·数理统计丛书·

方开泰 编著

实用多元统计分析

华东师范大学出版社

数理统计丛书

实用多元统计分析

方开泰　编著

华东师范大学出版社出版

(上海中山北路 3663 号)

新华书店上海发行所发行

浙江上虞汤浦印刷厂排版　吴县光福印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：13.25　字数：350 千字

1989 年 9 月第一版　1989 年 9 月第一次印刷

印数：001—6 000 本

ISBN7—5617—0172—1/O·011

定价：3.60 元

总　　序

数理统计是一门应用性很强的学科。它是研究如何有效地收集、整理和分析受随机影响的数据，并对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取决策和行动提供依据和建议的一门学科。凡是有大量数据出现的地方，都要用到数理统计。人口调查、税收预算、测量误差、出生与死亡统计、保险业中赔款额和保险金的确定等，这些数理统计早期主要研究的问题，直到现在仍值得认真研究。建立在现代数学和概率论基础上的数理统计，在近半个世纪以来，在理论、方法、应用上都有较大的发展。抽样调查、试验设计、回归分析与回归诊断、多元分析、时间序列分析、非参数统计、统计决策函数、统计计算、随机模拟、探索性数据分析等统计方法相继产生并在实践中普遍使用，把以描述为主的统计发展到以推断为主的统计。今天，数理统计的内容已异常丰富，应用面广量大，成为当前最活跃的学科之一。

我国科技和经济的发展，需要大量的经过系统训练的数理统计专业人才。最近数年中，国家教育委员会已在一些高校先后设立各种统计专业，这将为我国数理统计发展开创新的局面。为了促进数理统计人才的培养，国家教育委员会于1984年召开了“数理统计教学座谈会”，会上交流了各校培养数理统计人才的经验，同时还指出，组织国内专家编写和出版一套数理统计专业的教材是当务之急。

我们认为，一本好的数理统计教材，首先应讲清统计思想与统计方法，所讲的理论应是在实践中有用的统计方法所必需的理

论，在阐明各种统计方法时，应给出足够的问题背景和有关的数据，能使学生对数理统计有一个系统、全面的认识，并培养学生对统计实践的兴趣。另外，文字流畅，带有趣味性，适合大学生阅读，当然也是一本好教材的必要条件。

鉴于国内对数理统计教材的急需，我们约请国内一些颇有造诣的专家，按照上述对教材的特定要求，编写了这套“数理统计丛书”，作为高等院校数理统计专业的基本教材，并将由华东师范大学出版社陆续出版。现在奉献给读者的《实用多元统计分析》，即为该丛书之一。我们希望，这套丛书能对我国数理统计事业的发展起到一定的促进作用，能成为我国年轻一代统计学家的引路之石。

茆诗松

1986年11月于华东师范大学

前　　言

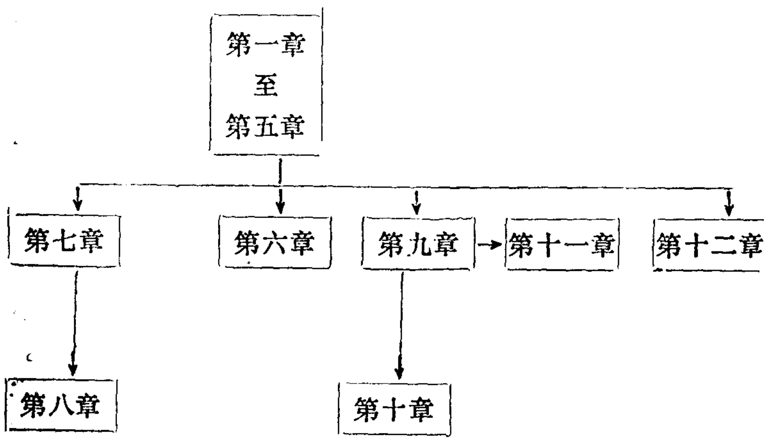
我国自70年代以来，多元分析受到各领域的极大关注，取得了一大批有说服力的应用成果，理论工作者也做出了不少高水平的论文，有的方面赶上了国际水平。在这个形势的鼓舞下，许多高等院校开设了多元分析这门课程，不少实际部门也组织了多元分析的讲习班，这些活动都迫切需要有一本合适的教材。

张尧庭同志和我曾于1982年编著了《多元统计分析引论》[3]一书，该书出版后曾被许多高等学校作为教材。实践证明，该书作为以多元分析为研究方向的研究生的教材是合宜的，对其他同志来讲则份量过重。为此需要一本能在一学期内教授的面向一般大学生和研究生的教材。1984年在华东师范大学召开的学科带头人小型学术会上，决定出版一套数理统计教材，本书就是其中的一本。

