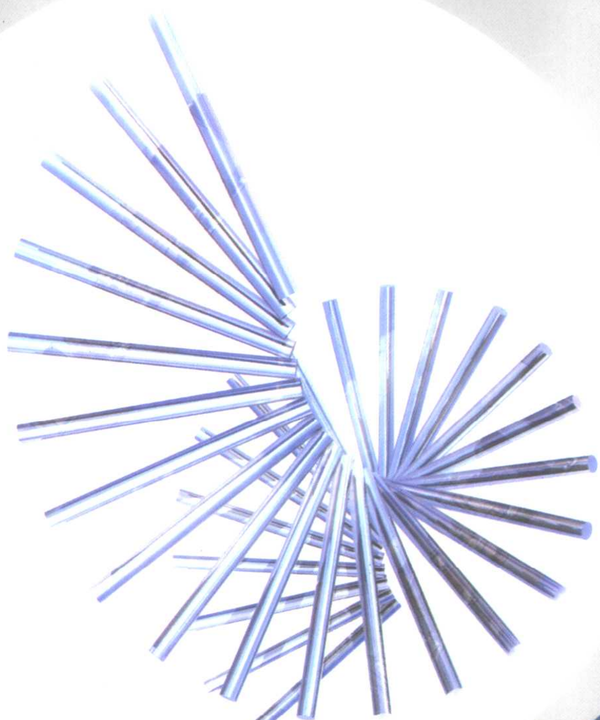
# 结构动力修改及优化设计

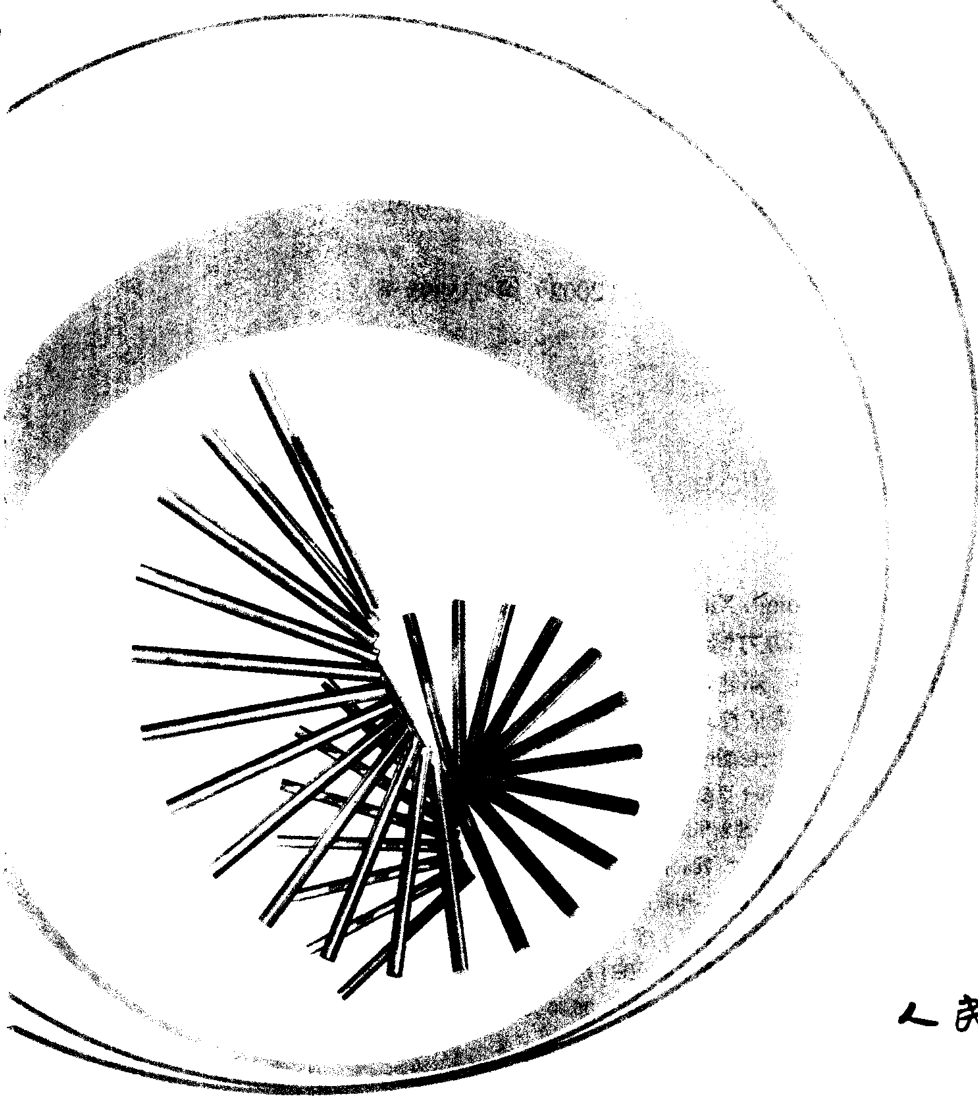
荣见华　郑健龙　徐飞鸿　编著



人民交通出版社
China Communications Press

# 结构动力修改及优化设计

荣见华　郑健龙　徐飞鸿　编著



人民交通出版社

## 内 容 简 介

本书主要介绍结构动力修改、结构动力学优化设计以及包含结构静、动力学拓扑优化设计等内容的渐进结构优化的基本理论、计算方法和算例。本书可作为结构设计、分析和实验科学工作者的理论、应用指导书，同时抛砖引玉，推动结构动力修改及优化设计的进一步发展与应用。

本书可供从事结构分析和设计领域的科学工作者及高等院校相关专业教师与学生参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

结构动力修改及优化设计 / 荣见华，郑健龙，徐飞鸿编著. —北京：人民交通出版社，2002.5
ISBN 7-114-04292-2

Ⅰ.结... Ⅱ.①荣... ②郑... ③徐... Ⅲ.结构动力学 Ⅳ.0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 035898 号

Jiegou Dongli Xiugai Ji Youhua Sheji
**结构动力修改及优化设计**
荣见华 郑健龙 徐飞鸿 编著
正文设计：姚亚妮 责任校对：宿秀英 责任印制：张 恺
人民交通出版社出版发行
(100013 北京和平里东街 10 号 010 64216602)
各地新华书店经销
北京鑫正大印刷有限公司印刷
开本：787×1092 1/16 印张：22 字数：544 千
2002 年 10 月 第 1 版
2002 年 10 月 第 1 版 第 1 次印刷
印数：0001－1500 册 定价：36.00 元
ISBN 7-114-04292-2
