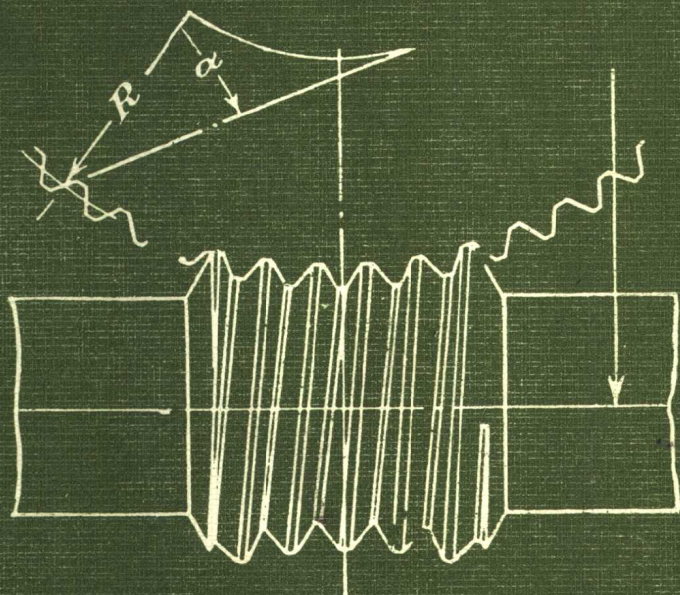


科學圖書大庫

齒輪解析力學

譯者 陳尚渭



徐氏基金會出版

科學圖書大庫

齒輪解析力學

譯者 陳尚渭

江苏工业学院图书馆
藏书章

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再遂承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鐸氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千冊，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

II

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘冊，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘冊，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審慎從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘冊，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，廣即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

譯 者 序

本書原著爲美國麻省理工學院機械工程名譽教授歐爾卜凱漢 (Earle Buckingham) 氏畢生致力於齒輪之研究，積二十五年始於一九四九年完成出版，復於一九六三年再版翻印，鼓勵發展，誠爲稀有之作品，因此對於齒輪設計研究有濃厚興趣者，值得一讀。由於本書以數學力學理論爲基礎，並提供各種製法刀具的設計與工件之配合裝置位置等，有利於精密設計上的參考。惟因理論較深，故須具備大專以上程度，始能融會貫通。

譯者蒙中國機械工程師學會之推薦，翻譯本書，即將出版問世，顯然爲一可喜的趨勢，亦即徐氏基金會科學圖書大庫，近年來努力的方向與目標，藉以鼓勵科學說中國話，倡導科學技術趕上時代，並冀於國內生根研究，宏志遠見，樂於贊助，是爲之序。

深祈工業界與教育界先進賜予指正，無任企禱。

陳 尚 渭

中華民國五十九年九月三日於台北

原 序

本書經二十五年的努力，已合理的發展完成齒輪聯動力學的數學分析，欣獲出版，令人慶喜。

本書論文的標題原為“美國機械工程師協會特別研究委員會關於蝸輪與齒輪強度的最後報告”。由該會諸委員提供工作資料，予以鼓勵，以及與諸委員個人的接觸，成為著作本書的最大動力。

茲引證余一同事的評語“若瞭解計算的意義，則共軛齒輪齒作用的觀念易於精通，換言之，若具有視覺的想像者，始能領悟此種共軛齒輪齒作用的重要意義。因此，此項介紹應藉實物之助，以助他人熟練計算。然而，讀者將與作者一樣，均無實物；於是繼續應用問題，以供補充讀賞。

本書非為一般齒輪設計的教科書，不過應該成為有關理論設計實習的正確基礎，而設計數據可以選用。然而，諸設計構造，必須經極需要的專門工程組之選擇。在最後分析中，尚有許多未知與不太確實的因數；在重要關鍵中，吾人祇能回答“試試看”(Try and see)。一種分析，諸如此種解釋須藉實物之助與專門知識的應用，可藉正確的試驗與利用實際運轉實驗，以分析之。