已出版的多元分析书籍在全世界已有几十种之多，它们基本上分成两类，一类偏于理论，一类偏于应用，少数理论和应用兼顾。针对我国的情况，本书想兼顾理论和应用两个方面。由于多元分析的内容十分丰富，如何适当取材不是一件很容易的事，为此作者参考了许多书籍，决定如下的取材原则：(1) 对于基本概念和基本方法给予仔细的介绍和详细的证明，而对于非基本的内容，大多只叙述结果而不给予论证；(2)多元分析的许多方法，如回归分析、判别分析、聚类分析、主成分分析、因子分析等，在数据分析中非常有用，而每一种方法内容又十分丰富，都可以单独成书，我们只选择这些方法的最基本内容，读者熟悉了这些内容之后，不难去理解进一步的理论和方法；(3)多元分析的计算有一套巧妙的方法，如果详细介绍这些方法，篇幅很长，故我们仅仅介绍最基本的内容，有的甚至没有给予证明，但读者读完本书后，会应用多元分析的各

种方法进行计算，对于更深入的内容，可查我们介绍的文献；(4)多元分析中的新方法、新理论不断涌现，我们在力所能及的范围内有选择地加以介绍。上述选材原则是否恰当，恳请广大读者提出宝贵意见。

本书的前五章是基本的，在读完前五章后，可以有选择地阅读后面的章节。下面是一个参考的框图。



在教学中，也不是每一章内的所有节都要讲的，教员可根据所在学校的性质有选择地讲解，或者只介绍内容不给予证明，把教学的重点放在给学生建立统计思想上。在每章的末尾，我们附有部分练习，希望读者尽可能地多做一些练习。

本书的绝大部分内容曾向中国科学院应用数学研究所和中国现场统计学会的研究生讲授过，也应邀为瑞士的 Swiss Federal Institute of Technology 的博士研究生开过课。这些教学活动使本书的初稿有许多改进和修改。

本书的顺利完成和出版，一直得到华东师范大学数理统计系和华东师范大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。相应分析一节是请柯煌博士执笔的，她多年来从事相应分析的研究，对她

的大力协助深表谢意。此外，许秀兰同志绘制了书中的全部插图，很感谢她的辛勤劳动。为了使本书的教学效果更好，书中的部分材料取自有关的参考书籍。特别是数值例子，为了照顾典型性，选用参考书中的情况更多，在此向有关的作者表示歉意和感谢。

由于水平有限，书中误讹之处在所难免，欢迎读者批评指正。

中国科学院应用数学研究所　方开泰

1986年12月于北京

目　录

第一章 矩阵代数

矩阵代数是多元分析的重要工具，本书的大部分章节都需要矩阵代数的知识。虽然绝大多数读者已有矩阵代数的基础，但为了学习的方便，本章对必要的知识作一个简单的回顾。鉴于多元分析的特殊需要，本章的有一些内容并不是在每本矩阵代数的教科书中都能找到的。

本章介绍矩阵、行列式、逆、广义逆、特征根和特征向量的定义和性质，讨论矩阵的分块、因子分解、拉直运算、叉积以及矩阵的微商等。

§1.1 定　　义

将 np 个实数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{np}$ 排成一个方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{np} \end{pmatrix},$$

则称 A 为 $n\times p$ 矩阵，常记作 $A=(a_{ij})$，表示 a_{ij} 是 A 的元素。$\{a_{ij}\}$ 也可以是复数，由于本书的 $\{a_{ij}\}$ 均为实数，故以后如不作特别声明，所讨论的矩阵均为实数。当 $n=p$ 时，A 称为 n 阶方阵。若 $p=1$，A 只有一列，称为列向量，为了使记号区别于矩阵，记作

$$a=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}。$$

当 $n=1$ 时，A 只有一行，称为行向量，记作

$$a'=(a_{11},\cdots,a_{1p})。$$

若 A 的元素全为零，A 称为零矩阵，记作 $A=0$。若 A 为方阵，a_{11}，$\cdots$，a_{nn} 称为它的对角线元素，其它元素 $\{a_{ij},\ i\neq j\}$ 称为 A 的非对角元素。若方阵 A 的非对角元素全为零，称 A 为对角阵，简记成

$$A=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn}),$$

进一步，若 $a_{11}=\cdots=a_{nn}=1$，称 A 为 n 阶单位矩阵，简记成 $A=I_n$ 或 $A=I$（若 I 的阶数从上下文是明确的）。

若 A 为 $n\times p$ 阵，它的转置 A' 是 $p\times n$ 阵，是将 A 的行(列)变成列(行)而得到的，即

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1}\\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2}\\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots\\ a_{1p} & a_{2p}\cdots a_{np}\end{pmatrix},$$

因此，行向量的转置是列向量，列向量的转置是行向量。

若 A 是方阵，且 $A'=A$，则称 A 为对称阵；若 $A'=-A$，则称 A 为斜对称阵。显然，斜对称阵的对角元素必为零。若方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素 $a_{ij}=0$ 对一切 $i<j$ 成立，则称 A 为下三角阵。若 A' 为下三角阵，则称 A 为上三角阵。显然，既是上三角阵又是下三角阵的方阵必为对角阵。下面是一些简单的例子用以说明上述的定义：

$$\begin{pmatrix}6&5&3\\2&1&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}\qquad(2,2,4,3)$$

