数学分析

（下册）

严子谦 崔志勇 编

吉林大学出版社

数学分析

（下册）

严子谦　崔志勇　编

吉林大学出版社

数 学 分 析

（下册）

严子谦　崔志勇　编

责任编辑：赵洪波　　　　封面设计：张沭沅

吉林大学出版社出版　　　　吉林省新华书店发行
（长春市解放大路85号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　　　1989年4月第1版
印张：12.875　　　　1989年4月第1次印刷
字数：319千字　　　　印数：1-1 500册

ISBN 7-5601-0228-X/O·39　　　定价：2.80元

前　　言

进入80年代以来，随着教学改革的逐步深入，许多学校都已把讲授“数学分析”这一课程的时间，从两年缩短到一年半，而且对教学内容的改革，也提出了许多设想。我们所在的吉林大学也不例外。不仅从1983年开始将数学分析的讲授时数从 260 学时减少到 200 学时，而且改革教学内容的要求也很强烈。大家比较一致的看法是：一元函数的微积分学和无穷级数论部分的内容仍基本适用；而多元微积分部分则应有较大的变化，才能使之反映较近代的思想与观点。这样，原有的教材就已不能适应当前教学的需要了。现在这套《数学分析》就是在这种形势下产生的，它基本上是编者在吉林大学数学系讲授这门课时所使用的讲义。

这套《数学分析》分上、下两册（上册已于1988年 9 月由吉林大学出版社出版）．上册包括一元函数的微积分学、无穷级数论及作为其理论基础的极限论、连续函数的性质等内容。如不讲授 Fourier 级数部分，可以在 105 左右学时完成。（在吉林大学数学系，Fourier 级数理论放在“实变函数”课中讲授。）下册包括多元函数的微积分学、广义积分及含参变量的积分等内容。删去作为学生课外阅读的个别小节及最后一章“流形与 Stokes 公式”以后，我们这几年都是用 90 左右个学时来完成这部分教学内容的。

就内容来说，上册同我们以前曾参与编写的由高等教育出版社出版的《数学分析》的相应部分，没有很大的出入，但对内容的编排处理上却有较大的变化。1959年我们参与编写的那套教材完全是按逻辑顺序展开的。实践说明这种安排教起来方

便，但学起来困难。特别是要求学生在学习微分学以前，就完全掌握极限论的论证方法，这一点实际上对相当多学生难以做到，从而成了学习数学分析的“拦路虎”。1978年以吉林大学数学系名义分上中下三册出版的《数学分析》，改变了这种作法，贯彻了“分两步走”的思想。上册中基本上只有直观的极限概念，到中册才严格处理极限理论。但使用者普遍反映，上、中册之间跨度太大。这次我们尝试了一种新的作法：把极限论论证方法的训练，分散在整个一元微积分和无穷级数论的教学过程中，把知识传授与论证能力的训练更好地融合起来，对学生的要求是逐步提高的。几年来的实践证明，这种作法比较稳妥，绝大部分学生都能较平稳地学习，既掌握了教学中讲授的基本内容，也初步学会了极限论的论证方法。

由于绝大多数学生在中学阶段虽学过数列的极限但又并没有掌握“ε-N”论证法，所以我们在一开始就引用了少量数列极限的知识，但是我们并不真将数列极限理论作为进一步学习的基础与出发点。按现在这套教材的安排，学生的极限论论证能力的训练，实际上是从“ε-δ”方法开始而到第五章讲授无穷级数时才完成的。为了减少初学者的困难，我们将个别不易掌握的内容，如Cauchy准则等的证明，有意识地延后了。

上册部分增加了有关凸函数和不等式的某些内容，而对不定积分和初等函数的导数计算的内容则有所削减。我们这样作的原因是不言自明的。

下册部分不论是内容还是题材处理上都和我们过去参与编写过的两套《数学分析》有较大的不同。我们从讨论多元实值函数过渡到了讨论从n-维欧氏空间R_n到m维欧氏空间R_m的映射，并以映射的观点来统辖整个多元微分学。在这一部分，我们介绍了微分同胚的概念，引入了压缩映射原理，并用以处理反函数和隐函数问题。另外，作为补充材料，还介绍了在各方面有重要应用的秩定理和Morse引理。关于多元积分学部

分，我们的指导思想是简化处理、减少重复、强调计算。有些在学过“实变函数”后自然会清楚的问题，此处尽量避免纠缠。所以对重积分变量替换、曲面面积概念等都没有去追求论证的严密和体系的完整。由于我们同时给出了几种不同的积分（二重、三重、n重、面积分、线积分）的定义，并统一地讨论了它们的性质，这就避免了过去那种多次重复类似讨论的弊病。在处理广义积分时，我们采用了B.A.Зорич《数学分析》中的处理方法。将无穷积分和瑕积分写成统一的形式 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 而合并讨论。其目的也是为了避免不必要的重复。另外，我们把广义积分和含参变量的积分合在一章内并尽量和无穷级数理论相对照来讨论。我们觉得这样作既有利于学生融会贯通这两部分内容，也有利于用函数级数的结果来讨论含参变量积分的相应定理，以节省篇幅和减弱条件，使之更便于应用。

