数学小丛书 9 SHUXUE XIAO CONGSHU

几种类型的极值问题

范会国

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数 学 小 丛 书

(9)

几种类型的极值问题

范 会 国

北京市数学会编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年 · 北京

这本小册子是为中学生写的，开头先从一些实际事例说明极大极小问题的性质；接下去就在中学数学的基础之上，从二次函数的极大极小讲起，讲了几种类型不涉及高等数学的极值问题，并且适当地举一些联系实际的、有趣的例子；最后，把所讲的这些类型统一在一个一般定理之下. 书末附有一些习题，通过对这些习题的演解，读者可以更好地了解和运用所讲的理论. 书中某些定理的证明，虽然不引用高等数学，但是方法上有点近似高等数学，当然不超出中学程度的读者所能理解的范围. 这可能使读者的逻辑思维能力提高一步，而为学习高等数学作一导引.

几种类型的极值问题

范会国

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

兰州新华印刷厂印装

统一书号：13012·0247 字数：24千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：1 $\frac{1}{4}$

1964年2月新一版

1979年1月第2次印刷

印数34,001—334,000册

定价 0.14 元

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物。我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试。热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物。

北京市数学会

1962年4月

目　　次

一　引言……………………………………………………… 3
二　从二次函数的极大极小談起……………………………… 5
三　二因子的积的极大問題和二項的和的极小問題………… 9
四　任意个因子的积的极大問題……………………………16
五　任意多項的和的极小問題………………………………31
六　极大极小問題的互逆性…………………………………40
附录　习題答案和提示………………………………………44

一 引 言

一群同类量中，若有一量大于其他的量，那末这个量叫做这群量的**极大**；若有一量小于其他的量，那末这个量叫做这群量的**极小**．这样的极大极小叫做**絕对极大极小**，以区别于高等数学中通常所考虑的所謂**局部极大极小**．所謂函数 $f(x)$ 的局部极大，就是这函数的这样的值 $f(x_1)$，当自变数 x 足够邻近 x_1 时，对应的其他的函数值都比 $f(x_1)$ 小；所謂函数 $f(x)$ 的局部极小，就是这函数的这样的值 $f(x_2)$，当自变数 x 足够邻近 x_2 时，对应的其他的函数值都比 $f(x_2)$ 大．

极大极小，通常統称**极値**．

极値(局部极値和絕对极値)問題是自然科学、工程技术、国民經济以及生活实践中常常遇到的，不过問題的形式和性質往往随具体情况而异罢了．极値問題所以成为数学的一个重要对象，就是这个緣故．

比方关于气体的体积 V 、压力 p 和絕对溫度 T 的关系，从物理学知道，有个叫做**范德瓦耳斯**(Van der Waals)**公式**：

$$p=-\frac{a}{V^2}+\frac{RT}{V-b},$$

其中 a,b,R 都是只同所考慮的气体有关的正常数．b 是当 p 趋于无穷时，体积 V 的极限值．因此，恆設 $V>b$．如果假定溫度 T 不变，那末压力 p 就只依賴于体积 V，当 V 变时，p 随之而变．現在要求 p 的极大和极小，这就是一个极値問題．

又比方下边一个关于运輸的問題：有貨物要从鉄路 AB 上的 A 城运往和鉄路相距是 $BC=l$ 的 C 城（图 1）．运送一个单位重量經过一个单位路程的运費在鉄路上是 α，在公路上是 β．显然，运費的多少是同鉄路上所經过的路程和公路上所經过的路程有关的．因此，就有这样一个問題：应該从鉄路上哪一处 M 起修筑公路 MC，使循路綫 AMC 从 A 城到 C 城的运費最低廉？我們来看怎样用数学来处理这个問題．命

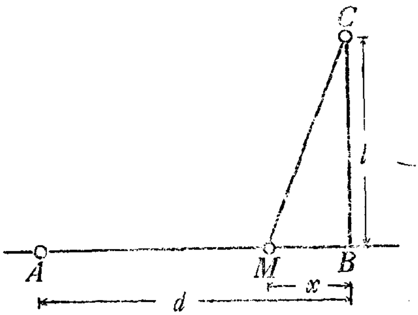

图 1.