今之趨勢，齒輪外表趨向於較高速度與較大負荷，以及具有更可靠和更安靜的運轉要求。這些要求，一部份藉改進材料、較佳平衡、使更接近於完美的切削表面、以及使更加強注意許多設計的細節。因此最後亦包括靜力學與動力學運轉條件的正確數學分析。

大多數反對任何機構的完全分析，是需要時間求解，而且無人具備才能與毅力從事此種工作。若每一新設計必須從頭開始建立，任何簡單的應用均需要消耗太多的時間，倘若吾人能建立一般不同機構的基本型式解法為基礎，於是任何已知設計的規定工作，可準備特別例題與解答一般解法。即使如此，仍必須消耗思考的時間以比較其結果。故應備置計算機一套，以供計算。

機器元件之中，已接受解析注意者遠較應用的連桿組，凸輪與齒輪等為少。本書試圖提供此種齒輪一般分析的可用方式。

如前說明，本書非爲一般齒輪設計的教科書，主要致力於作爲不同齒輪型式接觸齒之間的虛表作用與接觸的實現，若設計均利用這些機構元件的完全可能性，必須徹底瞭解本書特色。

開始數章提供共軛齒輪齒作用的分析，接觸的實現，與數種齒輪形成的齒輪的齒廓。這些齒輪包括正齒輪、螺旋齒輪、內齒輪、蝸線齒輪、蝸輪、斜齒輪、與戟齒輪或歪斜齒輪等。正齒輪、內齒輪與螺旋齒輪均應用於驅動平行軸，斜齒輪均應用於驅動交叉軸。蝸線齒輪、蝸輪與戟齒輪應用於驅動不平行與不交叉的軸。

最後數章提供作用中齒輪齒的分析，內容包括運轉的摩擦熱，與熱的散逸，摩擦損失與效率，運轉中的動力負荷。齒的樑強度或阻力對裂斷與疲勞的影響，材料的表面持久限界，以及極限磨耗負荷或位阻力對表面的分裂與過度磨耐等。

本書分析完整，再無所求，第一點，由於受時間的限制不能將本書一般問題，許多有趣的與有關的因數完全推求。第二點，更重要者爲作者對於本科學習較久，可能比較任何一位徹底精通者的能力爲強，乃使此種不完全的分析成爲許多個人原始工作的結果。

由於信任其他教科書內許多知識來源的提供，經努力而可完成本書的分析；再則，直接與間接獲得與惠爾佛蘭特·李威士 (Wilfred Lew) 卡爾·巴氏 (Carl G Barth)，查爾斯·洛奇氏 (Charles H. Logue) 歐蘭脫費爾特·哈勃氏 (Ernest Wildhaber) 與美國機械工程師協會有關蝸輪與齒輪齒的強度的特別研究委員會諸委員的個人密摺的接觸，如同從其他學者努力研究各種不同型式的齒輪問題。最後蒙高泰爾卜台脫 (Guy L. Talbowardet) 氏的協助研究審核泵輪，與小心校對所有方程式的引導，特此申謝。

歐爾·卜凱漢 (Earle Buckingham)