TU·00094

# 前　　言

随着科学技术和经济建设的迅速发展，各种新的结构形式不断出现，诸如各种大跨度桥梁（斜拉桥和悬索桥等）和复杂的飞机结构（多外挂、复合材料飞机结构）得到了进一步发展。近年来，新结构与新材料的使用，有效地减轻了结构质量，但降低了结构刚度，使结构动力学问题更加突出；新结构与新材料的可设计性增强，使结构动力学分析转向结构动力修改、结构动力学设计和结构动力学拓扑优化设计，扩展了结构动力学研究和应用的范畴。

同时计算机技术及其在结构分析中的普遍应用，促进了结构动力修改及优化设计数值方法的发展。显然，在一定激励环境下，结构尺寸、形状、材料与拓扑构形控制了结构强度与振动响应水平。因此，在给定静力、动力学约束条件下，进行结构优化设计，"主动"地确定最优的静、动力特性结构已成为近年来一个活跃的研究分支。但是，国内全面介绍结构动力修改及优化设计的最新研究成果与理论、方法的论著尚少，因此，作者感到有责任向读者比较全面地介绍这一方面已取得的成果，这是撰写本书的宗旨之一。

作者从 20 世纪 90 年代初开始系统地研究结构动力修改和优化设计，并且不断深化，已经进行了一些构件的动力试验和动力模型修改工作。尔后，作者又进行了构件和大型结构动力试验和结构动力学优化设计的理论研究和应用工作。在 20 世纪 90 年代后期，有幸在澳大利亚维多利亚理工大学进行了一段时间的访问与工作，并将 Mike 教授首次提出的渐进结构拓扑优化方法推广到结构动力学拓扑优化领域。因此，有必要将我们的研究成果结合国内、外的研究状况介绍给工程界，这是撰写本书的宗旨之二。

基于上述二点，也出于教师与工程结构研究人员的责任感，特写此书，奉献给全国工程界、学术界的同行及大专院校相关专业的师生们。

在本书出版之际，特此感谢在研究过程中，给予我们指导、支持和帮助的顾松年教授、姜节胜教授、王凤山研究员、姚起杭研究员、齐丕骞研究员、许光启研究员和张凌霞高工。国家自然科学基金委员会、省自然科学基金委员会、长沙交通学院在基金上均给予本课题的研究大力支持，在此作者诚挚地表示谢意。

