苏联大百科全书选譯

解析函数

人民教育出版社

解析函数

解析函数是可以用冪級数

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

表示的函数。在数学的基本問題中及其在自然科学与工程技术的应用上，所用到的一些最簡单而又最重要的函数，如代数函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数(圓函数)、双曲綫函数及其反函数、特殊函数——橢圓函数、柱函数等等，都是解析函数。但在給定某一具体解析函数的时候，給定的方式不必一定是冪級数；重要的只是：这种冪級数是存在的。例如 $f(x)=\dfrac{A}{a-x}$ 是不用冪級数来給定的；但这个函数是解析函数，因为有展开式

$$\frac{A}{a-x}=\frac{A}{a-x_0}+\frac{A}{(a-x_0)^2}(x-x_0)+\frac{A}{(a-x_0)^3}(x-x_0)^2+\cdots \quad (*)$$

$\left(\text{上式对 } x_0\neq a \text{ 及 } \left|\dfrac{x-x_0}{a-x_0}\right|<1 \text{成立}\right)$ 存在的緣故。如要驗証这点，我們只要指出：級数(*)是以 $\dfrac{A}{a-x_0}$ 为首項且以 $\dfrac{x-x_0}{a-x_0}$ 为公比的几何級数。在一般情形下，要得到表示所給解析函数的冪級数，可以用待定系数法。为此，我們写出展开式：

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

式中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots$ 这些系数是未知的。这样，若設 $x=x_0$，我們就得到 $f(x_0)=a_0$。为求展式的第二个系数 a_1，先逐項微分，得

$$f'(x)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 2(x-x_0)+\cdots,$$

然后再設 $x=x_0$; 由此得 $f'(x_0)=a_1\cdot 1$, 或即 $a_1=\dfrac{f'(x_0)}{1}$。用这方法繼續做下去，得到:

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}, \cdots, a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{1\cdot 2\cdots n}, \cdots$$

于是，表示函数 $f(x)$ 的冪級数应有下列形式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

写成这种形式的冪級数，叫做台劳級数。因此，我們可把解析函数說成是能展成台劳級数的那种函数。用这种方法，可以得出(比方說)指数函数的級数:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots;$$

$\sin x$ 的級数:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots;$$

$\cos x$ 的級数:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

等等。但是，待定系数法只不过是在已知所給函数为解析函数的假定下，用来求出冪級数的系数的一种方法；我們根本不能用这个方法来确定某函数是否为解析函数这一事实。为此，可用解析学中熟知的台劳公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

式中 $R_n(x)$ 即是所謂余項，可用 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶导数表示。当且仅当 $R_n(x)$ 随 n 的无限增大而趋于零时，函数才是解析的。因

此，研究函数是否是解析的这个問題，就变为研究台劳公式的余項在 n 无限增大时的性态如何的問題；而后一問題往往是非常困难的問題。并且，要用这个方法搞清楚象以下这一类的問題也是同样困难的，例如：x 取哪些值时，表示所給函数的級数是收斂的；对于哪些 x 值所給函数的反函数是解析的；对于哪些 x 值函数的函数是解析的，等等。法国数学家柯西的功績在于：他指出了，如果不仅就变量的实数值而也就虚数值以及一般的复数值来研究解析函数，那末这些問題以及其他許多問題都可得到解决。解析函数的理論，由于对复变量解析函数作系統研究而获得的成就是这样的巨大，以致我們今日常常把解析函数論称为复变函数論。