卡姆勃立漢

一九四九年三月

目 錄

譯者小言

原 序

第 一 章	正齒輪的共軛作用·····	1
第 二 章	內齒輪的共軛作用·····	37
第 三 章	餘擺線、齒的內圓角與挖切·····	51
第 四 章	漸開線曲線與它的性質·····	61
第 五 章	正齒輪的漸開線測定法·····	81
第 六 章	內齒輪的漸開線測定法·····	121
第 七 章	螺旋齒輪的共軛作用·····	155
第 八 章	螺旋齒輪的測定法·····	167
第 九 章	蝸線齒輪的測定法·····	197
第 十 章	螺旋體剖面·····	213
第 十 一 章	蝸輪驅動的接觸·····	233
第 十 二 章	蝸輪驅動的設計·····	269
第 十 三 章	細腰型蝸桿驅動·····	299
第 十 四 章	斜齒輪上共軛齒的作用·····	323
第 十 五 章	斜齒輪上的八角形狀·····	343
第 十 六 章	蝸線斜齒輪·····	363
第 十 七 章	歪斜或戟齒輪·····	379
第 十 八 章	作用中的齒輪齒·····	411
第 十 九 章	齒輪的效率·····	423
第 二 十 章	正齒輪上動力負荷的分析·····	459
第 二 十 一 章	齒輪齒上的動力負荷·····	487
第 二 十 二 章	齒輪齒的梁強度·····	515
第 二 十 三 章	材料的表面持久限界·····	547
第 二 十 四 章	齒輪磨耗的極限負荷·····	571
索 引	·····	591

第一章 正齒輪的共軛作用

(*Conjugate Action Or Spur Gears*)

齒輪齒廓 (Gear-tooth profile) 的基本目的為自一軸傳動另一軸使旋轉運動，大多數情形為增加實有均勻旋轉運動的需要量。

幾乎有無窮數的形狀可用作齒輪齒廓，雖然漸開線 (Involute) 齒廓為現在用作齒輪形狀最普遍的一種使用於傳遞動力，但當其他齒廓使用有利時，亦有應用，另外亦有其他除旋轉運動傳動以外的問題，需經傳動理論的知識，以助最直接的解決。此種問題之一為栓槽軸 (Spline shaft) 的滾齒 (Hobbing)。

再則，漸開線齒廓的理論與製造二者均非常簡單，亦值得重視；為須獲悉簡單明瞭共軛齒輪齒作用的原理，因此需考慮齒輪齒廓，經彼此均勻旋轉運動傳動的特性，此種齒間的作用稱謂“共軛齒輪齒的作用” (Conjugate gear-tooth action)。

在本質上，一對配合的齒輪齒廓為一組凸輪 (Cams)，一個正對另一個作用，要產生相對的運動。帶有某種有限制性的規則，一外型可適意的選擇與可展開成正確的配合齒廓，換言之，各選用之二種齒廓加以裁判時，可決定於自然的產生作用，如果永遠是均勻運動則非常稀少。

當二曲線面彼此正對作用的所有情形，二曲線面之間的作用線將沿共同的垂直線至二曲線間正切之點。若此二曲線外型裝置於樞軸如圖 1-1 所示，作用線 $a-a$ 相交於中心線 $c-c$ 於 A ，於是介乎二臂間之角速率將與至 A 點有關臂的半徑成反比。此二半徑為此二型的瞬時節圓半徑 (momentary pitch radii)。

為傳遞等速旋轉運動，瞬時節圓半徑之值，必須保持常數，作為所有接觸外型的運轉位置，茲得共軛齒輪齒作用的基本定律如次：

“共軛齒輪齒作用定律。自一軸至另一軸用齒輪齒傳遞等速旋轉運動，在所有齒廓上一切接觸點的垂直線，必須經過共同的二軸中心線上一固定點”。

1-1 節點 (Pitch Point)

在共同中心線上之該固定點稱為節點，除漸開線外應用每一齒輪齒廓，有一一定的節線 (Pitch line) 或節圓 (Pitch circle) 由此展開為共軛齒輪齒廓。配合的正齒輪 (Spur gear) 必須彼此互相正切。此二節圓的切點，即稱謂節點。

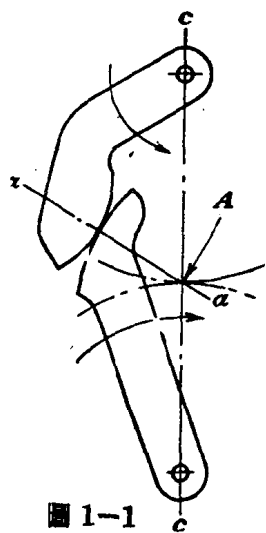


圖 1-1

若設二輪彼此摩擦而無滑動傳動，此二節圓的尺寸，必需使傳達相關的運動，此二節圓的尺寸與二齒輪的角速度成反比。假設等速時，則二節圓的尺寸相等。假設速率加倍，慢速齒輪的節圓尺寸二倍於快速齒輪的尺寸，齒的比例可以對稱或不對稱，關於節線，齒廓可以完全在節線的上面，或完全在節線的下面，或者可以局部在上與局部在下。

