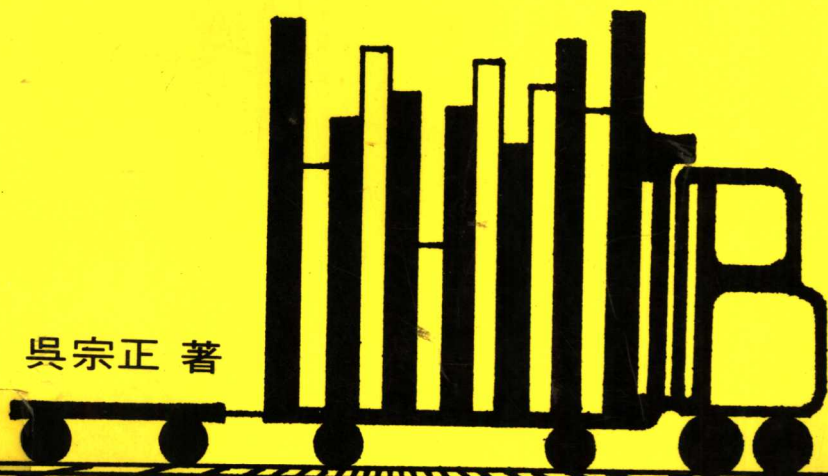


# 實驗設計

因子實驗分析與問題探討

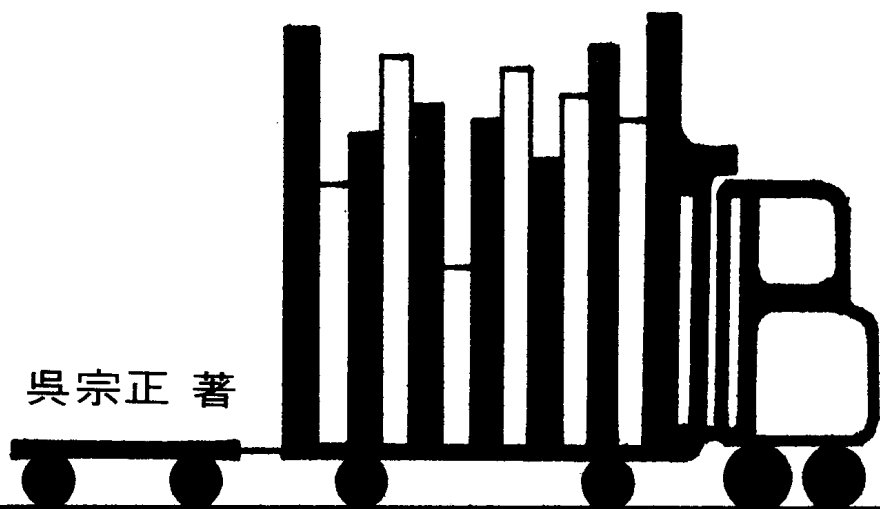
吳宗正 著



# 實驗設計

因子實驗分析與問題探討

吳宗正 著



# 實驗設計

平裝 220 元

精裝 260 元

發行人：鮑 國 雄

出版者：南台圖書公司

地址：台南市博愛路62號

電話：(062) 二三六〇八〇

郵政劃撥：三五八五八

印刷者：金益印刷廠

地址：台南市東榮街105號

本公司登記證・字號爲行政院  
新聞局局版台業字第一八七八號

中華民國七十年四月初版

版權所有：請勿翻印

# 序

近年，實驗設計在學術界及工商界的努力推廣下，發展迅速，尤其在產品設計，工程變異分析，交通規劃及產品品質控制方面，實驗設計的確擔負了重要的角色。多年來政府大力發展經濟，改變生產結構，推廣外銷，提高國民生活水準，在這方面產品品質則日益受到各界之重視，誠然有優異的品質，市場自有消費者購買，產品信譽也愈蒸蒸日上，國民生活水準層次也因此會大幅地提高。要達到此一境界，首先須要有良好之品質規劃及制度，在生產過程中配以實驗設計之技術，精益求精，在人力，資源及設備共同配合下，產品品質定然會日益增進。

