应用非标准分析

[美]MARTIN DAVIS著
冯　汉　桥　等译

陕西师范大学出版社

应用非标准分析

[美] M·DAVIS 著

冯汉桥 康多寿 栗延龄 汪惠民 等译

路干亭 校

陕西师范大学出版社

应 用 非 标 准 分 析

［美］ M·DAVIS 著

冯汉桥　康多寿　栗延龄　汪惠民 等译

路干亭　校

*

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大 120 信箱）

陕西省新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张 7.875　字数 161 千

1989 年 4 月第 1 版　1989 年 4 月第 1 次印刷

印数：2200

ISBN 7-5613-0191-X

G·179　定价：2.60元

中译本序

当我们历史地考察微积分学的发展时，我认为大致上有三个阶段。第一阶段是从牛顿、莱布尼茨创立微积分到19世纪20年代哥西的工作之前，在这 150 多年中，微积分的理论体系和它在天文、工程、航空、航海等多方面的应用都有重大的发展，但同时也暴露了它的逻辑基础方面的问题，人们发现了其中若干惊人的含糊不清之处，到处都有从特殊到一般的不可靠的推理方法。第二阶段是从哥西1821年的《代数分析教程》开始到1960年鲁滨逊的非标准分析产生之前，这140年经历了哥西、外尔斯特拉斯、康托尔的分析、实数的奠基工作和奠基后的理论与应用方面的开拓性工作，产生了一系列新的分支学科。第三阶段是从1961年鲁宾逊的工作开始，至今不到30年的历史。非标准分析给微积分学提供了一个既使用无限小的数及无限大的数又合乎当代严谨标准的逻辑基础和论证方法。正如本书著者所说："与其说非标准分析是一门学科，还不如说它是一种方法"，这一方法已渗透到分析数学的各个分支学科。它将导致分析数学的新发展和更广阔的应用。

鲁宾逊是一位卓越的数理逻辑学家，他长期从事数学在航空方面的应用研究，对物理与流体力学都作出了贡献，特别是运用现代数理逻辑的严谨方法，在哥西、外尔斯特拉斯微积分学（即标准分析）的基础上论证了实无限小量的存在性，从而把实数域 R 扩大到超实数域 $^*R$。已经证明任一实

数都在 $^*R$ 中，并且存在着无限小的数 $\varepsilon>0$，ε 在 $^*R$ 中(当然 ε 不在 R 中)，这样，数域 $^*R$ 就是 R 的一个真扩充，正如实数域 R 是有理数域 Q 的扩充那样，都是要经过严谨的数学论证的。虽然，无理数在古代数学中已被发现，然而实数域 R 的严格理论直到19世纪后期才建立起来了。无限小在古代数学中也已出现，并且在微积分初期已被广泛应用，而它的严谨理论只是在1960年后方由鲁宾逊所建立。鲁宾逊是无限小的严谨理论(即非标准分析)的奠基人。1966年出版的鲁宾逊的专著《非标准分析》不仅全面地系统地阐述了非标准分析的基本概念、方法与定理，而且概述了伯恩斯坦与鲁宾逊本人所发现的“在希尔伯特空间上任何多项式紧线性算子必有非平凡的不变子空间的非标准方法的证明”。阅读鲁宾逊的专著需要一定的逻辑训练与基础，一般数学工作者往往因缺少逻辑训练而不易理解。M·戴维斯的这本书是为高年级大学生和研究生写的教科书，它是一本还不具备逻辑予备知识的读者学习非标准分析的合适教材。本书不仅通俗易懂、论证严谨，而且内容也是深刻的，它的中心部分在于阐述与论证鲁宾逊与伯恩斯坦定理。

值得注意的是戴维斯是一位知名的数理逻辑学家，他对数学及其应用都有深刻的理解。他是希尔伯特第十问题的否定解决的主要贡献者之一。他也是把逻辑应用于计算机科学并作出重要贡献的学者之一，他在可计算性、机器证明方法与程序正确性证明等方面都有贡献。

本书中译本的出版将会对中国数学界产生积极的影响，给那些不熟悉数理逻辑并对非标准分析有兴趣的读者提供一个很好的教材，人们可以通过它了解非标准分析的结果，掌

握非标准分析方法（这是当代分析数学中一个强有力的方法），并运用它对分析数学及其应用作出贡献。

哥德尔曾指出："我们有充分的理由相信，以这种或那种形式表示的非标准分析，将成为未来的分析学"（转引自鲁宾逊《非标准分析》第二版序言）。我们相信，一个数学工作者（不管他是研究者还是教师）能够熟练地掌握非标准分析的方法将是十分有益的。而它对于数学的应用（特别是分析数学的应用）尤其是重要的。