1-2 基本齒條形狀 (Basic-rack Form)

如前所述，一齒輪的齒廓可任意選擇，配合齒輪的共軛外型輪廓可以展開，因此一對共軛齒輪齒廓亦有一定的基本齒條形狀，此基本齒條形狀為一定直徑的共軛齒輪的輪廓。它的節線為一直線。

1-3 接觸路線 (Path of Contact)

當共軛齒輪齒廓共同作用時，齒間的接觸點將沿一定路線移動，該路線稱謂接觸路線。換言之，接觸路線為共軛齒輪齒廓間所有接觸點的軌跡 (Locus)。

1-4 作用線 (Line of Action)

一直線自任何接觸點垂直於在接觸點的二配合齒廓，可自接觸點連結節點繪成。此直線或共同垂直於齒廓的垂直線稱謂作用線。

1-5 壓力角 (Pressure Angle)

介於作用線與切於二節圓節點的共切線之間，稱謂齒接觸點的壓力角。除漸開線形狀外，所有齒輪齒廓的壓力角各點均不同。

任何已知齒廓一節線，一經確定，即有一定的接觸路線，存在於沿一切

其他共軛齒輪齒廓的接觸點而形成，不必顧慮此二齒輪的齒數。已知任何共軛齒輪齒系統的接觸路線與任何二齒輪相同者，即可用作系統的任一齒輪和系統的基本齒條。

確定任何一定的共軛齒輪齒系統的最簡單方法為規定它的基本齒條的形狀和尺寸，一齒輪齒廓與其接觸路線之間有一定的關係，因此，如果任何一個已知，則另一個必確定。

1-6 假定基本齒條形狀已知

首先開始分析基本齒條的規定形狀，應用節點作為基本齒條和接觸路線坐標系 (Coordinate system) 的起點。應用共軛齒輪的中心作為齒輪齒廓極坐標系 (Polar coordinate system) 的起點，和在節點時的向量角 (Vectorial angle) 為零，當反時針方向 (Counterclockwise direction) 量度時，所有角度均為正 (Plus)，所有此類計算，必須十分小心熟練應用此種角度正確的符號 (正或負 (Minus) 的符號)。

茲將應用的符號說明如下，以供一對或一系不同齒輪證明之用：

- x = 基本齒條外型的橫標 (Abscissa)。
- y = 基本齒條外型和接觸路線的縱標 (Ordinate)。
- x_p = 接觸路線的橫標。
- ϕ = 壓力角。
- r = 共軛齒輪齒廓向徑 (Radius vector) 長度。
- R = 齒輪的節圓半徑。
- θ = 向徑的向量角。
- ψ = 正切於齒廓和向徑間之角。
- ϵ = 齒輪自零度位置旋轉之角。
- X = 共軛齒輪齒廓的橫標 (齒輪中心為起點)。
- Y = 共軛齒輪齒廓的縱標 (齒輪中心為起點)。

1-6-1 接觸路線

已知 x, y 和 ϕ 之值試求接觸路線？

$$\tan \phi = dx/dy$$

參閱圖1-2，由幾何圖條件，知

$$x_p = -y/\tan \phi \quad (1-1)$$

由於二點常在起點的相反側，當 x 之值為正時 x_p 之值為負。為任何已知基本齒條外型建立一接觸路線，於已知外型上一連串接觸點，連合正切於這些點之值，選擇或確定應用 (1-1) 式求出作為在接觸路線上等量之點，而這些值可繪成任何比例尺。