在本文中將提出一系列實驗設計的基本問題及製作過程，並且針對問題的來源進行合理地整理及分析，尤其是實驗設計不同層次的最佳化及貢獻化都做不同方向的比較及探討。另外，在從事實驗設計時最常遭遇的問題及困厄，在文中都一一列舉並予以解釋及分析。

全書一共分10章，分別就一因子實驗CR-r設計，二因子實驗CR-ab設計，三因子實驗CR-abc設計，巢狀(Nested)實驗設計予以分析及探討。本書將重於多重比較(Multiple Comparison)、直交對比(orthogonal contrasts)及資料趨勢分析，並以迴歸方法輔助上列設計之說明以增強實驗設計中變異數分析與迴歸關係之觀念。另外亦探討一般化的2'及3'實驗設計，變異數分析，因子水準平均數之推定及各平方和簡捷法Yates程序之分析，書中也就各問題提出不同層次的實例以增強應用時觀念之融通。

本書之編著承蒙系上諸位老師之鼓勵，始能如期完成，在此表示衷心之謝意，又本書特承摯友方賢彬小姐之校稿、南台書局許總經理及余振源先生之多方奔走及熱心協助在此亦一併致謝。

著者學識淺短，故錯誤之處在所難免，尚祈斯學先進不吝賜教。

中華民國七十年四月

吳宗正 謹識于成大

# 目 錄

<b>第一章 一因子實驗(CR-r)及平均數推論之探討</b> .....	1
1-1 序言.....	1
1-2 設計一實驗須注意之事項.....	2
1-3 CR-r 完全隨機設計模式之構造及分析.....	4
1-3-1 固定效果.....	4
1-3-2 隨機效果.....	8
1-4 CR-r 設計中參數之估計.....	9
1-4-1 固定效果.....	9
1-4-2 隨機效果.....	13
1-5 CR-r 公式之推導及整理.....	14
1-6 CR-r 中 $E(MS)$ 之推導——固定效果.....	18
1-7 CR-r 中 $E(MS)$ 之推導——隨機效果.....	26
1-8 CR-r 中 $MSTR$ 與 $MSE$ 獨立原因.....	34
1-9 兩隨機樣本及成對樣本之比較.....	35
1-10 CR-r 中 $F$ 檢定之分析.....	40
1-11 CR-r 中 $F$ 檢定統計量小於 1 之問題分析.....	45
1-12 CR-r 中 $F$ 檢定力之探討.....	46
1-13 直交性之意義及應用.....	51
1-14 CR-r 中處理平均數差異之檢定.....	65
1-14-1 事前 ( prior ) 檢定.....	65
1-14-2 事後 ( posteriori ) 檢定.....	69
1-15 CR-r 中對同一資料同時應用事前及事後檢定之探討.....	72
1-16 CR-r 中單一母群體平均數之推定.....	74
1-16-1 固定效果.....	74
1-16-2 隨機效果.....	77

1 - 17	CR - r 中兩母群體平均數差異之推定	79
1 - 18	CR - r 中多重區間之比較及檢定 ( Multiple Comparison )	82
1 - 18 - 1	多重比較之意義	83
1 - 18 - 2	比較之定義	83
1 - 18 - 3	直交對比	84
1 - 18 - 4	計劃型比較—多重 t 檢定 ( 事先型檢定 )	87
1 - 18 - 5	計劃型直交對比差異之信賴區間	90
1 - 18 - 6	執行多重比較應注意的問題	91
1 - 18 - 7	Dunn 多重比較程序—事先型檢定	92
1 - 18 - 8	應用 F 檢定法檢定事先型之直交比較	94
1 - 18 - 9	事後型檢定程序	95
1 - 18 - 10	LSD 檢定	95
1 - 18 - 11	Tukey 之 HSD 檢定法	97
1 - 18 - 12	Scheff' e 檢定法	99
1 - 18 - 13	Newman-Keuls 檢定法	101
1 - 18 - 14	Duncan 檢定法	103
1 - 18 - 15	Dunnnett 檢定法	104
1 - 18 - 16	多重比較程序之比較	106
1 - 18 - 17	相對效率之探討	107

