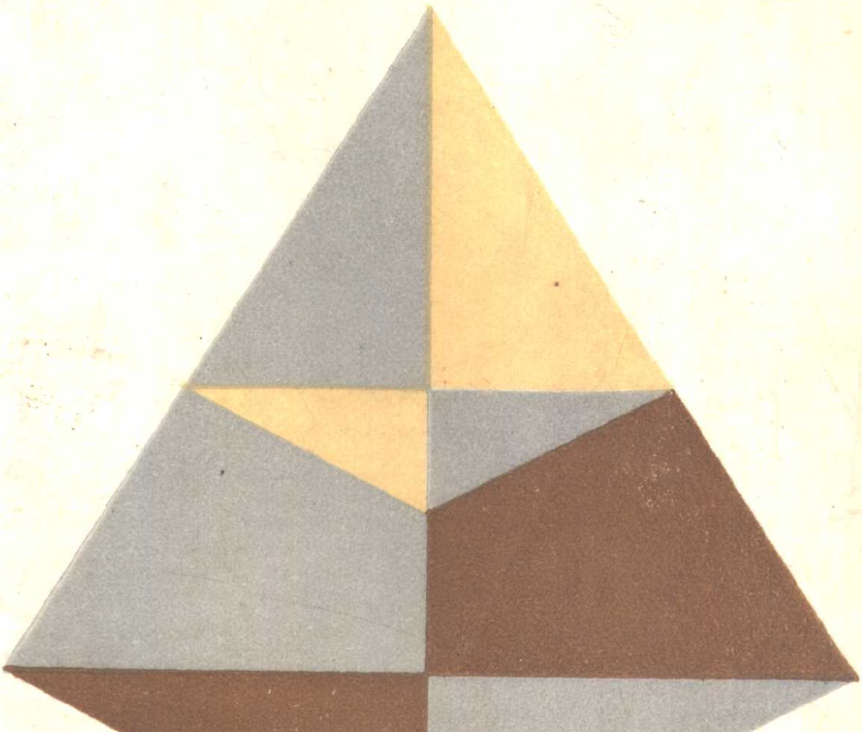
中专数学的例题与习题

辽宁省中专数学教材编写组　编



高等教育出版社

中专数学的
例题与习题

辽宁省中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

（京）112号

本书中汇集的例题和习题的内容，覆盖了中专数学教学大纲所要求的知识面．全书共分24章，每章由例题与习题两部分组成，书末附习题答案．

本书从基础知识和基本技能着手，在于提高学生的理解力、逻辑思维能力和运用基础知识、基本规律解决问题的能力，读者可以在中专各专业学习数学时同步使用．

本书是中等专业学校学生和教师的一本有用的参考书．

中专数学的例题与习题

辽宁省中专数学教材编写组　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国青年出版社印刷厂印装

*

开本787×1092　1/32　印张19.125　字数420 000

1994年5月第1版　1994年5月第1次印刷

印数0001—54 605

ISBN 7-04-004698-9/O·1328

定价7.45元

前言

本书依据国家教育委员会1991年8月颁布的中等专业学校数学教学大纲(第3版)精神，由辽宁省部分中等专业学校长期从事数学教学的高级讲师，针对中等专业学校数学教学的特点，结合多年的实际教学经验编写的。

数学是自然科学的基础。对中等专业学校来说，它既是各专业的重要基础课，又是重要的工具课。为适应中等职业教育的发展，促进教学质量的提高，满足学生学习的需要，我们编写了《中专数学的例题与习题》。本书用典型例题介绍解题方法，帮助读者在学习中总结规律、开拓思路。

本书共二十四章，1—18章为基础部分、19—24章为应用部分.可供中等专业学校数学教师教学参考和学生学习使用。

本书由李大发同志主编、蔡恒利、马骥、王化久、李玉臣等同志为副主编。参加编写的有：张洪强、梁晓俐、王富强、隋振喜、刘静、张娟、张黎明、白景富、唐守宪、高春、孙成喜、郑素梅、周玉萍、李海英、薛吉伟、李学之、裴银淑、钟启富、王剑、高如梅、雷秀珍、黄俊杰、朱明刚、郭晓芸、孟繁杰、孙继恒、纪书立等同志。北京市供销学校贝虹同志对全书进行了认真详尽的审阅，辽宁省中专数学课程组马庆武。贾景华、王仁成、张淑华等同志为本书编写做了大量的工作，在这里一并表示感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编者