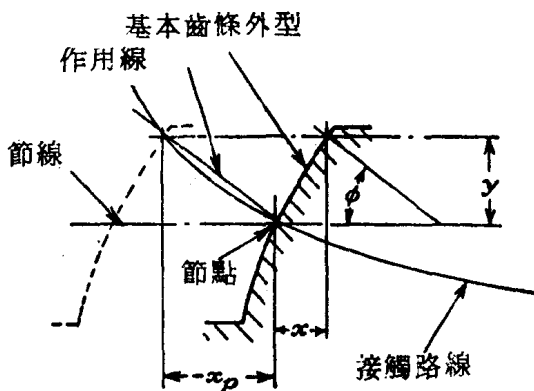


圖 1-2

第一步確定 x, y 和 $\tan \phi$ 之值，選作基本齒條外型上一連串之點。普通此齒條外型方程式很容易建立，此外可以應用放大劃線量出所求之值。

1-6-2 共軛齒輪齒廓

設已有基本齒條齒廓坐標和該接觸路線，於是可計算用作任何規定節圓半徑之共軛齒輪齒廓的坐標，參閱圖 1-3，自幾何圖條件，得：

$$r = \sqrt{(R - y)^2 + x_p^2} \quad (1-2)$$

$$\epsilon = (x_p - x) / R$$

$$\theta = \{\tan^{-1}[x_p / (R - y)]\} - \epsilon$$

$$\theta = [(x - x_p) / R] + \tan^{-1}[x_p / (R - y)] \quad (1-3)$$

同前所示， x 和 x_p 之值常為相反符號，因此其數值常不同於用 x 符號值之和。

1-6-3 對共軛作用的限制

不論何時，在共軛齒輪齒廓的形狀中有一接觸終點 (Cusp)，有用輪廓的引伸，限制於接觸終點的底部，若齒廓接合高於此點，作用中將有干擾或有挖切 (Undercut)，此種條件以後關於研究小圓角 (Fillet) 的形狀

或在齒輪齒的共軛輪廓下的餘擺線 (Trochoid) 一節內詳細分析之。

1-6-4 配合的齒輪齒廓

用於配合齒輪齒廓的坐標，必須共軛於第一齒輪齒廓，必須應用原始基本齒條的內面，或必須確定自第一齒輪齒廓之值，當已知基本齒條形狀時，常為最好的方法，直接由它求出。

基本齒條內面坐標之值 and 它的接觸路線，同於前者，但符號相反，用此種值，確定配合齒輪齒廓的坐標同前。

1-6-5 共軛齒輪齒廓的直角坐標 (Cartesian or Rectangular Coordinates)

當欲應用直角坐標，繪畫齒輪齒或齒間 (Tooth space) 的形狀時，如屬必要時可變更起點。普通，在齒或齒間的中心線作 y 軸，設

$\theta' =$ 在齒或齒間中心的起始向量角。

$\theta =$ 計算的向量角。

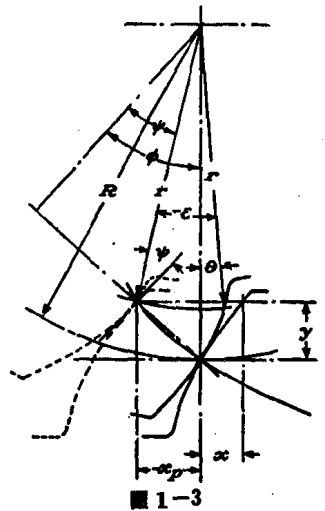
$\theta'' =$ 應用 Y 軸在齒或齒間中心線的向量角。

於是

$$\theta'' = \theta' - \theta \quad (1-4)$$

$$X = r \sin \theta'' \quad (1-5)$$

$$Y = r \sin \theta'' \quad (1-6)$$



1-6-6 作用弧 (Arc of Action)