复变量的解析函数 此后我們用 $z=x+iy$ 記任一复数（参看复数条）；在几何上，它可以用平面上具有坐标 x 及 y 的一点来表示。設 G 是这平面上的任一域。如果 G 的每一点（每一 z）有某一复数 w 与它对应，那末我們說在域 G 上定义了一个复变量函数（以后簡称复变函数）$w=f(z)$，这里 z 是它的自变量值，w 是函数值。如果 $w=u+iv$，而 u 与 v 是实数，那末，u 与 v 的值就由 $z=x+iy$ 的值完全确定，也就是說，u 与 v 的值，归根到底是由两个实变量 x 及 y 的数值完全确定的。所以，u 与 v 乃是 x 与 y 的函数：$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$。于是，$w=f(z)=\varphi(x,y)+$ $+i\psi(x,y)$，也就是，給定在 G 域上的每个复变函数，可由給定在同一域上的实变量 x 及 y 的两个实函数来确定。如果 φ 与 ψ 是 x 与 y 的連續函数，那末相应的复变函数 $f(z)$ 也叫复变量 z 的連續函数。在这种情形下，而且也只有在这种情形下，函数的增量 $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$（这里 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$）才在 Δz 趋于零时趋于零。为求复变函数的导数，可列出商式 $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$，并

求这商式在 $\Delta z\to 0$ 时的极限。如果极限存在，也就是，如果存在这样的一个复数 A，使得在所給点处（对所給的 z 值，当 $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta(\varepsilon)$ 时，有 $\left|\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}-A\right|<\varepsilon$，那末我們說，函数 $f(z)$ 在点 z 处是可微分的，或者說在点 z 处是单演的，而数 A 則称为函数在該点处的导数：

$$A=f'(z)=\frac{df(z)}{dz}.$$

如果函数在域的每一点都是可微分的，那末就說函数是在域上可微分的；这时，导数 $f'(z)$ 也是 z 的函数，确定在同一域上。我們可以得出 $f'(z)$ 的表达式，用函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 的偏导数表示，如下式：

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

既然中間和右边这两式都表示同一复数，所以应該有下面的关系式：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{1}$$

这两个方程在达兰貝尔与欧拉二人研究复变函数的著作中已不止一次地出現，所以应該称为达兰貝尔-欧拉方程；但是，由于不正确的傳統，这两个式子在教科书与科学文献中已相沿称为柯西-黎曼方程。如果这两个条件滿足，那末（再加上函数 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 为可微分的假設），函数 $f=\varphi+i\psi$ 是可微分的。

复变函数的主要的微分法則，是和实变函数的主要微分法則一样的。所要指出的只是：微分学中的洛尔定理、拉格朗日定理与柯西定理，对于复变量函数一般說是不成立的。

为定义連續函数 $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ 的积分，我們拿

曲綫积分作为出发点。这就是，为确定 $f(z)$ 在某曲綫(可求长的) L 上的积分，我們用点 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n$ 把这曲綫分为几段小弧 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$，然后在每段弧 σ_k 上取一点 ζ_k，写出积分和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_{k-1} \quad (\Delta z_{k-1}=z_k-z_{k-1}).$$

现在如果再把分点的数目这样地无限增多，使得最大一个小弧段 σ_k 的长度趋于零，那末积分和也趋于一定的极限，这个极限記为 $\int_L f(z)dz$，称为 $f(z)$ 在曲綫 L 上的积分。$\int_L f(z)dz$ 是个复数，它的实部与虚部可用函数 φ 与 ψ 的曲綫积分的形式来表示：

$$\int_L f(z)dz=\int_L \varphi dx-\psi dy+i\int_L \psi dx+\varphi dy.$$

如果我們假定：$f(z)$ 在含有曲綫 L 的域 G 上是可微分的，那末(1)中的两个方程，改写成形式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial(-\psi)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

之后，正好是使积分 $\int_L \varphi dx-\psi dy$ 及 $\int_L \psi dx+\varphi dy$ 不取决于积分路綫的条件(参閱曲綫积分条)。由此可知，可微分的复变量函数 $f(z)$ 的积分，当复数平面上連接所給两点間的积分路綫連續变动时，是不变的。因此，閉曲綫上的积分，当該閉曲綫在域 g(在該处 $f(z)$ 有定义而且可微分) 的范圍內可縮为一点时，总是等于零的。这就是柯西定理的内容。从方程(1)推到这定理时，必須补充以下这一点：除了方程(1)中的两个条件以外，还要假定导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ 連續，才可引用曲綫积分不取决于积分路綫的条件。如果不作导数連續这个假定，那末証明起来就要复