1993年12月

目　录

第一章　集合与函数

一、例题

例1　某班有男生23人，女生27人，其中共青团员45人．试按集合的意义说明下述人员能否组成一个集合：

（1）全班男学生；　（2）全班团员；

（3）全班聪明学生；（4）全班胖子．

解　（1）能组成集合．因为根据"男同学"这一特定性质，班里每一个"男同学"都是这个集合的元素．

（2）能组成集合．因为根据"团员"这一特定性质，班里每一个"团员"都是这个集合的元素．

（3）不能组成集合．因为"聪明"概念不十分明确，不能作为一个确切的标准去判断每个学生是否"聪明"；

（4）类似于（3），不能组成集合．

例2　方程组$\begin{cases}2x+3y=13,\\3x-2y=0\end{cases}$的解集为

（1）$\left\{\text{方程组}\begin{cases}2x+3y=13,\\3x-2y=0\end{cases}\text{的解集}\right\}$；

（2）$\{x=2,\ y=3\}$；　　（3）$\{2,\ 3\}$．

问以上三种表示方法是否正确？为什么？

解　上述三种表示方法均不正确．

（1）用描述法表示集合时，在花括号{　　}内只写元素的共同性质，不能在花括号{　　}内写成具有某种性质的

元素的集合；

（2）$\{x=2,\ y=3\}$表示以方程 $x=2$，$y=3$ 为元素的集合，不表示方程组$\begin{cases}2x+3y=13,\\3x-2y=0\end{cases}$的解集；

（3）$\{2,\ 3\}$表示元素为 2，3 的集合，不是本例要求的解集.

例 2 中方程组的解集应表示为

（1）$\left\{\text{方程组}\begin{cases}2x+3y=13,\\3x-2y=0\end{cases}\text{的解}\right\}$；

（2）$\{(x,\ y)\mid x=2,\ y=3\}$；　　（3）$\{(2,\ 3)\}$，

其中（3）为常用表示方法.

例3　用集合的术语表示"不大于10的正偶数所组成的集合".

解　常用的表示方法为：

（1）列举法：$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$；

（2）描述法：

① ｛不大于10的正偶数｝；

② $\{x\mid 0<x\leqslant 10,\ x\text{ 为偶数}\}$；

③ $\{x\mid x=2n,\ 1\leqslant n\leqslant 5,\ n\in Z\}$；

④ $\{2n\mid 1\leqslant n\leqslant 5,\ n\in N\}$.

上述各种表示方法，可根据问题需要选用其中一种.

例4　试判断下列元素是否属于有理数集 Q？

（1）$\frac{1}{3}$；　　（2）$\sqrt{3}$；　　（3）π；（4）3.1416.

解　（1）$\frac{1}{3}\in Q$；

（2）$\because$ $\sqrt{3}$为无理数，$\therefore$ $\sqrt{3}\notin Q$；

（3）$\because$ π为无理数，$\therefore$ $\pi\notin Q$；

（4）$3.1416\in Q$。

例 5 设集合$A=\{a+b\sqrt{6}\mid a\in Q,\ b\in Q\}$，试判断下列元素是否属于$A$？

（1）$-1-\sqrt{6}$；　　（2）$\sqrt{2}+\sqrt{6}$；

（3）$5+\sqrt{5}\sqrt{6}$；　　（4）$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$。

解 （1）$\because$ $a=-1\in Q$，$b=-1\in Q$，

$$\therefore\ -1-\sqrt{6}\in A;$$

（2）$\because$ $a=\sqrt{2}\notin Q$，

$$\therefore\ \sqrt{2}+\sqrt{6}\notin A;$$

（3）$\because$ $b=\sqrt{5}\notin Q$，

$$\therefore\ 5+\sqrt{5}\sqrt{6}\notin A;$$

（4）$\because$ $(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})^2=6$，且

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}>0,$$

$$\therefore\ \sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

根据$a=0\in Q$，$b=1\in Q$，则

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\in A.$$

例 6　集合$A=\{1,3,5,7,9,11\}$和$\bar{A}=\{2,4,6,8,10,12\}$，求全集$\Omega$和$A\cap\bar{A}$。

解 由全集与集合及补集之间关系，有$\Omega=A\cup\bar{A}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 12\}$；$A\cap\bar{A}=\varnothing$。