## 第二章 一因子實驗中變異數推論之探討 ..... 109

2 - 1	序言	109
2 - 2	單一變異數及兩組變異數檢定之分析	110
2 - 3	CR - r 變異數相等性之探討	112
2 - 3 - 1	Bartlett 檢定	113
2 - 3 - 2	Hartley 檢定	114
2 - 3 - 3	Cochran 檢定	116
2 - 4	變異數轉換 ( Transformation ) 之探討	117

### 第三章 一因子實驗中資料趨勢之檢定及配合度... 122

- 3 - 1 序言——趨勢分析之目的..... 122
- 3 - 2 資料趨勢之檢定..... 122
- 3 - 3 線型趨勢檢定之詮釋..... 123
- 3 - 4 應用直交多項式 ( Orthogonal polynomials ) 配合資料趨勢之分析..... 123
- 3 - 5 實例解析——線型檢定..... 132
- 3 - 6 非線型趨勢之檢定..... 134
- 3 - 7 實例解析——二次及三次項趨勢之檢定..... 135
- 3 - 8 應用多項式方程式配合趨勢之推導..... 138
- 3 - 9 配合度檢定..... 140
- 3 - 10 事後趨勢分析之程序..... 141
- 3 - 11 相關性之測度——獨立變數與相依變數間之關係..... 141

### 第四章 一因子實驗中樣本規劃及相關問題之探討

- 4 - 1 序言..... 143
- 4 - 2 CR - r 中樣本規劃之探討——Hartley-Pearson 圖形法..... 143
- 4 - 3 CR - r 中屬質變數迴歸方法之分析..... 146
- 4 - 4 CR - r 中屬量變數迴歸方法之分析..... 157
- 4 - 5 CR - r 中與假設發生偏離時相關問題之探討..... 166
- 4 - 6 CR - r 設計之優點及缺失..... 168

### 第五章 二因子實驗(CR-ab)及相關問題之探討— 因子實驗 ( I ) ..... 169

- 5 - 1 序言..... 169
- 5 - 2 因子實驗之引介及分類..... 170
- 5 - 3 採用因子實驗之理由..... 170

5-4	CR-ab 二因子實驗設計模式之構造	171
5-4-1	固定效果模式	172
5-4-2	隨機效果模式	172
5-4-3	混合效果模式	174
5-5	CR-ab 實驗設計中 E(MS) 之構造	177
5-5-1	固定效果模式	178
5-5-2	隨機效果模式	178
5-5-3	混合效果模式	178
5-6	CR-ab 實驗設計中 F 檢定之探討	181
5-6-1	固定效果模式	181
5-6-2	隨機效果模式	182
	(a) 模式 M <sub>II</sub> A	① 保守型 F 檢定 ② satterthwaite 檢定
	(b) 模式 M <sub>II</sub> B	
5-6-3	混合效果模式	184
5-7	CR-ab 設計中顯著水準之探討	185
5-8	CR-ab 設計中 F 檢定力之分析	186
5-9	CR-ab 設計中交互作用存在時，檢定力之求解	188
5-10	CR-ab 設計之圖解範示	189
5-11	CR-ab 設計中交互作用存在之圖示及說明	190
5-12	CR-ab 設計中檢定交互作用存在之方法	192
5-12-1	檢定法	192
5-12-2	公式法	192
5-12-3	圖示法	194
5-12-4	表列法	194
5-13	CR-ab 設計交互作用存在時簡單主效果 (Simple ME) 之檢定及分析	196
5-14	CR-ab 設計中 (n > 1) 實驗誤差一致性 (constant) 之檢定及分析	202
5-15	CR-ab 設計中 (n = 1) 交互作用之 Tukey 檢定及探討	203