张锦文

1988年9月于北京

中国科学院软件研究所

前　言

非标准分析本来是运用模型论（数理逻辑的一个重要分支）的方法把数学论域嵌入到一个包括无限小及无限大对象的所谓“非标准全域”中的方法。而本书的目的是要为还不具备逻辑知识的读者学习非标准分析提供一个合适的教材。全书自始至终强调非标准分析对“标准”数学的应用。由于考虑到非标准分析对于各个领域的读者都具有潜在的兴趣，因此本书的预备知识保持尽量低的要求。在学习前三章时，读者只要具备群、环、域的基本知识并对 ε-δ 方法有初步了解即可.至于后两章,也只需要有限维线性代数的一些基础知识。

在前三章中，主要强调一些结论以自然、直观并富有启发性的证明，而这些结论的标准证明则是比较复杂的。在后两章中,为了处理问题方便起见,我们在得出线性算子的结果时自由地使用标准与非标准两种方法，不过不要求事先具备泛函分析的知识。特别地，在这一部分中包含了 Bernstein-Robinson 关于希尔伯特空间上多项式紧算子的不变子空间存在性的证明。

这本书是在研究生课程的基础上发展起来的，这些课程曾经在柯朗研究所和不列颠哥伦比亚大学开设过。本书可以作为大学高年级或研究生的教科书。在本书编写过程中曾得到我的学生及参加听课的同事们从各方面给予的许多帮助。Peter Gilkey，Melvin Hausner 以及 David Russinoff 的意见对我有特别的教益。假如没有 Barry Jacobs 的课堂

笔记，我便难以写成这本书．最后还要感谢 Connie Engle 的准确无误的打印。

非标准分析在很大程度上是 A. Robinson 一个人的创造。他不久前过早地去世给数学界带来了巨大的损失。书中凡是没有特别指出某个结论是某某人的，那么这些结论便都是他的。

非标准分析的诞生对历史也是一次巨大的嘲弄。数理逻辑的方法是由于在分析中要求绝对的严格而发展起来的(至少部分地是这样)，然而也正是数理逻辑提供了必须为曾经声名狼籍的无限小方法正名的基础。事实上，人们对非标准方法所表现的热情是与这种正名给予人们的喜悦心情密切相关的，而这种热情正是由于这些方法有数学的简明、优美、巧妙的性质以及它们具有深远影响的应用的缘故。

MARTIN DAVIS

New york 1976. 11.

目　录

引　论

1．非标准分析的作用

非标准分析与其说是一门学科，不如说是一种方法。除了那些告诉人们非标准概念等价于相应的标准概念的定理以外，我们现在所得到的结果都能用标准方法加以证明.因此，这一学科的重要性首先在于它能够导致比较简明的、容易接受的叙述。其次，(更重要的)是易于导致数学上的发现。

关于第一点，读者将会是很好的鉴定者。至于第二点，最好的证据是关于无限维线性空间的不变子空间的 Bernstein-Robinson 理论.这是一个多年未解决的问题.这些结果的很简单的标准证明现在已经有了。我们在此给出了他们理论的一部分，这不仅因为这是一条通向发现的道路，同时也是因为它使我们有机会展现一种十分美妙的思想，即用一个可以使用有限维线性代数结果的空间从上面来逼近一个无穷维空间。

2．理想元素无限小

从数学上来说，非标准分析的研究应该划归到运用理想元素的范畴 .这是一个具有时代荣誉的重要的数学方法。人们常用假设附加的理想对象存在的方法来简化某些数学理论。例如代数整数在理想中的嵌入，复数系的构造以及射影几何中无限远点的引入。

在非标准分析中，不只要引入那些无限接近人们感兴趣

的对象的理想元素，而且还要引入无限远的理想元素．Leibniz首先使用这些理想元素来发展微积分。尽管这对于直观想象是很有吸引力的方法，但是要提供无限小理论的健全的数学基础似乎是不可能的。

把实数嵌入到包括无限小的域(在代数语言中叫做非阿基米德有序域)中的纯粹代数问题并不困难，可是一旦涉及到超越函数，困难便会立即出现：例如为了微分 $\sin x$，我们希望写成：

$$\sin(x+dx)-\sin x=\sin x(\cos dx-1)+\cos x\sin dx$$

其中 dx 是无限小。但是这样写不仅要假定对于形如“实数+无限小”的“数”来说正弦函数已有定义，而且还要假定正弦函数的加法定理亦成立(在复函数理论中类似的问题导致了解析开拓和保形原理)，正是现代逻辑(更确切地说，模型论)指明了解决这个问题的关键。