例7 已知集合 $A=\{x\mid x^2-px+15=0\}$ 和集合

$B=\{x \mid x^2-5x+q=0\}$，且$A\cap B=\{3\}$，求p，q和$A\cup B$。

解 由$A\cap B=\{3\}$得知3是方程组

$$\begin{cases} x^2-px+15=0, \\ x^2-5x+q=0 \end{cases}$$

的解。将它代入方程组，解得

$$p=8,\ q=6。$$

进一步可求出

$$A=\{3,\ 5\},\ B=\{2,\ 3\}。$$

于是 $$A\cup B=\{2,\ 3,\ 5\}.$$

例8 已知集合 $A=\{x \mid x^2+3x-10<0\}$ 和集合 $B=\{x \mid |x|\leqslant 3\}$，求$A\cup B$和$A\cap B$。

解 将集合A和集合B分别表示为

$$A=\{x \mid -5<x<2\},$$

$$B=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 3\}.$$

并把集合A，集合B表示在同一数轴上，如图1-1所示。

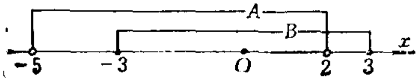


图 1-1

则有

$$A\cap B=\{x \mid -3\leqslant x<2\};$$

$$A\cup B=\{x \mid -5<x\leqslant 3\}.$$

例 9 已知全集$\Omega=\{x \mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$，集合$A=\{x \mid x^2-3x>0\}$和集合$B=\{x \mid x\leqslant -1$ 或 $x>4\}$，求$\bar{A}$，$\bar{B}$，$A\cap B$，$A\cup B$和$\overline{A\cup B}$。

解 将全集Ω和集合A分别表示为

$$\Omega=\{x \mid x\leqslant 1 \text{ 或 } x\geqslant 2\},$$

$$A=\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>3\}.$$

并将全集Ω，集合A和集合B表示在同一数轴上，如图1-2所示。

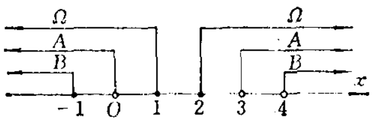


图 1-2

由已知及数轴上的表示可知

$$A\subset\Omega,\ B\subset\Omega,\ B\subset A.$$

于是

$$\overline{A}=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 或 } 2\leqslant x\leqslant 3\},$$

$$\overline{B}=\{x \mid -1<x\leqslant 1 \text{ 或 } 2\leqslant x\leqslant 4\},$$

$$A\cap B=B=\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x>4\},$$

$$A\cup B=A=\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>3\},$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 或 } 2\leqslant x\leqslant 3\}.$$

例10 设$f(x)=\dfrac{5x+3}{2x^2-3x+4}$，求$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$和$f\left(\dfrac{1}{m}\right)$.

解 $f(0)=\dfrac{5\times 0+3}{2\times 0^2-3\times 0+4}=\dfrac{3}{4}$;

$$f(-1)=\frac{5\times(-1)+3}{2\times(-1)^2-3\times(-1)+4}=-\frac{2}{9};$$

$$f(2)=\frac{5\times 2+3}{2\times 2^2-3\times 2+4}=2\frac{1}{6};$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{5\times\frac{1}{m}+3}{2\times\left(\frac{1}{m}\right)^2-3\times\frac{1}{m}+4}=\frac{3m^2+5m}{4m^2-3m+2}.$$

例11 判断下列各组函数的异同：

（1）$f(x)=\frac{x^2}{x}$与$\varphi(x)=x$；

（2）$f(x)=\sqrt{x^2-1}$与$\varphi(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$；

（3）$f(x)=1$与$\varphi(x)=(x+1)^2-(x^2+2x)$.

解 由函数的定义可以知道，两个函数只有当它们的两个要素(对应关系与定义域)完全相同时，这两个函数才视为相同；如果二要素之一不相同，这两个函数就是不相同的.

（1）$f(x)$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$. 由于$f(x)$和$\varphi(x)$的定义域不相同，所以它们是不相同的；

（2）$f(x)$的定义域为$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$，$\varphi(x)$的定义域为$[1, +\infty)$. 由于$f(x)$和$\varphi(x)$的定义域不相同，所以它们是不相同的；

（3）$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，$\varphi(x)$的定义域亦为$(-\infty, +\infty)$. 由于$f(x)$和$\varphi(x)$的定义域相同并且它们的对应关系亦相同（因为$\varphi(x)$对任何x都等于1)，所以函数$f(x)$与$\varphi(x)$是相同的.