由于作者水平有限与时间紧迫，书中难免会有错误与不足之处，恳请读者赐正。

作　者

2001 年 12 月

于长沙交通学院

# 目　　录

# 绪　论

## 0.1　结构动力分析、修改与优化设计的发展

自计算机问世以及结构有限元理论和方法的产生与应用以来，借助有限元的结构动力分析理论与方法在最近40多年得到了前所未有的发展。随着科学技术的进步，人们对工程结构的要求越来越高，不仅要求结构能完成预定的复杂使命，而且还要具有良好的静、动力特性，寿命长、工作安全可靠的特点。目前许多工程结构都是高柔性结构形式，其结构的大型化、复杂化和工作环境日益复杂化，导致结构静、动强度问题普遍存在。因此能指导工程结构设计、运行管理的结构动力学的研究和应用范畴从结构动力分析、结构动力修改、结构动力学设计向结构动力学拓扑优化纵深延拓。这些技术赋予结构动力学新的内涵和生命力。再者因为这些技术相互关联和影响，在近20年内结构动力修改、动力学设计取得了突破性进展。而结构动力学拓扑优化设计，由于其数学上的困难，发展较晚，相对而言，结构动力分析是较成熟的技术。下面就结构动力修改、动力学设计和拓扑优化设计的发展状况分别进行介绍。

### 0.1.1　结构动力修改的发展

随着结构有限元分析的理论、方法和应用的进一步深入，要求反映结构特征的数学模型正确可靠就成为顺理成章的事，建模问题也因而显得日益重要起来。就结构动力学而言，一个良好的数学模型是响应计算、载荷预估、稳定性分析等所必需的。如果考虑到对结构的主动控制、故障在线的振动诊断，建立一个低阶的实用模型则更有实际意义。

20世纪50年代中期，有限元法兴起，借助于有限元的理论分析，建模方法得到很大发展。此法可借鉴经验知识，但由于各种原因，其所建立的数学模型常不能准确反映实际结构的特征。20世纪60年代，跟踪滤波与快速付里叶变换技术先后出现，不论是模拟式还是数字式的振动测试精度都大幅度提高，参数识别技术因而得到长足进展，为建模提供了另一途径，即所谓实验建模。然而，参数识别是以存在参数模型为前提条件的，如果参数模型本身不能反映结构的本质与特征，则任何好的数学辨识方法也于事无补。再者，由参数识别得到的模态数据，往往远少于建模的需要，因此建模仍存在不少有待解决的问题。

以上建模方法，往往需借助人们的经验与判断，通过反复试凑才能得到较好的模型。20世纪60年代末，人们已清晰地看到了这些问题并着手解决，并努力朝着以下两个方向工作：用理论分析(主要是有限元法)建立模型，再用实测数据进行模型修改，即所谓结构动力修改(模型动力修正)；仅用测试数据，以参数模型为依据求得物理(几何)坐标下表征结构动力特性的质量、刚度、阻尼矩阵，即所谓物理参数识别问题。直至今天，以上两个方面仍然是结构动力学极为活跃的研究方向，已发表相当数量的文献，提出了多种方法。不言而喻，上述研究容易引伸到设计领域，所以，结构动力修改的工程含义可从两个方面予以阐述：

(1)计算模型的动力修改　对于实际结构运用有限元法建立的数学模型，由于它不能准确地反映实际结构的动力特征，需用测试数据予以修正，以获得能用于计算的数学模型。

(2)结构的动力修改　包含正反两方面的问题。正问题系指：对已有结构做了局部改动后，在原结构模态参数已知的情况下，用快速简易的方法获得改动后的结构模态参数，即所谓结构重分析问题。反(逆)问题则是指：已知的原结构模态参数不符合要求，在对结构模态参数的要求已给定的情况下，对结构进行修改，使改动后的结构模态参数符合要求。近年来，国内数学工作者和工程人员研究并取得相当进展的逆特征值问题，也可归属后一范畴。

将结构视为一工程系统，则结构动力修改的实质是：根据系统某些动力特性的要求(对于计算模型的动力修改则为实测数据)，对已有系统进行有约束和有目标的修改。从原理上来看，这是一个有约束的系统优化设计问题。然而，具体的工程实际千差万别，结构动力修改的具体方法也就各不相同了。

结构动力修改之所以被人们重视而得到飞速发展，从它的工程含义来看是不难理解的。应用有限元法使实际的连续系统离散化，从而得到有限元模型。这种建模方法不仅可用于一般的结构、机械，借助于模态综合技术，还可用于诸如飞行器、船舶和大型桥梁这样的复杂结构。但有限元模型不是理想的，例如，在结构动力学中，它对质量阵的处理就不能反映惯性力的分布情况，即使采用一致质量阵也是如此。此外，对构件之间的连接、边界的约束等，都需做出力学上的简化处理，在形成动力学模型时往往忽略阻尼或凭经验引入阻尼，网格的划分与自由度的设置受计算机容量及运算机时的限制等等，都使得模型具有缺点，动力计算的精度也常嫌不足。因此，动力修改在建模中常常是必需的环节。就结构重分析而言，动力修改的重要性及其经济效益也是明显的：结构设计是一个渐进的优化过程，当对结构做出微小或局部修改后，为获得其动特性，必须对修改后的整体结构去进行费时耗资的全面分析，而动力修改提供了一种快速而简易地确定修改后结构动力特性的方法。就结构动力修改的反问题而言，修改具有同样的意义，它是同一问题的另一种提法。