5 - 16	CR-ab 設計中 ( $n > 1$ ) 交互作用不顯著時，誤差合併之問題	212
5 - 17	CR-ab 設計中參數之估計及推定	213
5 - 18	CR-ab 設計中 $n \neq n_j$ 時有關構造及設計問題之探討	228
5 - 18 - 1	傳統方法——成比例	229
5 - 18 - 2	非加權方法——不成比例，也不受處理之影響	230
5 - 18 - 3	最小平方法——不成比例，但受處理之影響	234
5 - 19	CR-ab 設計中資料趨勢之探討——應用直交多項式	240
5 - 20	CR-ab 設計中迴歸模式之探討	261
5 - 21	CR-ab 設計中相關性之測度	271

## 第六章 $2^r$ 因子實驗設計之探討 ( $r=2$ ) ..... 274

6 - 1	序言	274
6 - 2	$2^2$ 因子實驗設計之分析	274
6 - 3	$2^2$ 設計之變異數分析	278

## 第七章 因子實驗中Nested設計之探討 ..... 280

7 - 1	序言	280
7 - 2	Nested 設計之圖示及說明	280
7 - 3	Nested 設計之模式構造及分析	281
7 - 3 - 1	CRN-a(b) 之設計	281
7 - 3 - 2	CRN-a(b)(c) 之設計	286
7 - 3 - 3	CRN-a(b)c 之設計	288
7 - 4	Nested 設計中參數之估計及推定問題之探討	292
7 - 5	Nested 設計中迴歸模式之分析	295
7 - 6	Nested 設計其應用時效率性 (E) 之分析	297
7 - 7	Nested 設計中誤差合併之探討	297
7 - 8	Nested 設計中 $n \neq n_j$ 之變異數分析	299

<b>第八章</b>	<b>三因子實驗(CR-abc)及相關問題之探討</b>	
	——因子實驗 (II) .....	303
8-1	序言 .....	303
8-2	CR-abc 設計之構造及分析 .....	304
8-2-1	固定效果模式 .....	304
8-2-2	隨機效果模式 .....	304
8-2-3	混合效果模式 .....	305
8-3	CR-abc 設計中 E(MS)之構造 .....	313
8-3-1	固定效果模式 .....	313
8-3-2	隨機效果模式 .....	315
8-3-3	混合效果模式 .....	315
8-4	CR-abc 設計中 Satterthwaite 檢定法之探討 .....	328
8-4-1	隨機效果模式 .....	328
8-4-2	混合效果模式 .....	331
8-5	CR-abc 設計中 F 檢定力之分析 .....	332
8-6	CR-abc 設計中 $n = 1$ 時須考慮之因素 .....	334
8-7	CR-abc 設計中交互作用顯著時之分析 .....	338
8-7-1	簡單單純主效果之探討 ( Simple Simple ME ) .....	338
8-7-2	簡單交互作用效果之探討 ( SIE ) .....	343
8-8	CR-abc 設計中交互作用效果不顯著時，誤差合併 問題之分析 .....	346
8-9	CR-abc 設計中 Satterthwaite 修正檢定法之探討 .....	349
<b>第九章</b>	<b>2<sup>r</sup> 因子實驗設計之探討 (r=3)</b> .....	351
9-1	序言 .....	351
9-2	2 <sup>3</sup> 設計之構造 .....	351
9-3	2 <sup>3</sup> 設計之變異數分析 .....	357

9 - 4	$2^3$ 設計之 Yates 計算方法	360
9 - 5	$n = 1$ 時之 $2^r$ 設計方法分析	361
9 - 6	$2^r$ 設計中尋求最佳因子配合之 Danie 方法	367
9 - 7	一般之 $2^r$ 設計構造 ( $r \geq 2$ )	369
<b>第十章</b>	<b><math>3^r</math> 因子實驗設計之探討 (<math>r=2</math> 及 <math>r=3</math>)</b>	<b>372</b>
10 - 1	序言	372
10 - 2	$3^2$ 設計之構造	372
10 - 3	$3^2$ 設計之變異數分析	373
10 - 4	$3^3$ 設計之構造	380
10 - 5	$3^3$ 設計之變異數分析	382
10 - 6	$3^2$ 設計之 Yates 計算方法	388
10 - 7	一般化之 $3^r$ 設計構造	392
10 - 8	因子實驗設計之優點及缺點	394
	參考文獻	396
	附 錄	402~434