本书的部分内容，特别是有关Fourier级数理论的第五章，是从编者参与编写的1978年由人民教育出版社出版的《数学分析》中移植过来的，特此说明。

编　者

1989年4月

目　录

第七章　多元函数与映射的极限和连续性

到目前为止，我们已经研究了一元函数的微积分。一元函数，只能用于研究仅仅依赖于一个因素的问题。但是在很多问题中，我们要研究的量不仅依赖于一个因素，而且依赖于很多因素。例如，很多物理量就依赖于点的空间坐标 x,y,z 和时间 t。因此，我们要研究多元函数和映射。

§1　多元函数与映射

我们先看几个例子。

例1　矩形的面积

$$S=xy$$

此处 x 和 y 分别为矩形的长和宽，它们为两个独立的变量。

例2　在通常的条件下，气态方程为

$$p=\frac{RT}{V}$$

此处 p,V,T 依次代表气体的压强、体积、温度，R 是常数。这里 T 和 V 是独立的变量，如果知道它们的值，那么根据气态方程，我们就能唯一地确定一个 p 值。

例3　河里的水在每一点 (x,y,z) 处的速度

$$\boldsymbol{v}=(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z))$$

这里点 (x,y,z) 处的速度 $\boldsymbol{v}$ 不是一个数，而是一个向量，即数组，也就是说，如果知道 x,y,z 的值，那么我们就能唯一地确定一个数组 (v_1,v_2,v_3)。

下面我们来给出多元函数的定义。我们用 R_n 表示全体 n 元有序实数组所构成的集合。如果赋予 R_n 代数结构，即对任意的 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2\in R$，规定

$$\lambda_1X+\lambda_2Y=(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1,\lambda_1x_2+\lambda_2y_2,\cdots,\lambda_1x_n+\lambda_2y_n)$$

则 R_n 成为 n **维向量空间**，其中元素叫 R_n 中的**点**或**向量**。我们有时把 R_n 中的集合叫作**点集**。

定义1 设 $\mathscr{D}$ 是 R_n 中的一个集合，如果对于 $\mathscr{D}$ 中每一个点 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，按照某一确定的对应关系，都恰有一个数 u 和它对应，我们就说 u 是 X 的 n **元函数**，记作

$$u=f(X) \text{ 或者 } u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫**自变量**，u 叫**因变量**，$\mathscr{D}$ 叫函数的**定义域**，集合

$$\mathscr{R}=\{u;u=f(X),X\in\mathscr{D}\}$$

叫函数的**值域**。

在例 1 中，x 和 y 是自变量，S 是 x 和 y 的二元函数，其定义域是 xy 平面的第一象限。在例 2 中，T 和 V 是自变量，p 是 T 和 V 的二元函数。

例4 对于函数

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2}+xe^{\sin y}+y\cos x$$

它的定义域为

$$\{(x,y);x^2+y^2\leqslant1\}$$

即 xy 平面上的单位圆。

现在我们研究二元函数的几何表示。对于函数

$$u=f(x,y),\qquad (x,y)\in\mathscr{D}$$

引进空间直角坐标系 xyu。当点 $M(x,y)$ 跑遍定义域 $\mathscr{D}$ 时，相应的点 $P(x,y,f(x,y))$ 所构成的集合就是函数 $u=f(x,y)$ 的几何图形，我们通常称它为**曲面**（见图 1）。

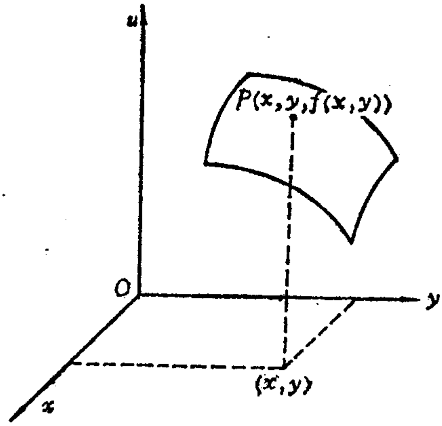

图 1

我们在例 3 中所研究的速度 v 不是一个多元函数，而是一组函数。为了对与此类似的情形给出一个统一的精确的数学描述，我们有必要将多元函数的定义加以拓广。

定义 2 设 $\mathscr{D}$ 是 R_n 中的一个点集，如果对于 $\mathscr{D}$ 中的每一个点 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，按照某一确定的对应关系，都恰有 R_m 中的一个点 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 和它对应，我们就说 U 是 X 的**映射**，记作

$$U=F(X)$$

或者

$$\begin{aligned}&(u_1,u_2,\cdots,u_m)\\&=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\\&\quad f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