3．逻辑的作用

Leibniz 假定存在一个数系，它与通常的数系具有相同的性质，但它包含无限小．这样以来，Leibniz 对上面所讨论的 $\sin x$ 的微分便没有怀疑。然而从表面上看，Leibniz的提法是荒谬的。显然，通常的实数系至少不具备 Leibniz 所期望的那种扩大的数系的一条性质，即在实数中没有无限小。

这个矛盾可以使用一个现代逻辑意义上的形式语言来避免(在方法上与计算机的程序语言完全相同)。这样以来，Leibniz 原理便被重新解释为：*存在实数的一个扩张，它包含无限小元素，而且它与实数系具有相同的性质，只要这些性质能够在特定的形式语言中被表达*。其结果是：无限小这

个性质是不能如此地表达的，或者我们将说：无限小是一个外集。

4．三种技巧

在非标准分析中，人们使用两种结构：标准全域和非标准全域。此外，还有一种形式语言，它被用来作出断言。这种断言可以作两种解释，它们可以指称这两种结构中的任何一种。

在非标准分析中有三个主要工具。一个是转换原理。粗略地讲，形式语言中相同的断言在标准全域和非标准全域中或者同真或者同假。其典型的应用是，首先在非标准全域中证明我们需要的结果，而后注意这个结果能用形式语言表达，于是我们便可断定这个结果在标准全域中同样也是成立的。

另外一个技巧是共点性。这是一个逻辑技巧，它保证了这个扩张的结构包括所有可能的完备性、紧致性等等。

第三个技巧是内性。非标准全域中的元素的一个集合S是内的，如果S本身是非标准全域的一个元素的话，否则称S是外的。一个有用的证明方法是这样一种反证法，这种方法是把一些人们已知是外的某个集合在反证的假设之下变成为内的，从而得出矛盾。

当然上述的讨论只是大略的，在作详细叙述之前，读者不必期望真正弄清这些东西。

5．数理逻辑与严密性

一些数学家完全满足于在自己的专业领域内的数学叙述中的那些通常水平的严密性，而且他们也很少被哲学的争论

所困扰。但是当同样的标准出现在应用数理逻辑的时候，他们就表现出了极大的不安。因而要提醒大家注意：尽管逻辑在讨论数学基础中的基本问题时是重要的，然而当把数理逻辑当作另一种数学技巧来应用时就不必涉及这些基本问题。

在非标准分析中使用逻辑，在某种程度上类似于在数学中使用几何语言。把给形式语言的“句子”(形式上说，一个“句子”就是一个被称为符号的对象的有限序列)赋于一种“意义”的那种直观，与用考察图形来得到几何定理的那种直观相比较是很有好处的.在做阐述时，类似的问题也出现在两种情形中，如写出一个从图形上来看是明显的事实的详细解析证明，一旦人们已经掌握了这种做法，它便很快变成一种乏味的工作.类似地，给出形式语言中一些句子“说”的就是它们在直观上要说的那件事情的详细证明，也很快地会变成一种多余的工作。建议读者略掉那些似乎是不必要的证明。如果你对某件事情有一点怀疑的话，你再去补充曾经被略去的证明.

6. 定理的编号

定理 2-8.1 是指第 2 章的定理 8.1，即第 2 章第八节的第一个定理。当参考的定理在同一章中时，就略去章数。如在第二章内参考定理 7.2 就是定理 2-7.2.

第一章 全域与语言

1. 集与关系

我们知道，数学所研究的各种各样的对象与关系都可以用集来构造．用这个办法来叙述非标准分析也是很方便的．因而，我们将从介绍本书要用到的集论的基本概念开始．

我们用 $x\in A$ 表示 x 是集 A 的一个元素．$x\notin A$表示相反的意义．对于集 A，B,$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 是指 $x\in A$ 蕴涵 $x\in B$，并且 $A\subset B$ 或 $B\supset A$ 的意义是 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$。