杂得多，虽然定理还是成立的。可以証明，对于不可微分的連續复变函数来說，它的积分是要取决于积分路綫的，虽然該路綫的始点和終点是給定了的。由此可知，可微分的复变函数这一类，恰好就是积分不取决于积分路綫的那一类連續函数。这就是莫来拉(Morera)定理所肯定的。全部解析函数理論的主要事实即在于：复变量的可微函数这一类，跟复变量的解析函数那一类互相重合；也就是，可微复变量函数，与可用冪級数

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (**)$$

表示的复变量函数，完全是同一类的函数。

每个解析函数都是可微函数这一事实是容易証明的。可以求得解析函数的导数也是冪級数：

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-z_0)+3a_3(z-z_0)^2+\cdots.$$

应用待定系数法，可以再一次証明冪級数(**)跟台劳級数是全同的：

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots.$$

这里，冪級数的各个系数是用函数 $f(z)$ 及其各阶导数在 z_0 点的值来表示的。但我們也可以用积分法来得出同样的这些系数。这就是，用 $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ 乘等式 $f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+$ $+a_n(z-z_0)^n+\cdots$ 的两边，再把所得等式在以 z_0 为中心的圓周 γ 上逐項积分，得：

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}=a_0\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}}+\cdots+a_k\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}+a_{k+1}\int_\gamma dz+\cdots.$$

計算的結果表明：右边所有的积分（对它們不能应用柯西定理，因为各被积函数在圓周 γ 的中心处变为无穷大，也就是說，

在該处不再是連續的与可微分的函数了）都等于零，唯独一个积分$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$等于 $2\pi i$。因此，$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} (k=0,1,2,\cdots)$。

这就是表示冪級数系数的柯西公式。

把求得的各个系数值代入 $f(z)$ 的冪級数，并把积分变量改写为字母 t，得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^2}+\cdots+ \\ +\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}+\cdots$$

如果在上式中把 $z-z_0$ 的各个乘冪放到积分号里，并把各个积分之和改写为各項之和的积分，就得到：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(t)\left[\frac{1}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{(t-z_0)^2}+\cdots+ \right. \\ \left. +\frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}}+\cdots\right]dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z},$$

这是因为，对积分号后面方括号里的几何級数来說，各項之和等于

$$\frac{\frac{1}{t-z_0}}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\frac{1}{t-z}.$$

以上所求得的公式，把解析函数在圓周 γ 内任一点 z 处的值，用式子$\frac{f(t)}{t-z}$（这式子只跟該函数在圓周上所取的值有关）的积分来表示。

有了柯西积分定理，我們就可以証明，这同一个公式对于任何可微的复变函数都是成立的。而且，不管曲綫 Γ 是怎么样的

一种閉曲綫，只要 $f(z)$ 在該閉曲綫上和閉曲綫內是可微的，那末在Γ內的任一点 z 处，下面的等式就成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{2}$$

这等式叫柯西公式，它右边的积分叫柯西积分。

从柯西公式不难推出：每个可微的复变函数都可展为冪級数，就是說，每个可微的复变函数都是解析函数。若要証明这事，只要把以上从 $f(z)$ 的冪級数推到它的积分表示式的推理过程，倒过来追溯一遍就行了。

这样，解析的与可微的这两大类复变函数乃是同一类函数的事实，就最后确立无疑了。但是应該强調指出，这个命題只对定义于 z 平面某域 G 上的复变函数才是成立的。因此，解析函数的更完善的定义（請与篇首所說的定义比較）是这样的：定义在域 G 上的函数 $f(z)$ 称为在該域上是解析的，如果对域 G 的每一点 z_0，都存在以 z_0 为中心的一个圓，使 $f(z)$ 能在該圓內展为含 $(z-z_0)$ 的乘冪的收斂冪級数。在域上解析的函数也是在域上可微的。倒过来說，如果某函数在域 G 的每点处是可微的，那末，在該域任一点 z_0 处作一足够小的圓周，使它不越出域 G 的范圍之外，則根据上述就可以知道，函数可以在所作的圓內展为 $z-z_0$ 的冪級数，从而可知它在域 G 上是解析的。但若函数只在某段弧或某段直綫上是可微的，那末根据柯西积分的上述論証就不适用；因而我們沒有任何理由来确信这样的函数是解析的。事实上，这种函数很可能不是解析函数。例如，$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\cos(3^k x)}{k!}$ 这个級数的和对任何实的 x 都有定义而且有連續的各阶导数（也只对 x 的实数値有），但它在任何一点都不是解析的。