$\mathscr{D}$ 叫映射的**定义域**，集合

$$\mathscr{R}=\{U;U=F(X),X\in\mathscr{D}\}$$

叫映射的**值域**。

我们有时将上述映射 $U=F(X)$ 记作 $F: \mathscr{D}\to R_m$（若 R_m 中的点集 E 包含 F 的值域 $\mathscr{R}$，我们也记 $F: \mathscr{D}\to E$），而将定义 1 中的多元函数 $u=f(X)$ 记作 $f: \mathscr{D}\to R$。

例 5 映射 $L: R_n\to R_m$ 叫**线性映射**，如果对于任意的 $X_1,X_2\in R_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2\in R$，都有

$$L(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)=\lambda_1L(X_1)+\lambda_2L(X_2)$$

线性映射是最基本和最常见的映射。关于线性映射的基本的代数性质，在线性代数教程中有详尽的叙述。

例 6 假设在空间取定了一个直角坐标系 xyz，在定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处放置一个带正电量 q_0 的点电荷，在空间任一点 $P(x,y,z)$ 处的单位正电荷将受到一个力的作用，这个力的大小为 $\frac{q_0}{r^2}$，方向为 $\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right)$，此处

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

即

$$F(x,y,z)=\frac{q_0}{r^2}\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right)$$

$$=\left(\frac{q_0(x-x_0)}{r^3}, \frac{q_0(y-y_0)}{r^3}, \frac{q_0(z-z_0)}{r^3}\right)$$

这里 F 是一个映射，它的定义域是 $\mathscr{D}=\{(x,y,z);\ (x,y,z)\in R_3$，且 $(x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0)\}$，也就是说 $F: \mathscr{D}\to R_3$。

有一类特殊的但很重要的映射，其定义域是全体自然数的集合 N。按定义 2，每给一个这类映射是指给一个对应关系，使得对每个自然数 n，都恰有一个点 $U_n\in R_m$ 与它对应。我们将这种以 N 为定义域的映射称为 R_m 空间中的点列，并且记为 $\{U_n\}$，或者记为

$$U_1,U_2,\cdots,U_n,\cdots$$

习　　题

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

(2) $u=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$

(3) $u=\ln(9-x^2)+7\sqrt{y^2-4}+e^z$

2. 设函数

$$f(x,y,z)=\frac{3xy}{x^2+y^2+z^2}$$

试求：

(1) $f(0,1,-2)$　　(2) $f\left(1,\dfrac{1}{x},\dfrac{z}{y}\right)$

3. 设函数

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\qquad(x>0)$$

求 $f(x)$。

4. 试求将 xy 平面映为单位圆 $\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$ 的映射。

5. 试求将 xy 平面映为直线 $y=2x$ 的映射。

§2　多元函数与映射的极限

多元函数与映射的定义域和值域都是有限维向量空间中的集合，为了研究多元函数和映射的极限就必须在有限维向量空间中引进范数、两点间的距离和邻域等概念。换句话说，仅赋予 R_n 代数结构是不够的，还必须赋予 R_n 拓扑结构。

对于 R_n 中的任意一对向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=$

$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，称

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

为 X 和 Y 的**内积**；对于任意的 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_n$，称

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

为 X 的**范数**。规定了内积（从而也规定了范数）的空间 R_n 叫 Euclid 空间。此时我们也说赋予了 R_n 一个 Euclid 结构。

对于任意的 X，$Y \in R_n$，我们有

$$|X \cdot Y| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\| \qquad \text{(Cauchy 不等式)}$$

和

$$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\| \qquad \text{(三角不等式)}$$

我们称 $\|X-Y\|$ 为 X，$Y \in R_n$ 间的距离。由上面的三角不等式，对于任意的 $X, Y, Z \in R_n$，我们有

$$\|X-Z\| \leqslant \|X-Y\| + \|Y-Z\|$$

这也称为三角不等式。三角不等式表示的是这样一个事实：三角形任意两边长度之和大于第三边长度。

我们可以把 m 行 n 列的实矩阵看作 mn 元列（或行）向量。对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

为 A 的**范数**。容易证明

1） $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

2） $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$

上述的关于 Euclid 空间的知识请读者参阅线性代数教程（如谢邦杰编：《线性代数》，人民教育出版社）。

下面引进邻域和聚点的概念。

设 $X_0\in R_n$ 和 $\delta>0$，称点集

$$B(X_0,\delta)=\{X;\|X-X_0\|<\delta\}$$

为以 X_0 为心以 δ 为半径的**球**，或 X_0 的**邻域**。

以后凡说在 X_0 附近，指的就是在 X_0 的某个邻域内。

定义 1 设 E 为 R_n 中的点集，$X_0\in R_n$。我们说 X_0 是点集 E 的**聚点**，如果 X_0 的任何邻域中都含有 E 中的无穷多个点。