作用弧為一弧，係一齒自首先接觸配合齒時起沿接觸路線一直至接觸停止，所移動經過之弧。為使順利連續作用，作用弧必須多少大於齒輪連續齒間之弧。

漸近弧 (Arc of approach) 為一弧，係一齒自首先使接觸配合齒，沿接觸路線一直至接觸達到節點所移動經過之弧。

漸遠弧 (Arc of recess) 為一弧，係一齒自於節點接觸沿接觸路線一直至接觸停止所移動經過之弧。

設

ϵ_a = 主動齒輪節點轉動的弧至接近齒根（註 1）首先接觸的位置。

ϵ_r = 主動齒輪節點轉動的弧至齒頂（註 1）後接觸的位置。

β_a = 主動齒輪的漸近弧。

β_r = 主動齒輪的漸速弧。

β = 主動齒輪的接觸弧。

於是

$$\beta_a = \epsilon_a \quad (1-7)$$

$$\beta_r = \epsilon_r \quad (1-8)$$

$$\beta = \beta_a + \beta_r \quad (1-9)$$

以上各值符號均各自獨立。此處僅為數字和。

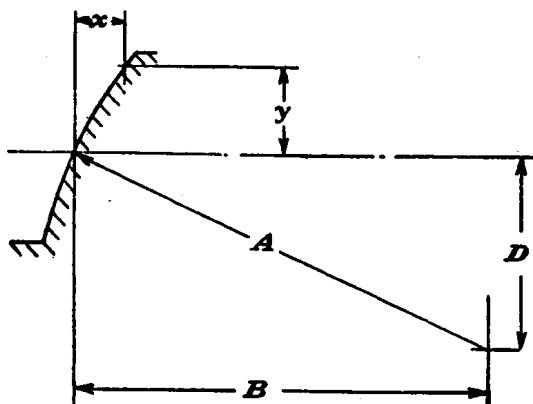


圖 1-4

已知基本齒條形狀的例題

應用一基本齒條輪廓作一實例，該齒條輪廓用一圓弧造形，如圖（1-4）所示。本例已知

A = 齒條輪廓的圓弧半徑。

B = 沿 x 軸至圓弧半徑中心的距離。

D = 沿 y 軸至圓弧半徑中心的距離。

〔註 1〕這些值為個別接觸點計算之值。

$$x = B - \sqrt{A^2 - (D + y)^2} \quad (1-10)$$

$$\frac{dx}{dy} = \tan \phi = \frac{D + y}{\sqrt{A^2 - (D + y)^2}} \quad (1-11)$$

$$\frac{d^2x}{d^2y} = \frac{A^2}{[A^2 - (D + y)^2]^{3/2}} = \frac{1}{A \cos^3 \phi} \quad (1-12)$$

設 $A = 5.00$ $B = 4.5315$ $D = 2.1131$

於是

$$x = 4.5315 - \sqrt{25 - (2.1131 + y)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{2.1131 + y}{\sqrt{25 - (2.1131 + y)^2}}$$

接觸路線的例題

應用 0.1 增量作為 y 自 0 至 ± 1.00 之值，以此值求得表 1-1 中所列計算之 x, y 和 $\tan \phi$ 值，應用這些值代入 (1-1) 式得 x_p 值，列表 1-1，繪圖如圖 1-5。

表 1-1 已知基本齒條形狀和共軛齒輪齒的坐標

(繪圖如圖 1-5)