以上所建立的复变函数中的可微函数类与解析函数类是同

一类函数的事实，使我們在研究任何一个函数 $f(z)$ 是否有解析性的时候，可把問題归結为：說明它是不是复变量的可微函数，或者（根据莫来拉定理）說明它的积分是不是不依賴于积分路綫的。但所說的这两件事，不論是哪一件，如要驗証它是否成立，最后就要归結到驗証 $f(z)$ 的实部及虛部是否滿足方程(1)。

例如，就函数 $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 說，我們有：

$$\varphi(x,y)=e^x\cos y,\quad \psi(x,y)=e^x\sin y,$$

于是
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=e^x\sin y.$$

这里，方程(1)滿足，所以这函数是解析的。对这函数說，我們有 $f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(x)$，而一般地有 $f^{(n)}(z)=f(z)$。

当 $z_0=0$ 时，得 $f^{(n)}(0)=f(0)=1$，由此得：

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots=$$
$$=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

当 $z=x$ 是实变量时，这級数之和是指数函数 e^x。当 z 为复变量时，我們就把这級数之和作为指数函数 e^z（或 expz）的定义。

于是，
$$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

解析函数的实部与虛部之間有方程(1)这种关系，而且它們各自滿足同一个二阶偏微分方程。为得出这二阶偏微分方程，我們算出：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}$$

及
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$

两式相加，得：

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

这就是所求的方程，名叫拉普拉斯方程。虚部 $\psi(x,y)$ 也满足这同一个方程。

作为拉普拉斯方程之解的函数，叫做调和函数，而彼此間有方程(1)那种关系的两个調和函数，叫做共轭調和函数。就复变量解析函数說，它的实部与虚部是共轭調和函数。如上例中的函数 $e^x\cos y$ 与 $e^x\sin y$ 就是这种函数。

我們可以取任何一个調和函数 $u=\varphi(x,y)$ 作为解析函数的实部（或虚部）。这样，它的虚部 $v=\psi(x,y)$ 就可从方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

用公式

$$\psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+C$$

来定出；这里 (x_0,y_0) 是調和函数 $\varphi(x,y)$ 的定义域 G 的任一点，C 是任一实数。我們就得到 $f(z)=u+iv$：

$$f(z)=\varphi(x,y)+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+iC.$$

解析函数的几何表示法，对解析函数的进一步研究及其应用，都有重要的意义。如果点 z 扫出一域 G，則点 $w=f(z)$ 也扫出一域 D。域 G 内部的每一点，都有以域 D 内部一点来表示的函数值 $w=f(z)$ 跟它对应，从这件事实就可以看到（見图 1）：域 G 内沒有一点能使解析函数的模 $|f(z)|$ 取极大値。这个命題表明了复变量解析函数的一个重要的性质，名叫模的极大値原理。G 的各点与 D 的各点間的对应关系，是域 G 到域 D 的一个映射。