$$AB=d, \quad MB=x,$$

依題意，容易知道一个单位重量的貨物的运費

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant d.$$

可見得我們的問題就是求函数 y 的极小値．所以这也是一个极値問題．

又比方著名的所謂“最速降綫問題”：設 A, B 是不在同一豎直綫上的二定点（图 2）．在 A 点的一个靜止的質点要在重力作用下沿一条曲綫滑到 B．显然，沿着

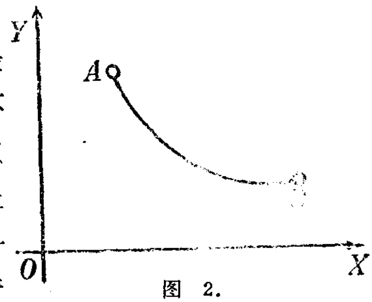

图 2.

联A和B的不同曲綫，質点从A滑到B需要不同的时間。問題是要确定一条联A和B的曲綫，使質点沿这条曲綫从A滑到B所需要的时間最少。这問題的解是由伯努利(Bernoulli)兄弟、牛頓(Newton)、罗比达(l'Hospital)等人得出的。如同上面二个問題，这个問題也是一个极値問題。但是应該指出，它在本質上同上面二个問題有区别。因为第一个問題是要确定自变数V的某些数値，使函数p所取到的对应値是极大或极小。第二个問題也是一样，是要确定自变数x的某些数値，使函数y所取到的对应値是极小。但是，在最速降綫問題中，所要确定的不是一个或几个数値，而是一条曲綫，就是說一个函数，使得依賴于这曲綫的时間是极小。若用T表示时間，$y=f(x)$表示曲綫，那末，对于每一函数$f(x)$，T都有一确定的値同它相应。問題就是要确定一个函数$f(x)$，使T的对应値是极小。

以上所举的这些极値問題以及一般的极値問題的解決，要用到高等数学，超出了这本小册子的水平，不能在这里論述。但是，也有一些极値問題，特别是几何中的許多极値問題，不需要高等数学，只要用初等数学也可以解决，而且在計算上也并不很繁瑣。这就是我們这本小册子所要講的內容。

其次，我們在这本小册子里所談的极値，只限于絕对极値，因为要講局部极値，一般需要用到高等数学。

二 从二次函数的极大极小談起

二次函数ax^2+bx+c，虽然簡单易懂，却很重要而且常常

用到，中学代数里也是作为重点的，专門有一章講它．因此，我們就在中学所講过的基础之上，从二次函数的极大极小談起．

我們来探討一下，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $+\infty$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是怎样变化的，这里 x 是自变数，y 是 x 的函数，a,b,c 是已知常数．

由于 $a\neq 0$，我們可以把这个二次函数写成如下的形式：

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

于是若命

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a},$$

那末

$$y=az.$$

我們只要研究二次函数

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

的变化状况，就容易推出函数 y 的变化状况．

用配方的方法，我們有

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

可見得 z 的值是两部分的代数和，其中一部分 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 是常数，另一部分 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 是变的．要看出当 x 漸增时 z 的变化状况，只要看出变的部分 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 的变化状况．

当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，量 $x+\frac{b}{2a}$ 是負的，它的值从 $-\infty$ 漸增到 0；因此，它的絕对值从 $+\infty$ 漸減到 0；从而它的平方也从 $+\infty$ 漸減到 0．所以当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，z

从$+\infty$渐减到$\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$.

当x从$-\dfrac{b}{2a}$渐增到$+\infty$时，$x+\dfrac{b}{2a}$是正的，它的值从0渐增到$+\infty$；它的平方也从0渐增到$+\infty$；所以z从$\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$渐增到$+\infty$.

上面說的結果可以列表如下：

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \nearrow & -\dfrac{b}{2a} & \nearrow & +\infty \\ \hline z & +\infty & \searrow & \dfrac{4ac-b^2}{4a^2} & \nearrow & +\infty \end{array}.$$

現在来看一看y的变化状况，就是說，二次三項式ax^2+bx+c的变化状况．因为

$$y=az,$$

所以，依照a是正或負，就有两种情形.