y , in.	z , in.	$\tan \phi$	x_p , in.	r , in.	θ , rad	X , in.	V , in.
1.00	0.6189	0.79566	-1.2568	19.6415	0.0277	0.2203	19.0402
0.90	0.5414	0.75514	-1.1918	19.1371	0.0244	0.2846	19.1350
0.80	0.4678	0.71686	-1.1160	19.2324	0.0211	0.3494	19.2282
0.70	0.3979	0.68054	-1.0286	19.3274	0.0181	0.4092	19.3218
0.60	0.3316	0.64599	-0.9288	19.4222	0.0152	0.4675	19.4166
0.50	0.2687	0.61300	-0.8157	19.5171	0.0124	0.5242	19.5101
0.40	0.2090	0.58140	-0.6880	19.6129	0.0098	0.5788	19.6036
0.30	0.1524	0.55105	-0.5444	19.7075	0.0072	0.6316	19.6974
0.20	0.0987	0.52181	-0.3833	19.8037	0.0047	0.6848	19.7918
0.10	0.0480	0.49361	-0.2026	19.9010	0.0024	0.7333	19.8875
0.00	0.0000	0.46631	0.0000	20.0000	0.0000	0.7852	19.9846
-0.10	-0.0453	0.43985	0.2274	20.1013	-0.0023	0.8358	20.0840
-0.20	-0.0880	0.41414	0.4829	20.2058	-0.0046	0.8858	20.1864
-0.30	-0.1282	0.38910	0.7710	20.3146	-0.0070	0.9395	20.2929
-0.40	-0.1659	0.36469	1.0968	20.4295	-0.0094	0.9941	20.4052
-0.50	-0.2011	0.34085	1.4669	20.5524	-0.0120	1.0535	20.5253
-0.60	-0.2341	0.31750	1.8898	20.6865	-0.0147	1.1158	20.6565
-0.70	-0.2647	0.29463	2.3759	20.8359	-0.0178	1.1885	20.8018
-0.80	-0.2930	0.27217	2.9393	21.0067	-0.0212	1.2696	20.9683
-0.90	-0.3191	0.25009	3.5987	21.2076	-0.0254	1.3706	21.1633
-1.00	-0.3430	0.22835	4.3792	21.4517	-0.0305	1.4956	21.3994

共軛齒輪齒廓的例題

應用 $R = 20.00$ 值作為第一齒輪，以此值和表列之一，應用 (1-2) 和 (1-3) 式，獲得表 1-1 內表列 r 和 θ 之值，這些值亦繪圖如圖 1-5 所示。

因配合齒輪隨第一齒輪轉動，故亦應用 $R = 20.00$ 值，又因此齒輪， x ， y 和 x_p 之值同與前例，但符號相反，這些值經計算列表於表 1-2 內，並計算 r 和 θ 之值列於同一表內，作為第二齒輪用，該第二齒廓在它的齒底有一接觸終點，限制它的作用齒廓低於約 19.4237 的半徑，此符合於配合齒輪上最大半徑約 21.0067。

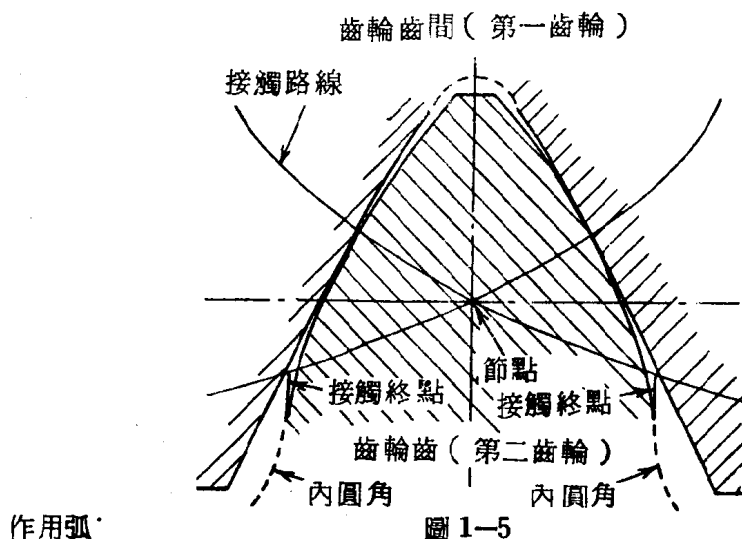


圖 1-5

假設第二齒輪的外半徑為 21.0376，並設此點使與第一齒輪於半徑 19.0415 相接觸。亦應用一外圓半徑 21.0067 作為第一齒輪。

於接觸開始時：

$$x = 0.6189 \quad x_p = -1.2568 \quad y = 1.00$$

$$\epsilon_a = \frac{x - x_p}{R} = \frac{1.8757}{20} = 0.09373 \text{ 徑 (Radian)}$$