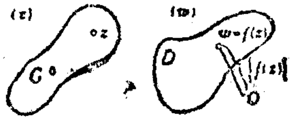

图 1

有这种映射的时候，z 在域 G 所描出的曲綫 γ_1, γ_2, γ_3, ……就映射为 w 在域 D 所描出的曲綫 Γ_1, Γ_2, Γ_3, ……。如果曲綫 γ_1 与 γ_2 交于点 z_0 的夹角是α，那末它們的象 Γ_1 与 Γ_2 交于对应点 $w_0=f(z_0)$ 的夹角或者也是 α，或者是 α 的倍角，这就要看 $f'(z_0)\neq 0$ 或 $f'(z_0)=0$ 而定了(图 2a 及 2$б$)。一域映射到另一域上时，若曲綫間的角保持不变，这种映射叫做保形映射(参看保形映射条)。因此，以解析函数 $w=f(z)$ 作出的映射是保形的；只有在 $f'(z)$ 等于零的那些点处，映射才不是保形的。倒过来說，从一域到另一域的任何連續而又保形的映射，在映射后角度的大小与方向都保持不变时，这种映射可用解析函数 $f(z)=u+iv$ 来实現，而在映射后角度大小不变但方向变为相反时，这种映射可用解析函数的共轭函数 $\varphi(z)=u-iv$ 来实現(图 3a 及 3$б$)。

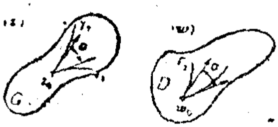
图 2a

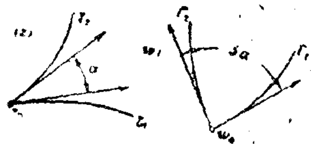
图 2$б$

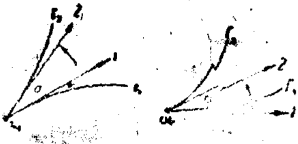
图 3a

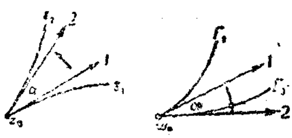
图 3$б$

在一般情形下，解析函数 $w=f(z)$ 在域 G 的各不同点处可能取得同一数值(例如，z^2 在点 z 与点 $-z$ 处取得同样的数值)；如果在某一域的不同的各点处，解析函数 $f(z)$ 取不同的值，那末映射 $w=f(z)$ 是双方单值的。在这种情形下的解析函数叫做所

給域上的单頁函数或单价函数。在全部平面上的单頁函数的例子是分式綫性函数 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$。所有其他的解析函数，都不能在全部平面上是单頁的；但在任何情形下，在使 $f'(z)\neq 0$ 的点 $z=z_0$ 的邻域上，解析函数都是单頁的。黎曼(Riemann)定理(保形映射理論中的基本定理)告訴我們：如果所考虑的域 G 是边界不止含一点的单連通域，則从 G 上的所有解析函数之中，总可找出这样一个单頁的解析函数，使它把域 G 保形映射为圓或半平面。

就多連通域的情形說，我們有希尔伯特(Hilbert)定理与寇伯(Koebe)定理来代替黎曼定理。希尔伯特定理告訴我們說：存在这样的解析函数，它在所給域 G 上是单頁的，并把該域保形映射为以平行直綫段为边界的域 D'(图 4)。寇伯定理告訴我們說：存在这样的单頁解析函数，它能把域 G 保形映射为域 D''，而域 D'' 的边界是由两不相交的一些圓周所构成的(图 5)(在这两个定理中，个别的直綫段或圓周都可能縮为一点)。

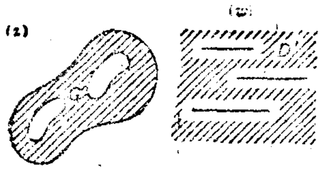

图 4

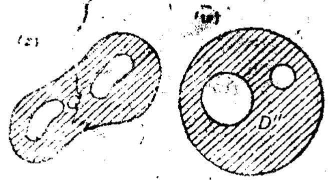

图 5

解析函数的应用 复变量解析函数对流体动力学，空气动力学，傳热学，靜电学与彈性理論的意义，首先是由調和函数在这些理論中所起的作用决定的。如果調和函数 $\varphi(x,y)$ 表示(比方說)理想流体在某域 G 内平面穩恒流动的速度势，那末，只要引入以 $\varphi(x,y)$ 为实部的一个解析函数 $f(x,y)=\varphi(x,y)+$ $+i\psi(x,y)$，就得到所謂流动的特征函数或复势。如果先給定了