# 第一章 一因子實驗(CR-r) 及平均數推論之探討

## 1-1 序言

資料之收集及分析在統計學應用上佔著一頁很重要之地位，尤其在從事實驗設計分析時更是不可或缺的一環，吾人在進行生產線、交通規劃、品質管制、醫藥控制、工程變異、農林土地種植實驗方面，資料的來源成爲首要的橋頭堡。有了資料之後，須對資料做合理地整理及歸納，然後配合分析人員所須之研究方案，進行實驗目的之分析及相關問題之探討，其中資料所配合的實驗過程，即爲分析者必須合理有效控制的一條管道。衆所皆知，從事一實驗分析必須經過一道程序，而實驗目的或正確性是否達到，程序的控制佔著很重要的因素，在統計學應用上，要把一實驗做得合理，須依據下列兩種基石(1)爲設計方法(2)爲統計分析。第一種設計方法其精神建立在(a)隨機化 ( randomization ) 及(b)重複數 ( replication ) 之應用上。隨機化及重複實驗純粹是實驗設計中的術語，要把一研究目的及資料配合得心應手，實驗的設計方法很重要，它對於研究的成效有一針見血及提高精確度的幫助，至於統計分析 ( Statistical Analysis ) 是在分析員擬定好一設計之後，爲了達到分析的便利及有效的結論而協助實驗過程的一種工具，其中涉及一些公式的導算，估計值的推證以及相關計算方法的設立，其主要目的是藉它來協助分析人員及決策者能迅速地推演及瞭解實驗的過程及結論的確立，以便做合理地抉擇，來建立有效地制度及決策。

實驗設計的方法衆多，其設計的目的是經由資料獲得合理地顯著性 ( significance )，提高實驗的精確度，降低實驗的誤差或變異，通常採用的設計有下列數種：

## 2 實驗設計—因子實驗及問題分析

- (1) 完全隨機設計 (以 CR 表示)
- (2) 隨機集區設計 (以 RB 表示)
- (3) 拉丁方格設計 (以 LS 表示)
- (4) \* 巢狀設計 (以 ND 表示)
- (5) \* 交絡設計 (以 CD 表示)
- (6) \*  $2^r$  及  $3^r$  設計
- (7) 互變異分析設計 (以 COD) 表示。
- (8) 不完全隨機集區設計 (以 UCRB 表示)
- (9) \* 拉提士設計 (以 LTD 表示)
- (10) \* 部份重複設計 (以 FR 表示)

上述的設計尚包含了迴歸分析的討論，主要的模式以(a)固定效果模式 (M I) (b)隨機效果模式 (M II) 及(c)混合效果模式 (M III) 貫穿全體設計，來做整體性的分析及探討，另外還分別以一因子、二因子及三因子個別加以討論，來研究其實用的可行性。在隨機集區設計方面尚討論抽樣樣本單位 (Subsampling) 之實驗。本書將首先針對完全隨機設計 (CR)， $2^r \cdot 3^r$  設計及 Nested 設計之實驗方法，就其意義，估計值模式之確立、 $E(MS)$  之推求、因子效果之分析、多重推論及實用效率上分別加以探討，尤其關於從事這些設計方面所易遭遇的問題逐文予以分析，至於其他設計將於後文再分別提出討論。

### 1—2 設計—實驗須注意之事項

- (1) 