我们通常用记号

$$\{x|\cdots\},\ \{x\in A|\cdots\}$$

来确定特殊的集.其元素正好为 $a_1,\cdots,a_n$ 的有限集记为$\{a_1,\cdots,a_n\}$。空集记为$\varnothing$。空集是唯一不含元素的集.我们也考虑另外一类称为个体的对象。个体没有元素，因而它们不是集。对于任何集 A，我们令

$$\mathscr{P}(A)=\{B|B\subseteq A\}.$$

$\mathscr{P}(A)$叫做 A 的幂集。

对于任何对象 a，b 我们记

$$\langle a,\ b\rangle=\{\{a\},\ \{a,\ b\}\}.$$

$\langle a,\ b\rangle$叫做 a 与 b 的序对。虽然这个定义咋看起来很随意，然而“序对”这个名称可由下述引理说明它是合理的。

引理 $\langle a,\ b\rangle=\langle a',\ b'\rangle$当且仅当 $a=a'$，$b=b'$。

证明 我们已知的是

$$\{\{a\},\ \{a,\ b\}\}=\{\{a'\},\ \{a',\ b'\}\},$$

这些集相等的意义是它们有相同的元素。于是有两种情形：

情形 1

$\{a\}=\{a'\}$，$\{a,b\}=\{a',b'\}$，在这种情形下，$a=a'$，于是$\{a,b\}=\{a,b'\}$。若 $a\neq b$，则$\{a,b\}$就有两个元素．故$\{a,b'\}$也有两个元素，因而 $b=b'$。若 $a=b$，则 $a=b'$，于是也有 $b=b'$。

情形 2

$\{a\}=\{a',b'\}$，$\{a,b\}=\{a'\}$，则 $a=a'=b'$ 且 $a=b=a'$ 于是 $a=a'$ 与 $b=a'=b'$。 ■

我们用递归的办法定义（有序）n 元组$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，$n>2$，

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle.$$

用归纳法容易证明$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle$当且仅当 $x_1=y_1$，$x_2=y_2$，$\cdots$，$x_n=y_n$。为了将情形 $n=1$ 也包括进来，我们记$\langle x\rangle=x$。对于任何集 X。我们令

$$X^n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle|x_1,x_2,\cdots,x_n\in X\}.$$

如果 A 与 B 都是集，我们记

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle|x\in A \text{ 及 } y\in B\}.$$

如果 $R\subseteq A\times B$，则称 R 是一个关系。当 $B=A$ 时，我们有时也说 R 是 A 上的一个关系．令 R 是一个关系，我们有时用 xRy 代替$\langle x,y\rangle\in R$。关系 R 的定义域（记为 $dom(R)$）是指由一切这样的 x 组成的集，对于某个 y 使得 xRy。

如果 $g\subseteq A\times B$（g 是一个关系）并且若对于每个$x\in A$，恰有一个 $y\in B$ 使得$\langle x,y\rangle\in g$，则称 g 为从 A 到 B 中的一个函数（或一个映射）。对于 $x\in A$，我们用 $g(x)$ 记 B 中的那个唯一的元素，它使得$\langle x,g(x)\rangle\in g$。对于 $C\subseteq A$，我们令

$$g[C]=\{g(x)\mid x\in C\}。$$

$g[C]$叫做 C 在 g 下的象，这里 $A=dom(g)$叫做 g 的定义域，集 $g[A]$叫做 g 的值域。如果 $g[A]=B$ 则称 g 映 A 到 B 上。如果 $g(x)=g(y)$蕴涵 $x=y$，则称 g 为一一映射。

如果 f 映 X^n 到 Y 中，则称 f 为从 X^n 到 Y 中的一个 n 元函数(或一个 n 变元函数)，并记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$以代替 $f(\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle)$。

本书自始自终用 N表示自然数或非负整数集$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$。将正整数集$\{1, 2, 3, \cdots\}$记为 N^+。

有时，当我们对函数的定义域的兴趣不如对其值域的兴趣大时，我们就改变我们的记号和语言：我们称函数的定义域为指标集，函数也改称为加标族。因此以 I 为指标集的加标族就是以 I 为定义域的映射 X。在这种情形下，对于每个 $i\in I$ 我们以 X_i 代替$X(i)$，并以$\{X_i\mid i\in I\}$表示这个族本身(即此映射)。当从上下文中可看出此指标集是什么时，我们就简记为$\{X_i\}$。如果其指标集是形如 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$或$\{0, 1, \cdots, n\}$，则这个族叫做一个有限序列，而如果指标集是 N 或 N^+，就称该族为无限序列。

设$\{X_i\mid i\in I\}$是一个集的加标族，即每个 X_i 为一个集，那么，我们记

$$\bigcup_{i\in I} X_i=\bigcup\{X_i\mid i\in I\}$$

$$=\{z\mid z\in X_i \text{ 对某 } i\in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i=\bigcap\{X_i\mid i\in I\}$$

$$=\{z\mid z\in X_i \text{ 对于一切 } i\in I\},$$