此處如前所示，僅計算數字值，而不計符號；因此 $\beta_a = 0.09373$ 徑。

於接觸終了時：

$$x = -0.2930 \quad x_p = 2.9393 \quad y = -0.80$$

$$\epsilon_r = -\frac{3.2323}{20} = -0.16161 \text{ 徑}$$

因此

$$\beta_r = 0.16161 \text{ 徑}$$

$$\beta = 0.09373 + 0.16161 = 0.25534 \text{ 徑}$$

此種齒輪必須有 $(6.2832/0.25534) = 25$ 或更多的齒數用作連續運動。

直角坐標

假定二齒輪均有 40 齒，希望二者的直角坐標與第一齒輪齒間的中心線與第二齒輪齒間的中心線有關係，並設每齒輪於節線的齒厚等於周節 (circular pitch) 的一半，或為 1.5708，因第一齒輪有

$$\theta' = \frac{1.5708}{40} = 0.003927 = 2.250^\circ$$

應用此值代入 (1-4) 式，得 θ'' 之值，由此值應用 (1-5) 式和 (1-6) 式，得 X 和 Y 之值，該項值已列表於表 1-1 內與繪圖如圖 1-5。

表 1-2 基本齒輪形狀的內面和共軛齒輪齒的坐標
(繪圖如圖 1-5)

y , in.	x , in.	$\tan \phi$	x_p , in.	r , in.	θ , rad	X , in.	Y , in.
1.00	0.3430	0.22835	-4.3792	19.4981	0.0096	0.9525	19.4749
0.90	0.3191	0.25009	-3.5987	19.4361	0.0097	0.9514	19.4128
0.80	0.2930	0.27217	-2.9393	19.4237	0.0097	0.9508	19.4004
0.70	0.2647	0.29463	-2.3759	19.4457	0.0095	0.9478	19.4226
0.60	0.2341	0.31750	-1.8898	19.4918	0.0091	0.9422	19.4690
0.50	0.2011	0.34085	-1.4669	19.5551	0.0083	0.9300	19.5330
0.40	0.1659	0.36469	-1.0968	19.6307	0.0072	0.9120	19.6095
0.30	0.1282	0.38910	-0.7710	19.7151	0.0058	0.8882	19.6950
0.20	0.0880	0.41414	-0.4829	19.8059	0.0042	0.8608	19.7873
0.10	0.0453	0.43985	-0.2274	19.9013	0.0022	0.8249	19.8842
0.00	0.0000	0.46631	0.0000	20.0000	0.0000	0.7854	19.9846
-0.10	-0.0480	0.49361	0.2026	20.1010	-0.0025	0.7389	20.0873
-0.20	-0.0987	0.52181	0.3833	20.2036	-0.0051	0.6904	20.1919
-0.30	-0.1524	0.55105	0.5444	20.3073	-0.0080	0.6350	20.2973
-0.40	-0.2090	0.58140	0.6880	20.4116	-0.0111	0.5748	20.4034
-0.50	-0.2687	0.61300	0.8157	20.5162	-0.0145	0.5080	20.5098
-0.60	-0.3316	0.64599	0.9288	20.6209	-0.0180	0.4386	20.6162
-0.70	-0.3979	0.68054	1.0286	20.7255	-0.0217	0.3641	20.7222
-0.80	-0.4678	0.71683	1.1160	20.8299	-0.0256	0.2845	20.8280
-0.90	-0.5414	0.75514	1.1918	20.9340	-0.0297	0.2001	20.9330
-1.00	-0.6189	0.79566	1.2568	21.0376	-0.0340	0.1104	21.0373