基本元素：
-------

---

\* 巢狀設計——Nested Design。

\* 交絡設計——Confounding Design。

\*  $2^r$  及  $3^r$  設計—— $r$  表示因子， $2, 3$  表示水準數。

\* 拉提士設計——Lattice Design。

\* 部份重複設計——Fractional replication Design。

- (a) 實驗單位 ( 或被實驗者 ) —— 實驗或測度之對象。
  - (b) 因子 —— 不同狀況之型態或為一變數，通常分為一因子、二因子及多因子。例如價格 (  $X = 50, 60, 70$  元 ) 對銷售量  $Y$  之影響，價格即為一個因子。
  - (c) 因子水準 —— 因子出現時不同狀況之條件或為因子出現時之特殊形式 ( 所包含的數目 )。例如上例之價格 ( 50、60、70 元 )，即表示一因子中的三個水準。
  - (d) 處理 —— 不同因子水準之組合稱為一組處理，一因子中每一水準表示一組處理，二因子中若有 A、B 二因子，分別具有 a，b 個水準，則其處理數共有  $a \times b$  個，推廣之，三因子 A，B，C 中，其處理數為  $a \times b \times c$  個。
  - (e) 重複數 —— 一處理下之實驗單位數目稱為該處理之重複數。
  - (f) 隨機化 —— 為達到實驗之目的，使每一實驗單位皆能在合理且獨立地狀況下接受實驗時，所採用的一種程序稱為隨機化程序。
  - (g) 屬質變數 —— 或稱屬質因子，因為屬質歸因之不同且不能以量表示的因子稱之。例如廣告型態 ( 報紙、電視、廣播廣告 ) 即為屬質因子之例。
  - (h) 屬量變數 —— 或稱屬量因子，其因子水準可以用量表示者稱之。如價格 (  $X = 50, 60, 70$  元 )，溫度反應 (  $50^\circ F, 60^\circ F, 70^\circ F$  )。
- (2) **設計一實驗時，應注意之事項及步驟：**
- (a) 抉擇與調查或實驗有關連之因子及水準數。
  - (b) 抉擇合理之實驗單位及考慮應推定之範圍。
  - (c) 從成本之可用性及所須推定的精確度中以決定樣本大小之規劃。
  - (d) 最後一項也是最重要的一步是決定如何將處理指派至實驗單位上，然後依序給予實驗及測度。

## 4 實驗設計—因子實驗及問題分析

在從事實驗分析之先，須先按研究目的及調查資料予以抉擇能採用的因子數及水準數，若實驗方案已定，且資料之搜集便利，則因子及水準的釐定可以事先爲之，否則須依資料收集是否完整或便利做一合理地修正。至於實驗單位的取得，可依調查及實驗的對象爲之，儘可能地在成本及合理地範圍內選取，而且實驗單位的特性能事先予以控制，避免差異太大或缺失，若由於裝備之缺失或紀錄的錯失所造成觀察值的遺失，分析人員可依(1) Yates 估計法或(2)迴歸分析法予以推估，有了實驗單位之後，分析員可以依研究目的，決定估計值欲推定的步驟及範圍，在研究之先，事先做一合理地盤算。由於實驗都有一定的經費，而且推估也須有一定地精確度，事先分析人員可以據此做一謹慎地的核算，以決定應採用多少樣本數才能合乎研究之所須。有了(a)(b)(c)項步驟後，一切程序大略就序，最後一步可以隨機化之方式指派各種處理於實驗單位以從事測度及計算。隨機化的方式很多，隨著設計的不同而有所變更。大體上，分析人員可以依據附表之隨機亂數表 ( random numbers ) 設計。在採用(a)(b)(c)(d)項程序後，分析員可藉統計分析方法來研究分析及計算核對，最後即可依據數據從事各種分析及做成一序列的結論，以供決策者之參考，以釐定合理之政策及制度。

### 1—3 CR-r完全隨機設計模式之構造及分析

#### (一) 固定效果：

##### (a) 符號之建立：

$i = 1, 2, \dots, n_j$  (表示第  $j$  個因子水準之觀察值)

$j = 1, 2, \dots, r$  (表示研究之因子水準共有  $r$  個)