容易证明：如果在 X_0 的任何邻域中都含有 E 中的异于 X_0 的点，则 X_0 为 E 的聚点。

定义 2 设 $\mathscr{D}$ 是 R_n 中的点集，$f(X)$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上的函数，X_0 是 $\mathscr{D}$ 的聚点，a 是一个常数。如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $X\in\mathscr{D}$ 且 $0<\|X-X_0\|<\delta$ 时，便有

$$|f(X)-a|<\varepsilon$$

我们就说当 $X\to X_0$ 时，函数 $f(X)$ 以 a 为**极限**，记作

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=a$$

或者

$$f(X)\to a \quad （当 X\to X_0 时）$$

关于多元函数极限的运算，我们有下面的结果。

定理 1 设 $\mathscr{D}$ 是 R_n 中的点集，$f(X)$ 和 $g(X)$ 都是定义在 $\mathscr{D}$ 上的函数，并且 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$，$\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ 都存在，则

1） $\lim\limits_{X\to X_0}[f(X)+g(X)]=\lim\limits_{X\to X_0} f(X)+\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$

2） 对于任何常数 C，

$$\lim_{X\to X_0} C\cdot f(X)=C\cdot\lim_{X\to X_0} f(X)$$

3) $\lim\limits_{X \to X_0} [f(X)g(X)] = \lim\limits_{X \to X_0} f(X) \cdot \lim\limits_{X \to X_0} g(X)$

4) 如果 $\lim\limits_{X \to X_0} g(X) \neq 0$，则

$$\lim_{X \to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\lim\limits_{X \to X_0} f(X)}{\lim\limits_{X \to X_0} g(X)}$$

5) 设 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$，并且对于 X_0 附近的 $\mathscr{D}$ 中的点 $X \neq X_0$ 时，$u = f(X) \neq a$；又设 $\varphi(u)$ 在 $f(X)$ 的值域上有定义，且 $\lim\limits_{u \to a} \varphi(u) = b$，则

$$\lim_{X \to X_0} \varphi[f(X)] = b$$

这个定理的证明与一元函数情形几乎完全相同，我们把它留给读者自己完成。

例 1 求极限

$$\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \frac{5x^2 + y^2}{xe^x + \sin y}$$

注意

$$\lim_{(x, y) \to (1, 0)} x = 1, \qquad \lim_{(x, y) \to (1, 0)} y = 0$$

故由定理 1 便可得到

$$\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \frac{5x^2 + y^2}{xe^x + \sin y} = \frac{\lim\limits_{(x, y) \to (1, 0)} (5x^2 + y^2)}{\lim\limits_{(x, y) \to (1, 0)} (xe^x + \sin y)}$$

$$= \frac{5}{e}$$

例 2 证明 $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \sqrt[3]{xy} = 0$

因为 $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，故

$$|\sqrt[3]{xy}| \leqslant \sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

对于任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{2\varepsilon^3}$，则当$\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$时，

$$|\sqrt[3]{xy}|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0$

为简便起见，今后很多定理的叙述和证明都针对二元或三元函数进行。至于一般的n元函数，相应的结果也都是成立的。

对于一元函数$f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$的充要条件是当$x$从$x_0$的右侧和左侧趋于$x_0$时$f(x)$的极限都存在且等于$a$。对于二元函数$f(x,y)$，那就复杂得多了，因为$xy$平面上的点$(x,y)$趋于点$(x_0,y_0)$的路径有无穷多个。不过，我们还是有下面的结果。

定理 2 设$f(x,y)$是(x_0,y_0)的某个邻域$\mathscr{D}$上的函数(在(x_0,y_0)处$f(x,y)$可以没有定义），则$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$的充要条件是当点$(x,y)$沿任意一条连续曲线趋于点$(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$趋于$a$。

证明 先证必要性。设

$$x=x(t),\quad y=y(t)\qquad (\alpha<t<\beta$$

是$\mathscr{D}$中的一条连续曲线，$(x(t),y(t))\neq(x_0,y_0)(\alpha<t<\beta)$，且

$$\lim_{t\to\alpha}x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to\alpha}y(t)=y_0 \tag{1}$$

定理所要证明的，其实就是

$$\lim_{t\to\alpha}f[x(t),y(t)]=a$$

对于任意的$\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$知道，存在$\eta>0$，使得当$(x,y)\in\mathscr{D}$且$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\eta$时，便有