第一种情形：$a>0$．在这种情形，当z渐增时，y也渐增；当z变小时，y也变小．所以得y的变化状况如下表：

$$a>0\quad \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \nearrow & -\dfrac{b}{2a} & \nearrow & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & \dfrac{4ac-b^2}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array}.$$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数x从$-\infty$渐增到$-\dfrac{b}{2a}$时，函数y从$+\infty$渐減到$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；而当x繼續从$-\dfrac{b}{2a}$渐增到$+\infty$时，y就停止减小，改做从$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$渐增到$+\infty$．所以函数y的对应于$x=-\dfrac{b}{2a}$的值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$是极小.

第二种情形：$a<0$．在这种情形，当z变小时，函数$y=az$变大，而当z变大时y却变小．所以得y的变化状况如下表：

$$a<0\quad \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \nearrow & -\dfrac{b}{2a} & \nearrow & +\infty \\ \hline y & -\infty & \nearrow & \dfrac{4ac-b^2}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}.$$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；而当 x 継續从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，y 就停止增大，改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐减到 $-\infty$。所以函数 y 的对应于 $x=-\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极大。

例 1 当用实験确定一个量 x 时，由于仪器的不够完善或操作的不够精細，对同一个量作 n 次观測，会得到 n 个不同的值

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

如果量 x 的某一个值同这 n 个值的差的平方和是最小，那末这个值就叫做量 x 的"最可能的"值。求这个"最可能的"值。

解 求这个"最可能的"值就是求 x 的一个值，使得函数

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$
$$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

的对应值是极小。为此，我們用上边所得的关于二次函数的結果。由于 x^2 的系数在这里是 $n>0$，x 的系数在这里是 $-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，立刻可知函数 $f(x)$ 当

$$x=-\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

时是极小。这样，x 的"最可能的"值就是用实験得到的值的**算术平均**。

我們也可以利用高等数学和初等数学的别的方法来解这

个問題[1]，并且都很簡单，不过上面的解法是最簡单不过了.

例 2 設从边长是 a 和 b 的一个矩形 $ABCD$ 的二对頂点(譬如 A, C) 起，在邻边上取同一长度 $AG=AH=CE=CF=x$ (图 3)，那末就得到平行四边形 $EFHG$，它的面积的大小显然随 x 而变. 試問要令 x 取怎样的值，所得到的平行四边形 $EFHG$ 的面积才是极大.

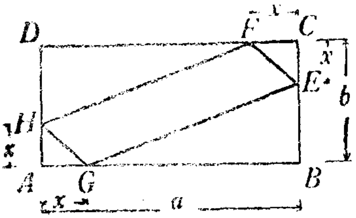

图 3.

解 設 $AB=a$、$BC=b$，S 是平行四边形 $EFHG$ 的面积，就有

$$S=ab-x^2-(a-x)(b-x)=-2x^2+(a+b)x.$$

可見得使 S 是极大的 x 值是：

$$x=-\frac{(a+b)}{2\cdot(-2)}=\frac{a+b}{4};$$

而 S 的对应的极大值是：

$$S=\frac{(a+b)^2}{8}.$$

三 二因子的积的极大問題和二項的和的极小問題

現在我們来討論和是定值的二个正变数的积的变化状况. 設 a 是二个正变数的和，x 是其中的一数，那末另一数就是 $a-x$. 由于假定二数都是正的，問題就是研究当 x 从 0 漸

[1] 参閱这一套从書中史濟怀：«平均»，第 5 頁.

增到 a 时，函数

$$y=x(a-x)=-x^2+ax$$

的变化状况．这是一个二次函数，其中 x^2 的系数是負的，所以根据第二节的結果，就得到函数 y 的变化状况如下表：

x	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2}$	$\nearrow$	a
y	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	0

可見得积 $y=x(a-x)$ 当 $x=\frac{a}{2}$，也就是当 $x=a-x$ 时是极大．換句話説，就是当二因子相等时，它們的积是极大．从这里得到下面的定理：

定理 1 設二个正变数的和是定値，那末当这二数相等时①；它們的积是极大．

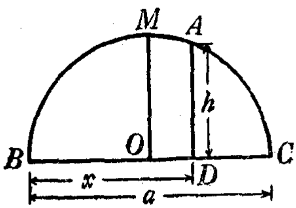

图 4.