解析函数 $f(z)$ 并把它的实部解释为势，我們就可得到某一流体运动的景象(流綫，速度的分布，源理与尾閭，环流量)。

图 6 画出了对应于解析函数 $w=-V_0\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$ 的液体流动，流动的域是一圓(以原点为中心，以 R 为半徑)的外部。这里

$$\varphi(x, y)=-V_0\left(x+\frac{R^2 x}{x^2+y^2}\right),$$

$$\psi(x, y)=-V_0\left(y-\frac{R^2 y}{x^2+y^2}\right),$$

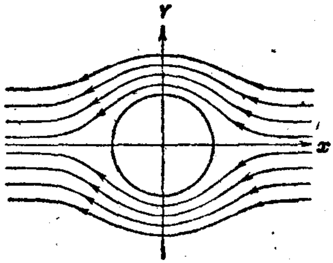

图 6

曲綫 $\psi(x, y)=\mathrm{const}$。是流綫。这种流动相当于液体繞过半徑 R 的圓柱体的流动；在离圓柱很远的各点处，速度矢量的方向从右向左几乎平行于 Ox 軸，其数值则接近于 V_0。如要定出液体在一些附加条件下(給定繞所給每一圍綫的环流量，以及"无穷远处"的速度)，循所給各圍綫的流动，那末在这样的問題中，我們就要把这些圍綫所界的域保形映射为希尔伯特型的典型域 D' 或寇伯型的典型域 D'' (見图 4 及图 5，在特殊情形下，这种典型域可能是半平面或圓)，并解决这种最簡单域上的相应問題。如果这样变換后得出的复势是 $F(w)$，那末，作逆变換 $w=\lambda(z)$，从域 D' (或 D'') 变回到原来的域 G，所求得的复势就以解析函数 $F[\lambda(z)]=f(z)$ 的形式解决了原来提出的問題。

上述应用复变量解析函数来解决問題的程序，使我們能通过保形变換，把对所給域 G 的問題，簡化为对最簡型域的同类問題，这就是这种解題法的优点。此外，复变量解析函数具有簡单而又宜于适应各种情况的性质，使我們易于用它来求得問題的徹底解决。

解析函数的存在域·奇异点·留数 解析函数的定义域总

假定是連通域(参看域条)。由此推得解析函数的一个值得注意的性質,卽解析函数的唯一性:定义在同一域G上的几个解析函数,若在該域的任意小的一部分上完全相同,那末这些解析函数在域的其他各点处也都完全相同,就是說,它們都是同一个解析函数。而且,如果两个解析函数在一系列不同的点 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots$ 处彼此完全相同,并且这个点列又有极限点(或聚点)在域G的內部,那末这两个解析函数也在全部域上完全相同。特别是,由此可以知道,如果 $f(z)\neq a$,那末,方程 $f(z)=a$ 的根,在 $f(z)$ 具有解析性的域G內,是不会有极限点的。如果 $a=0$,那末方程 $f(z)=a=0$ 的根称为函数 $f(z)$ 的零值点;所以,解析函数 $f(z)\neq 0$ 的諸零值点,不可能在域G的內部具有极限点,也就是說,这些零值点不可能在G內部任一处有无穷多个。設 z_0 是 $f(z)$ 的零值点,于是 $f(z_0)=0$,$f(z)$ 按 $z-z_0$ 的冪級数展开式是:

$$f(z)=\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots\cdots。$$

如果这里的 $f'(z_0)\neq 0$,那末展开式的首項的确是 $(z-z_0)$ 的一次冪,这时的 z_0 叫做 $f(z)$ 的单零值点;如果 $f'(z_0)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(z_0)=0$ 而 $f^{(k)}(z_0)\neq 0$,那末展开式的形状是

$$f(z)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\cdots\cdots,$$

于是 z_0 叫做 $f(z)$ 的重零值点,数 k 是这零值点的重复度(或阶);在单零值点的特殊情况下,我們指定它的重复度是 1。因此,解析函数 $f(z)\neq 0$ 的每一个零值点,都有一个自然数 k(它的重复度)与之对应。

最簡单的一类解析函数,是在全部平面上都具有解析性的函数。这种函数称为整函数。这种函数的特征是:表示它們的冪級数对一切 z 值(在全部平面上)都收斂。多項式(有理整函