结构动力修改一开始就与航空航天工程紧密相连，近20多年来的许多研究也都是结合飞行器、航天器这样一些重要而又复杂的结构进行的。当前，不仅在理论、方法的研究上呈现出一派欣欣向荣的状况，各国也推出了不少工程应用软件。同时，动力修改技术的应用，也推广到动力机械甚至产品的包装等领域。不仅如此，新的修改方法仍不断出现，实用的程序也不断被推出。可以说，结构动力修改的研究正如火如荼、方兴未艾。将有限元分析与动力修改相结合，并将修改直接用于有限元模型内，已被人们重视。将有限元建模、模态分析与参数识别、动力修改等揉合在一起的软件，也引起了人们广泛地注意。

### 0.1.2　结构动力学设计的发展

过去，工程结构按静强度概念设计，依据动强度进行校核，然后再用动力学试验或验算对其修改。一个复杂结构从初步设计到建造完成，需很长时间，耗费大量人力和物力。这是一种落后、费时、且欠优的设计方法。再者，结构在运行过程中，不可避免产生振动过大或振动故障。以国产某型战斗机为例，在研制过程中出现了11个较大的振动问题：液压导管振裂导致该型第一架全天候飞机地面开车时烧毁；加力燃油总管振裂引起空中失火，烧坏一个后机身；炮击振动过大；前轮发生摆振、抖振和嗡鸣等。有关统计表明，在桥梁等结构所发生的重大事故中，主要与结构强度有关，40%与振动有关。我国多座大型桥梁设计与建设过程中也均遇到过许多结构强度问题，特别是严重的振动问题。对桥梁而言，车辆运行载荷、地震、风载都是动载荷，所以说，在一定程度上，桥梁性能与服役寿命除依赖于结构静力性能外，更依赖于结构的动力学性能。为了提高结构设计水平，迫切要求对以动载为主的结构进行早期动力学设计，要

求提供结构动力学设计的工作手段。

实际结构动力学优化设计的目标可以是结构质量、结构固有频率、结构某几点的动应力、动响应的特定要求，而其约束包括特征频率、动应力、动响应、结构参数尺寸限制等。在结构动力学设计研究的早期阶段，设计变量仅涉及少量的可调参数，后发展为结构的尺寸和几何外形，近几年延拓为结构的拓扑构形。常规意义上的结构动力学设计仅包含结构尺寸和外形的设计，根据实际要求可以构成各种动力学优化数学模型。实际结构动力学优化设计过程一般是一个迭代过程，迭代过程的每一个设计步骤包含：

· 应用有限元分析一个原始或"尝试"设计结构；

· 使用灵敏度分析等近似方法将目标函数、性能约束表作为设计变量的明显线性化函数；

· 用一个有效的数学规划算法获得一个新的最小目标函数的优化设计解。

然后这个新的设计成为下一次设计迭代的"尝试"设计。成功的迭代过程是进行到目标函数变化量小于某个指定的容限及各个约束条件被满足为止。最终设计依赖于一个满足所有指定性能的标准。重分析方法、灵敏度分析、近似方法、优化算法的优劣对结构动力学设计的效率与精度很有影响。动力学设计的动力性能指标多种多样，但最主要的是：要求设计的结构其固有频率具有某一数值，即所谓频率设计；要求结构某些部位的动力响应幅值在一定范围内，即所谓响应设计；频率与响应的要求并存，即频率与响应的联合设计。

结构在动荷载作用下的优化设计是优化领域中研究的比较少的一个分支，也是工程实际中亟待解决的问题。由于应用了线性和非线性规划，具有瞬时动力响应的系统最优化领域在20世纪60年代后期得到了很大的发展，但主要基于动力学特性灵敏度分析，集中解决少量参数的最优化设计问题，例如减振器、吸振器设计和各种减振隔振技术的研究和应用。但随着结构有限元技术的发展和工程化，以及结构动力修改技术和计算机技术的突飞猛进，在近十几年内，大量文献聚集于通过改变结构尺寸和形状解决大型结构动力学特性（如频率、振型、响应）的灵敏度分析、重分析、优化算法和策略问题上，同时也形成了一些有效的工程化结构动力学优化方法和应用软件。