2×3 矩阵　3×2 零矩阵　3 维列向量　4 维行向量

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(2,1,4), \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

3 阶对角阵　　　　　　2 阶单位阵

若

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

则

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}。$$

又有

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ +1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3 阶对称阵　　　　　　3 阶反对称阵

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

下三角阵　　　　　　上三角阵

下面定义矩阵的一些运算。

若 A 和 B 是 $n\times m$ 阵，则 A 和 B 的和定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij});$$

若 α 为一常数，它和 A 的积定义为

$$\alpha A=(\alpha a_{ij});$$

若 A 和 B 分别为 $p\times q$ 和 $q\times r$ 阵，则 A 和 B 的积定义为

$$AB=(\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj})。$$

容易验证，上述三个运算符合如下的规律：

$$A+(-1)A=\mathbf{0},$$
$$(AB)'=B'A',$$
$$(A')'=A,$$
$$(A+B)'=A'+B',$$
$$A(BC)=(AB)C,$$
$$A(B+C)=AB+AC,$$
$$(A+B)C=AC+BC,$$
$$AI=IA=A,$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$
$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)。$$

方阵 A 称为正交的，若 $A'A=AA'=I$。方阵 A 称为幂等的，若 $A^2=A$。对称的幂等阵称为投影阵。例如：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

正交阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

投影阵　　　　幂等阵

若 a 是一个p维列向量，易见 $a'a$ 是一个数，而 aa' 是一个 p 阶方阵。

设 $A=(a_{ij})$ 为 $p\times q$ 阵，将它分成四块，使得 $A_{11}: k\times l$，$A_{12}:k\times(q-l)$，$A_{21}:(p-k)\times l$，$A_{22}:(p-k)\times(q-l)$，且

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}。 \tag{1.1}$$

若 A 和 B 有相同的分块，则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}。$$

若 C 为 $q\times r$ 阵，它分成

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

其中，$C_{11}:l\times m$，$C_{12}:l\times(r-m)$，$C_{21}:(q-l)\times m$，$C_{22}:(q-l)\times(r-m)$。则由矩阵乘法的定义可以验证有如下等式：

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}C_{11}+A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12}+A_{12}C_{22} \\ A_{21}C_{11}+A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12}+A_{22}C_{22} \end{pmatrix}。\end{aligned}$$

这就是说，可以把每个块看成一个“元素”，A 和C 看成“2×2 矩阵”，然后用通常矩阵的乘法去进行，就得上式的右端。

§1.2 行列式、逆和秩

一、行列式

若 A 为 p 阶方阵，记

$$|A|=\sum_{\pi}\varepsilon_{\pi}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p},$$

其中 $(j_1,\cdots,j_p)$ 为 $(1,\cdots,p)$ 的任一置换，Σ_π 是对可能的 $p!$ 个置换求和，$\varepsilon_\pi=1$ 或 -1 相应地取决于偶置换或奇置换。$|A|$ 称为 A 的行列式。

由行列式定义来计算行列式是颇为复杂的，通常我们利用如下的一些办法来计算行列式：

(i) 若 A 的某行(或列)为零，则 $|A|=0$。

(ii) $|A|=|A'|$。

(iii) 将 A 的某行（或列）乘以数 α 所得矩陈之行列式等于 $\alpha|A|$，由此得

$$|\alpha A|=\alpha^p|A|。$$

(iv) 若 A 的两行(或列)恒等，则 $|A|=0$。

(v) 若将 A 的两行（或列）互换，所得矩阵之行列式 $=-|A|$。

(vi) 若将 A 的某一行(或列)乘上一个常数后加到另一行相应的元素上，所得矩阵的行列式等于 $|A|$。

下面的一些性质是经常会用到的：

(1) 若 $A_1,\cdots,A_k$ 是 p 阶方阵，则

$$|A_1A_2\cdots A_k|=|A_1||A_2|\cdots|A_k|，$$

即方阵乘积的行列式等于它们行列式的乘积。

(2) 若在分块矩阵 (1.1) 中，$A_{12}=0$ 或 $A_{21}=0$，则

$$\left|\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right|=|A_{11}||A_{22}|。$$

(3) 设 A 和 B 分别为 $p\times q$ 和 $q\times p$ 阵，则

$$|I_p+AB|=|I_q+BA|。\tag{1.3}$$

(4) 若 A 为正交阵，则 $|A|=\pm1$。

(5) 若 A 为三角阵(上三角或下三角)，则

$$|A|=\prod_i a_{ii},\tag{1.4}$$

即 A 的行列式等于其对角元素的乘积。