数)、函数 e^z, $\sin z$, $\cos z$ 等等，都是整函数。多项式以外的整函数，叫做超越整函数。

超越整函数的性质跟多项式的性质有些相仿之处。这可以算是一种"无穷多次"的多项式。就 n 次多项式 $a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n=P_n(z)$ $(a_n\neq0,\ n\geqslant1)$说，方程 $P_n(z)=A$ 对任一复数 A 都有 n 个根；相仿地，就超越整函数 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$說，方程 $f(z)=A$ 对任何复数 A (可能有一个 A 值除外)都有无穷多个根(毕卡尔定理)。例如，不論 A 是什么样的复数，方程 $\sin z=A$ 有无穷多个根 $z=\arcsin A$。方程 $e^z=A$, 在 $A\neq0$ 时，也具有无穷多个根 $z=\operatorname{Ln}A=\ln|A|+i\operatorname{Arg}A$ 而在 $A=0$ 时一个根都沒有(A 是例外值)。此外，正象 n 次多项式可以表示为一些多项式(二项式)的乘积 $P_n(z)=a_n(z-z_1)\cdots\cdots(z-z_n)$一样(其中每个因子都只有一个零值点)，超越整函数 $f(z)$ 也可以表示为一些超越整函数的乘积(一般說是无穷乘积，而且作为因子的每个超越整函数也都只有一个零值点)(外氏定理)。例如：

$$\sin z=z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots\cdots.$$

凡可表示为两个整函数之商的那种函数 $\varphi(z)=\dfrac{F(z)}{f(z)}$, 叫做半純函数(俄名 Мероморфные функций, 其中 Мероморфныи 一字来自希腊文 $\mu\varepsilon'\rho o\zeta$——原意为"部分"——与 $\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$——原意为"形式")。如有理函数(可用多项式之商表示)

$$\operatorname{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

椭圓函数等等，都是半純函数。有理函数以外的半純函数，叫做超越半純函数。半純函数的标志是：它們是单值函数，解析于全部平面上的所有点处，唯有个别的一些点除外，而在这些例外点

处它們变为无穷大。这种例外点叫做**极点**；在分式 $\frac{F(z)}{f(z)}$ 中，这些极点是分母的零值点但不同时为分子的零值点，或者，它們虽可能同时为分母及分子的零值点，但其为分母的零值点的重复度高于其为分子的零值点的重复度。例如，就函数 $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$ 説，它的极点是 $z=0, \pm\pi, \cdots\cdots$，因为在这些点处 $\sin z$ 等于零，而 $\cos z$ 則异于零。超越半純函数的性质跟有理函数的性质有些相象。在有理函数 $R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$（$P_n(z)$ 及 $Q_m(z)$ 分别是 n 次及 m 次的多項式）的情形，方程 $R(z)=A$ 对任何 A 的根的个数，跟 n 及 m 两数中的較大者相同；超越半純函数 $\varphi(z)=\frac{F(z)}{f(z)}$ 的情形也跟这相仿：方程 $\varphi(z)=A$ 对任何 A（可能有两个 A 值除外）都有无穷多个根；这就是毕卡尔定理所説的事。任何有理函数可以分解为最簡分式（即只有一个极点的那种有理函数）之和$\left(\text{例如：}\frac{4}{z^3-z^2-z+1}=\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$，同样地，任何超越半純函数也可表示为一些半純函数之和（一般説是无穷級数），而作为和式（或无穷級数）中各項的每个半純函数也都只有一个极点（米泰格-萊弗勒定理）。例如：

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}+\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}+\frac{1}{z-3\pi}+\cdots\cdots$$

使函数不再具有解析性的点，叫做解析函数的奇点；半純函数的极点可算是最簡单的奇点。

若 $\varphi(z)$ 是某一单值函数，解析于某域内，唯有在点 z_1，$z_2, \cdots\cdots, z_p, \cdots\cdots$（它們在域内无聚点）处可能不是解析的，那末，在这些点 z_p 处，可能有下面几种情形：