与结构静力优化的研究和应用情况比较而言，结构动力学设计还很不成熟，推究其中原因，无疑是因为动力学优化研究遇到较大的困难。困难之一是结构动力学优化设计本身是一个典型的动力学反问题，为了去除求解盲目性，应该比较清楚地研究其解的存在性与惟一性（即使不是在严格数学意义上，也应该建立在可信的工程意义上 ）。此问题又与约束本身的可行域有关。顾松年、姜节胜等人的研究发现，动力学约束中确实存在像固频这类可行域可能是空集的约束，从而使问题无解（具有"空集"的约束，称之谓"关键约束"）。对于像简单桁架之类，姜节胜等人提出了频率优化解的存在性及其算法，而对于复杂结构，还有待进一步研究。困难之二是结构动力学特性本身是设计变量的高度非线性函数，再者对于大型复杂结构，结构动力学特性及其灵敏度计算量大。因此计算量小和精度高的各种重分析方法是我们企求的。

### 0.1.3 结构动力学拓扑优化方法的发展

结构优化的目的在于以最少的材料、最低的造价和最简单的工艺实现结构性能的最佳。结构优化最初采用经典解析方法求解，所用方法是变分法或微分法。对无约束优化问题，用Euler-Lagrange 方程构造极值存在的充要条件，然后用梯度向量搜索优化方向；约束优化问题则采用 Lagrange 乘子构成辅助函数来考虑约束条件的影响。虽然解析方法可以解决一些简单构件，如桁架、预应力钢筋混凝土长桩吊点位置和墩式码头桩基布置的优化问题，但涉及的复杂

的数学推导阻碍了它在实际结构中的应用。近年来,计算机技术及其在结构分析中的普遍应用,促进了结构优化的数值方法的发展。其中,数学规划法(MP法)和优化准则法(OC法)是广泛被采用的两种方法。显然,在一定激励环境下,结构尺寸、形状、材料与拓扑构形控制结构强度与振动响应水平。因此,在给定静力、动力学约束条件下,进行结构优化设计,"主动"地确定最优的静、动力特性的结构已成为近年来一个活跃的研究分支。

"拓扑优化"通俗地讲就是根据一定的准则,在满足各种约束条件下,在结构上开孔、打洞、去除不必要的构件和材料(即结构的构件布局和节点连接关系的变化),使结构在规定意义上达到最优。自1964年Dorn等人提出基结构法(Ground Structure Approach,简称GSA法),将数值方法引入拓扑优化领域,拓扑优化研究便开始活跃起来了。GSA法的思路是从基本结构出发,按照某种规则或约束,将一些不必要的杆件从基本结构中删除(如刚度接近零、柔度极大的杆件可从桁架中删去),认为最终剩下的构件决定了结构的最优拓扑。因此,应用基结构可将拓扑优化当作截面优化来处理,但此法局限于处理单工况静定结构。后来Dobbs与Shen等人采用最速下降法与分枝定界法求解了在应力与位移两类约束条件下桁架结构在多工况作用下的最优拓扑。我国王光远及Kirsch等人又陆续提出结构拓扑优化的两相法、两阶段法以及优化准则类推法,使求解拓扑优化的能力有较大提高。此外,段宝岩等人提出采用内力作为设计变量构造了非线性规划,求解了多工况拓扑优化问题。连续体结构拓扑优化方法有著名的均匀化法(Homogenization Method)、变厚度法、变密度法及等周方法。这些方法虽可解决各类结构的静力、刚度等拓扑优化问题,但方法的计算效率和通用性均不理想。近年来,适合于并行计算的全局搜索法并结合仿生学的各种方法(基因遗传算法,模拟退火算法,神经元网络法,以及极大熵原理法)开始被应用于拓扑优化上,取得了瞩目的进展。虽然这些方法搜索最佳解有一定的优势,但由于计算量大,无法在大型工程结构中应用。进化结构优化法(Evolutionary Structural Optimization,简称ESO法)就是在这种要求下发展起来的。ESO法的基本概念很简单,即通过将无效的或低效的材料一步步去掉,或一步步增加有效的材料,结构也将逐步趋于优化。特别是,该方法可采用已有的通用的有限元分析软件,通过迭代过程在计算机上实现。其算法通用性好,不仅可解决尺寸优化,还可同时实现形状与拓扑优化(主要包括应力、位移/刚度和临界应力约束问题的优化)。最近还被我们推广至动力学的拓扑优化问题中。

结构动力学拓扑优化方面应用的文献较少,这是情理之中的事情。因为在动力学问题中,多约束下尺寸与形状优化问题都不成熟,而在拓扑优化问题中不同类型的变量具有极不相同的特性,加之拓扑优化中构形变量在约束性质上,与尺寸变量相比具有更高的非线性性质,求解起来更为困难。另外动力学问题拓扑准则的描述比起静力问题更趋近似,更易产生"七巧板"(或"棋盘格子")状不实际的优化样式,也更易产生奇异解。所以说动力学拓扑优化设计问题是优化问题中最富挑战性的研究领域,应大力开发与探索。