这个定理的几何証法，也很簡单，現在順便給出．

設 $BC=a$（二数的和）．用 BC 做直径作半圓周（图 4）．命 $BD=x$，$DA=h$，其中 A 是直径 BC 在点 D 的垂綫同半圓周的交点，于是有

$$BD\times DC=\overline{DA}^2;$$

卽
$$x(a-x)=h^2.$$

設 O 是 BC 的中点，M 是 BC 在点 O 的垂綫同半圓周的交

① 注意，正如布拉里-福尔蒂 (Barali-Forti) 所指出，必須这二数能相等，見《数学教学》[L'Enseignement Mathématique (1910)]第 512 頁．对于下面的定理 2，也是这样．

点，那末就有

$$BO \times OC = \overline{OM}^2.$$

但是 $$OM > DA.$$

可見当 $x = BO = OC = a - x$，卽 $x = \frac{a}{2}$ 时，积 $x(a-x)$ 是极大.

应該指出，在定理 1 的头一个証明中，只利用了二次函数的变化状况，所以和是定値的二因子的号可以是任意的，而不必限制它們都是正的。現在来直接証明这个論断。为此，先建立下面的引理(以后还要用到)。

引理 和是定値的二个变数的积当这二数的差的絶对值减小时增大，而当这个差的絶对值增大时减小。

事实上，設 x, y 是任意二数，我們有恆等式

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2.$$

这个恆等式指出，当二个变数 x, y 的和是定値 a 时，有

$$4xy = a^2 - (x-y)^2.$$

可見当二数 x, y 的差的絕对値减小时，积 xy 增大，而当这个差的絕对値增大时，积 xy 就减小。这就証明了引理。

現在回头来証明上面所提出的論断。当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $+\infty$ 时，二因子 $(a-x)$ 和 x 的差 $(a-2x)$ 漸变小；当 x 小于 $\frac{a}{2}$ 时，它是正的，而当 x 大于 $\frac{a}{2}$ 时，它是負的．因此，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $\frac{a}{2}$ 时，差 $(a-2x)$ 的絕对值漸变小，而当 x 从 $\frac{a}{2}$ 繼續漸增到 $+\infty$ 时，差 $(a-2x)$ 的絕对值漸增大；从而根据引理可見，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $\frac{a}{2}$ 时，积 $x(a-x)$ 漸增，而当 x 繼續从 $\frac{a}{2}$ 漸增到 $+\infty$ 时，积 $x(a-x)$ 漸减。这說明积 $x(a-x)$ 当 $x = \frac{a}{2}$，卽 $x = a - x$ 时取到极大值。上面所提出的論断便得到

証明.

順便指出，用定理 1 来解上面的例 2，也很簡便．事实上，由于所考虑的平行四边形的面积是

$$S=-2x^2+(a+b)x=2x\left(-x+\frac{a+b}{2}\right),$$

而二因子 x 和 $\left(-x+\frac{a+b}{2}\right)$ 的和是定值，由定理 1 知道，这面积 S 当 $x=-x+\frac{a+b}{2}$，即 $x=\frac{a+b}{4}$ 时是极大．这就是前面所得到的結果．

例 3 在半径是 R 的圓里，求作周长是极大的內接长方形．

为使讀者体会同一問題可以有不同的解法，結果是殊途同归，我們借这个簡单問題的机会，給出两个解法．

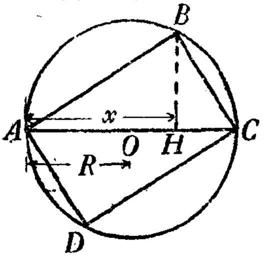

图 5.