$n_j$  = 表示第  $j$  個因子水準之觀察值數目

$n_r$  = 表示觀察值總數

$$\text{其中： } n_r = \sum_{j=1}^r n_j$$

##### (b) 模式之建立

$$Y_{i,j} = \mu_{.j} + \varepsilon_{i,j} \quad (1.1)$$

或  $Y_{i,j} = \mu_{..} + \tau_j + \varepsilon_{i,j} \quad (1.2)$

由 (1.1) 及 (1.2) 式知  $\mu_{.j} = \mu_{..} + \tau_j$

$$\tau_j = \mu_{.j} - \mu_{..} \quad (1.3)$$

式中： $Y_{i,j}$  表示第  $j$  個因子水準或處理之第  $i$  實驗的對應變數值。

$\mu_{.j}$  表示參數 ( 常數值 )，第  $j$  個因子水準之母群體平均數。

$\varepsilon_{i,j}$  表示隨機誤差，獨立地服從  $N(0, \sigma^2)$ 。

$\tau_j$  表示第  $j$  個因子水準之因子效果，為第  $j$  個因子水準之母群體平均數與實驗平均數  $\mu_{..}$  之差異。

$\mu_{..}$  表示實驗平均數。

(c) 模式之性質：

(1) 第  $j$  個因子水準或處理之第  $i$  個實驗的觀察值  $Y_{i,j}$  是下列兩項之和：①常數項  $\mu_{.j}$  及②隨機誤差項  $\varepsilon_{i,j}$ 。

(2) 因  $E(\varepsilon_{i,j}) = 0$ ，所以：

$$E(Y_{i,j}) = \mu_{.j}$$

表示第  $j$  個水準所有的觀察值皆有相同的期望值  $\mu_{.j}$ 。

(3) 因為  $\mu_{.j}$  是常數項，所以：

$$\sigma^2(Y_{i,j}) = \sigma^2(\varepsilon_{i,j}) = \sigma^2$$

表示不論因子水準，所有觀察值皆有相同之變異數。

(4) 因為隨機誤差項  $\varepsilon_{i,j}$  服從常態分配，而  $Y_{i,j}$  為  $\varepsilon_{i,j}$  之線型函數，所以  $Y_{i,j}$  亦服從常態分配。

(5) 因隨機誤差項具有獨立性，所以  $Y_{i,j}$  具備獨立之性質。

(6) 綜合(1)至(5)模式 (1.1) 及 (1.2) 可以下列表示：



## 6 實驗設計—因子實驗及問題分析

$$Y_{ij} \text{ 獨立地服從 } N(\mu_j, \sigma^2) \text{ 或 } N(\mu_{..} + \tau_j, \sigma^2) \quad (1.4)$$

### (d) 分析之對象

- (1) 決定或檢定各因子水準之平均數是否相等或顯著性，因此研究之對象在  $\mu_j$ ， $j = 1, 2, \dots, r$
- (2) 若因子水準平均數不相等，再檢查何者因子水準間差異顯著，此差異之顯著性有何涵意，因此研究之範圍以因子效果之分解，單一區間之推定，多重區間之推定為基礎。
- (3) 研究之對象在各個母群體抽出之處理水準本身。

### (e) 假設之探討

#### (1) 誤差之獨立性

在(1.1)及(1.2)模式中假設每一處理內或所有處理間之誤差具獨立性。若實驗單位已經由隨機指派至各處理水準內或實驗內之變數具有隨機性時，亦可假設  $\varepsilon_{ij}$  具有獨立性。然而誤差獨立性之假設有時亦無法存在，譬如①在處理水準內之所有實驗者，若有一實驗單位在其他實驗單位之先接受實驗，或②某一組內之實驗單位接受一實驗者之實驗，但其他組內之實驗單位接受其他不同實驗者之實驗或③某組內之實驗單位在一實驗地區接受測定而其他組之實驗單位卻在不同實驗地區接受測定時，獨立性誤差之假設其存在性則降低。除了上述①②③項所提之因素外，有時分析人員為加強誤差獨立性假設之可行性，可增大誤差自由度對應之樣本數  $n_r - r$ ，換言之，即增強樣本重複數之實驗。

#### (2) 常態性

模式的第二項假設為每一處理母群體中之實驗誤差  $\varepsilon_{ij}$  服從常態分配，由於  $Y_{ij}$  間之變異來自  $\varepsilon$  誤差，所以對每一處理母群體言， $Y_{ij}$  亦服從常態分配，檢定常態性的簡易方法是依每一處理水準繪製直方分配圖，以判定其是否服從常態分配，而且由觀察法亦容易由圖形中看出是否偏離了常態