## 0.2 本书的研究内容与安排

本书主要研究结构动力修改、结构动力学设计和渐进结构拓扑优化理论与方法。渐进结构拓扑优化理论与方法是1993年由澳大利亚维多利亚理工大学学者谢亿民教授首次提出,尔后得到迅速发展和应用,目前已应用到包含应力、位移(刚度)、临界应力和动力学约束的众多结构拓扑优化领域。考虑到国内学者在这方面注意较少,本书除介绍渐进结构优化理论在结构动力学拓扑优化拓展和应用外,还将全面介绍渐进结构优化方法在各领域的进展和应用成果。

第一章简单介绍有限元法的理论基础：连续介质力学、变分原理和有限元法的基本原理。

第二章简单介绍结构动力分析的基本理论与方法：结构特征值和模态分析、模态综述技术、线性动力响应分析和非线性动力响应分析。

第三章首先给出了结构模态灵敏度分析与公式，然后较全面介绍了矩阵摄动法、实测模态参数进行动力修改的方法、局部物理参数修改法、元素型方法、参数修正法、具有复模态的结构动力修改和物理参数识别的工程方法等理论和应用成果。系统地比较了各种方法的优劣。针对实测结构模态数据和结构有限元模型的特点，提出了一些行之有效的处理措施。在参数修正法中，以较大篇幅介绍了利用动响应数据进行模型修正，采用迭代方法诊断建模错误和修正模型以及解的惟一性等研究结果和仿真算例。这些研究成果在结构动力修改领域将具有一定的应用性。

第四章首先研究动力学设计与动力特性指标的若干问题，如解的存在性、动力特性约束的可行域和简单结构频率优化解的存在性及算法，并介绍动力学优化设计的独特之处。这些成果对动力学优化设计工程化方法中优化模型的参数化和改进各种动力特性及其灵敏度近似分析和优化算法有一定指导作用。然后介绍数学规划法在动力学设计中应用的基本情况。接着分类研究和讨论了瞬态动载荷作用下优化模型的参数化、动力学特性及其灵敏度近似分析和重分析方法以及优化处理技术。该部分对工程结构动力学设计有很强的指导性。本章第四部分对考虑动力学性能要求的桁架结构形状优化设计进行了重点介绍。其中涉及统一设计变量化、结构振动响应约束的桁架形状优化、刚架与板组合结构动力学形状优化和优化策略，解决了处理两类不同量纲设计变量的耦合给优化问题求解带来的困难等诸多问题。最后一部分列出了工程结构动力学优化设计技术的研究和应用成果，主要包含结构特征灵敏度的子结构综合方法、重分析近似法、动响应高阶修改及灵敏度分析的近似方法和优化算法的策略，同时给出了包含复杂结构设计的算例。该部分理论与方法具有广泛的应用性。

第五章阐述了渐近结构优化(ESO)的基本原理，并全面介绍了近年来渐近结构优化的理论和应用进展情况。首先阐述了基于应力约束的基本渐进结构拓扑优化原理，列出了基于现有有限元程序的进化步骤，相应的算例给出了很有趣的结果，并表明该方法具有很强的工程应用性和很好的计算效率。然后依次给出了多载荷情况和多支承环境的 ESO 方法、带有刚度或位移约束的结构拓扑优化方法、考虑频率的结构拓扑优化方法、结构屈曲优化方法、用于铰接和刚性连接框架的 ESO 方法、用于形状优化和减小应力集中的 ESO 方法、动响应约束的结构拓扑优化和多约束桥梁的拓扑优化方法，并相应附上了大量算例。其结果也说明了渐近结构优化(ESO)方法不愧为结构拓扑优化领域的一个重大突破。ESO 方法属于准则法，主要的工作量是形成用于删除单元的判断参数，即结构特性灵敏度数。在上述所有优化问题的 ESO 方法中，其灵敏度数的计算减缩为单元矩阵规模，相应的计算量大为减少。目前所涉及的优化问题的单元规模超过了 5 000 个单元，且该方法可解决二维和三维复杂结构的结构拓扑优化问题。ESO 方法不仅可解决尺寸优化，还可同时实现形状与拓扑优化；在动响应约束的结构拓扑优化方法中，提出了动响应和其灵敏度数的计算公式，并使得复杂结构的动力学拓扑优化设计成为现实；而在多约束桥梁的拓扑优化方法中，针对桥梁结构的受力特点和多性能要求，采用基于主应力的优化准则和优化性能指标公式，得到了几种桥梁优化设计构形；在多模态结构屈曲优化算例中，改进的屈曲优化方法给出了最好的设计解。本章的理论与方法不仅具有广泛的应用性，还具有操作使用的简洁性。