解 1 設 $ABCD$ 是一內接于圓的长方形（图 5），$2p$ 是它的周长，那末有

$$2p=2AB+2BC,$$

而問題就是求

$$p=AB+BC$$

的极大值．

取 $AH=x$ 是未知量，其中 H 是从 B 到 AC 的垂綫同 AC 的交点，那末有

$$AB=\sqrt{2Rx},\quad BC=\sqrt{2R(2R-x)}.$$

于是 $p=\sqrt{2Rx}+\sqrt{2R(2R-x)}=\sqrt{2R}(\sqrt{x}+\sqrt{2R-x}),$

因之 $$p^2=2R[x+2R-x+2\sqrt{x(2R-x)}]$$
$$=4R[R+\sqrt{x(2R-x)}].$$
可見 p^2 因之 p 同 $x(2R-x)$ 同时是极大，但是 x 和 $2R-x$ 的和 $x+2R-x=2R$ 是定值，根据定理 1 知道，当 $x=2R-x$，即 $x=R$ 时，p 是极大。这时，三角形 ABC 是等腰，因之周长是极大的內接长方形是一个正方形。

解 2 設 $AB=x, BC=y$ 是长方形的二边，那就有
$$2p=2x+2y, \text{即 } p=x+y,$$
和 $$x^2+y^2=4R^2.$$

从方程 $x+y=p$，得到
$$x^2+y^2+2xy=p^2,$$
即 $$p^2=4R^2+2xy.$$
从这里知道，p^2 同积 xy 同时是极大，因之也同 x^2y^2 同时是极大，从而 p 同 x^2y^2 同时是极大。但是和 x^2+y^2 是定值，根据定理 1 知道，积 x^2y^2 当 $x^2=y^2$，即 $x=y$ 时是极大。这說明周长是极大的內接长方形是正方形。

由 $$x=y \text{ 和 } x^2+y^2=4R^2,$$
得到 $$x=y=\sqrt{2}R.$$

現在我們来考虑定理 1 的逆定理。为此，我們来建立下面的定理。

定理 2 設二个正变数的积是定值，那末当这二数相等时，它們的和是极小。

为要証明这个定理，我們利用下面的恆等式：
$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2.$$

若用 a^2 表示二个正变数 x,y 的积的正定值，那末这个恒等式变成

$$(x+y)^2=4a^2+(x-y)^2.$$

可見 $(x+y)^2$ 的变化状況同 $(x-y)^2$ 的变化状況相同，就是說同二个变数的差的絕对值的变化状况相同，而当 $x=y$ 时，$(x-y)^2$ 因之也就是 $(x+y)^2$ 是极小．但是，当二个变数是正时，和 $(x+y)$ 的变化状况同 $(x+y)^2$ 的变化状况相同．所以和 $(x+y)$ 也当 $x=y$ 时是极小．这就証明了定理．

例 4　在所有外切于一个給定圓的菱形（图 6）中，求面积是最小的一个．

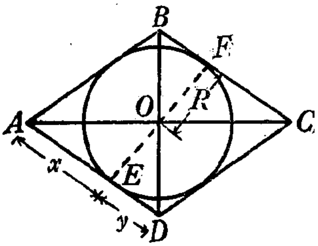

图 6.

解　設 $AE=x, ED=y$. 用 S 表示菱形的面积，那末有

$$S=AD\times EF=(x+y)2R.$$

由直角三角形 AOD，得到

$$\overline{OE}^2=AE\times ED,$$

即

$$R^2=xy,$$

因之

$$S=2R\left(x+\frac{R^2}{x}\right).$$

由于积 $x\times\frac{R^2}{x}=R^2$ 是定值，根据定理 2，和 $x+\frac{R^2}{x}$ 当 $x=\frac{R^2}{x}$，即 $x=R$ 时是极小．这时，$y=R$，$S=4R^2$．所以外切于圓而面积是最小的菱形是一个外切正方形．

例 5〔維維亚尼(Viviani)問題〕　給定二条平行綫和一条割綫 BC（图 7）．由一条平行綫上的一定点 D，引一条变的直綫 DA 交割綫 BC 于点 I．若命 $BI=x, BC=b$；試問 x