# 第一章 结构有限元法的基本理论

## 1.1 引言

结构有限元法是一种求解连续介质力学问题的数值方法，也是大型、复杂结构动力的分析、修改及优化设计的基本平台。由于实际工程结构和受载十分复杂，很难得到一个能用解析公式描述的精确解，而有限元素法以最灵活的方式提供了一种数值解法。它既使相当复杂的工程问题的求解能够得以实现，又能使所得到的精度满足工程师们的需要。

大型计算机的出现使越来越复杂的工程问题用结构有限元法求解成为现实，许多高级的计算程序使分析结果越来越精确，这些都大大促进了结构有限元法的广泛应用与更进一步的发展。

目前，论述结构有限元理论和计算程序的著作十分丰富。为了更好地了解后继章节的结构动力分析、修改和优化设计的内容，本章有选择地介绍基本的、重要的结构有限元法的基本理论方法。其余，可参阅有关的文献。

## 1.2 连续介质力学简介

### 1.2.1 运动学

运动学所研究的是连续介质的运动。它研究物质运动和变形的几何关系时，不考虑运动是由何种原因引起的。

在连续介质力学中，无限多个质点的集合称为物体，组成物体的所有质点在某一时刻所占据的区域称为构形。

描述物体的运动和变形的方法有两种：一种是 Lagrange 描述，使用物质坐标；另一种是 Euler 描述，使用空间坐标。

#### 1.2.1.1 Lagrange 描述

Lagrange 将运动中的介质本身作为研究对象，更确切地说，是观察运动物体的质点，研究质点的位移、速度、密度等表征运动的物理量以及它们随时间的变化规律，考察这些物理量由一个质点到另一个质点的变化情况。

若每个质点的运动特性是由某些参数来表征的，那么，上述物理量就是这些参数和时间的函数。如果选取一个固定的笛卡儿直角坐标系，将某一特定时刻 $t_0$ 物体中各质点的位置坐标 $(X^1, X^2, X^3)$ 作为确定质点特性的参数，在这一时刻的构形称为初始构形或参照构形。由于物体运动和变形，在以后的任一时刻，质点位置由 $(X^1, X^2, X^3)$ 移到 $(x^1, x^2, x^3)$，因此，质点在任一时刻 $t$ 的位置坐标 $x^i(i=1,2,3)$ 是 $X^i$ 和 $t$ 的函数

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3, t) \qquad (i = 1,2,3) \tag{1-1}$$

在 $t_0$ 时刻，质点位置为 $X^i = X^i(X^1, X^2, X^3, t_0) \qquad (i = 1,2,3)$ (1-2)

在固定坐标系中，质点沿 3 个坐标轴方向的位移为 $u^i(i=1,2,3)$，则质点在任一时刻的坐

标为
$$x^i = X^i + u^i(X^1, X^2, X^3, t), i = 1,2,3 \tag{1-3}$$
式(1-3)定义了物体的运动和变形。

质点的运动特性,可采用它在初始构形中所处位置的笛卡儿坐标 $X^i(i=1,2,3)$作为参数来表征,也可以采用其它曲线坐标系 $\alpha^i(i=1,2,3)$,只要两个坐标系之间存在单值映射关系
$$X^i = \varphi^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3), i = 1,2,3 \tag{1-4}$$
这样情况下,要求 Jacobi 行列式不等于零,Jacobi 行列式为
$$\frac{D(X^1, X^2, X^3)}{D(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial X^1}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial X^1}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial X^3}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial X^3}{\partial \alpha^3} \end{vmatrix} \tag{1-5}$$
自变量 $X^1$、$X^2$、$X^3$ 和 $t$ 称为 Lagrange 变量,式(1-1)所表达的称为 Lagrange 描述,由此可导出质点的速度分量和加速度分量
$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} \tag{1-6}$$
$$w^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \tag{1-7}$$

采用 Lagrange 描述,运动物体每一个质点在任一时刻的位置可由它们在参照构形中的位置来决定,因此,设想在物体中镶嵌进一个曲线坐标系,这个曲线坐标系跟随物体变形和运动,称为流动坐标,或内在坐标、拖动坐标。采用这样的坐标系,同一质点在运动和变形过程中,其坐标值,也就是质点的坐标在数值上永远保持不变。这意味着在各个瞬间,同一个质点的坐标值都相同,但坐标的形状随物体的变形每时每刻都在变化,因此,度量张量也随之变化。Lagrange 描述也叫物质描述,采用的坐标也称为物质坐标,这种坐标系有时也叫物质标架。

1.2.1.2 Euler 描述

Euler 将介质所占据的空间作为研究对象,观察空间中某 4 个点上各种表征运动的物理量随时间的变化,研究这些物理量随空间各点位置不同而变化的情况,也就是说,各种物理量是空间中的各点坐标和时间的函数。空间中各点在固定的笛卡儿直角坐标系中的位置为$(x^1, x^2, x^3)$,因此,表征物体运动的各种物理量都是坐标 $x^i(i=1,2,3)$和时间 $t$ 的函数,自变量 $x^i$ 和 $t$ 称为 Euler 变量,例如速度 $v^i$、密度 $\rho$ 和压力 $p$ 等都可认为是 Euler 变量的函数
$$\left.\begin{aligned} v^i &= v^i(x^1, x^2, x^3, t) \\ \rho &= \rho(x^1, x^2, x^3, t) \\ p &= p(x^1, x^2, x^3, t) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

Euler 描述实质上是研究各种标量场和向量场,如密度场、压力场、速度场、加速度场等,它不直接给出某一质点的运动特性。Euler 描述也称为空间描述,相应的坐标系叫空间坐标,这样的坐标也称为空间标架。

Lagrange 变量与 Euler 变量之间可以相互转换。若单值映射条件,即 Jacobi 行列式$|[J]|$不等于零,得到满足,即可实现相互转换,$|[J]| = D(x^1, x^2, x^3)/D(X^1, X^2, X^3)$。

在固体力学中,通常采用 Lagrange 描述,因为在给定物体的初始状态、约束条件和载荷之后,要求求出物体各质点的位移,也就是要求确定变形状态的构形,因此,采用物质描述最合

适。它将使运动学中的关系变得较简单。

在流体力学中一般都采用 Euler 描述，因为通常流体的边界形状和边界上流体的运动特性事先都是给定的，流体力学中待求的未知量往往不是质点的位移，而是它们的速度，并常在边界上给定速度，于是，不必跟踪流体质点的位移，而是研究流体所占空间的速度场等，所以合适的数学方法是空间描述。

1.2.1.3 张量分析概要

张量有一个非凡的优点：张量方程不是参照哪个特定的坐标系的，如果在一种坐标系中方程成立，那么在所有其它坐标系中它都成立。

举例说，流动坐标系是随物体变形而不断变化的坐标系，由于张量具有上述独特的性质，就不难想象，当采用 Lagrange 描述时，应用张量会有多大的好处。

张量本身的定义不从属于任何坐标系，定义张量之后，对于任何坐标系，都能求得张量的分量，这些分量从一个坐标系变换到另一个坐标系时都遵循一定的变换公式。因此，我们先从坐标变换开始研究。

设有两个坐标系 $x^i$ 和 $\bar{x}^i(i=1,2,3)$，它们之间存在单值映射关系，即 Jacobi 行列式不等于零，两者之间的关系为坐标变换

$$x^i = x^i(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3) \qquad (i=1,2,3) \tag{1-9a}$$

和逆变换

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1,x^2,x^3) \qquad (i=1,2,3) \tag{1-9b}$$

下面给出标量、向量和张量的一般定义。

(1)标量　如对坐标系定义一个函数，对 $x^i$ 为 $f(x^1,x^2,x^3)$，对 $\bar{x}^i$ 为 $\bar{f}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)$，在坐标变换(式 1-9)情况下，在同一点上，这两个函数的值相同

$$f(x^1,x^2,x^3) = \bar{f}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3) \tag{1-10}$$

这时，称点的函数 $f(x^1,x^2,x^3)$ 为不变量或标量，它不随坐标系变化而变化，例如，介质的温度 $T(x^1,x^2,x^3)$。

以上讨论可推广到 $n$ 维空间，此时，坐标系为 $x^i$ 和 $\bar{x}^i(i=1,2,\cdots,n)$。

(2)向量　如果在坐标系 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$ 中，给定一由 $n$ 个函数 $A^1$、$A^2$、…、$A^n$ 组成的函数组，这样，对于坐标系 $\bar{x}^i(i=1,2,\cdots,n)$，就有另外一组函数 $\bar{A}^1$、$\bar{A}^2$、…、$\bar{A}^n$。如果坐标按式(1-9)进行变换时，这两组函数按下面规则变换，

$$\bar{A}^i = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}A^\alpha \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-11a}$$

于是，函数组 $A^1$、$A^2$、…、$A^n$ 规定了一个逆变向量，$A^i(i=1,2,\cdots,n)$ 称之为逆变分量，用上标表示。

在张量计算中常用 Einstein 求和约定，式(1-11a)中的连加号“Σ”可省略，成双的哑标表示对一切可能的值求和，即写为

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}A^\alpha \tag{1-11b}$$

例如向量 $\mathbf{d}\bar{x}^i$ 就是一个逆变向量，事实上按复合函数的微分规则

$$\mathbf{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\mathbf{d}x^\alpha \tag{1-12}$$

如果由 $n$ 个函数所组成的两组函数 $A_i$ 和 $\bar{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别定义在坐标系 $x^i$ 和 $\bar{x}^i$ 中，并按下面规则变换