例12 求下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-10x+9}$；（2）$y=\frac{1}{\sqrt{|x|-1}+\sqrt{4-x^2}}$；

（3）$y=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x^2+3x+2}$；

(4) $y=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

解 (1) 对于函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-10x+9}$，要求偶次根式 $\sqrt{x+1}$ 的被开方式非负，且分式的分母不为零，即有不等式组：

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x^2-10x+9\neq 0,\end{cases}\qquad \text{解得}\quad \begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\neq 1,\\ x\neq 9.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $[-1,\ 1)\cup(1,\ 9)\cup(9,\ +\infty)$；

(2) 对于函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}+\sqrt{4-x^2}}$，因为 $|x|-1=0$ 与 $4-x^2=0$ 不能同时成立，所以分式的分母不会为零.还要求其根式中的代数式非负，即有不等式组：

$$\begin{cases}|x|\geqslant 1,\\ 4-x^2\geqslant 0,\end{cases}\qquad \text{解得}\quad \begin{cases}x\leqslant -1\ \text{或}\ x\geqslant 1,\\ -2\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $[-2,\ -1]\cup[1,\ 2]$；

(3) 对于函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，要求根式中的代数式非负，还要求分母不为零，即有不等式组：

$$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ x^2+3x+2\neq 0,\end{cases}\qquad \text{解得}\quad \begin{cases}x\leqslant -1\ \text{或}\ x\geqslant 1,\\ x\neq -1,\ x\neq -2.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ -1)\cup[1,\ +\infty)$；

(4) 函数 y 为一分段函数，在区间 $[0,3]$ 内，每取一个 x

值函数y都有确定的值与之对应，所以函数的定义域为$[0,3]$。

例13 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2+x+2$；（2）$f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=ax^3+bx$；（4）$f(x)=ax+b(a,\ b\neq 0)$。

解 （1）$\because\quad f(x)=x^2+x+2,$

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)+2$$
$$=-x^2-x+2,$$
$$-f(x)=-x^2-x-2,$$

$f(-x)\neq f(x)$，且$f(-x)\neq -f(x)$，

故 $f(x)$是非奇非偶函数；

（2）$\because\quad f(x)=x^2+\sqrt{x^2},$

$$f(-x)=(-x)^2+\sqrt{(-x)^2}=x^2+\sqrt{x^2},$$

$\therefore\quad f(-x)=f(x),$

故 $f(x)$为偶函数；

（3）$\because\quad f(-x)=a(-x)^3+b(-x)=-(ax^3+bx),$

$$-f(x)=-(ax^3+bx),$$

$\therefore\quad f(-x)=-f(x),$

故 $f(x)$为奇函数；

（4）$\because\quad f(x)=ax+b,$

$$f(-x)=a(-x)+b=-ax+b,$$
$$-f(x)=-(ax+b)=-ax-b,$$

$\therefore\quad f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$，

故 $f(x)$是非奇非偶函数。

例14 在$\triangle ABC$中，$AB=c$，$AC=b$（常数$b>0,c>0$），$\angle BAC=x$，试将边$BC=y$表示为变量x的函数，并写出函数的定义域。

解 如图1-3所示，根据余弦定理有

$$y^2=b^2+c^2-2bc\cos x.$$

$\because$ y 表示边长，故 $y>0$.

$\therefore$ $y=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos x}$.

函数的定义域为 $(0,\ \pi)$。

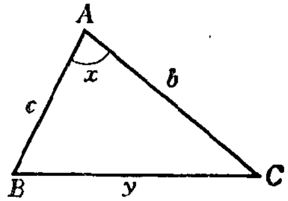


图 1-3

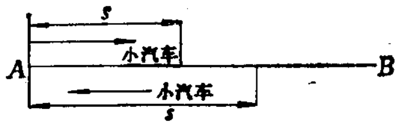


图 1-4

例15 A、B 两地相距 100km，一辆小汽车于 6 点从 A 地匀速出发，7 点 15 分到达 B 地。停留 2 小时后，以同一速度返回原地。(1)设小汽车在时刻 t 距 A 地为 $s$km，试写出距离 s 与时间 t 的函数关系，(2)画出函数图象。

解 如图 1-4 所示，在时刻 t 时，小汽车距 A 地为 s。

由于小汽车匀速行驶，且时速为 80km/h。故有

$$s=\begin{cases}80(t-6), & t\in[6,\ 7.25],\\ 100, & t\in(7.25,9.25),\\ 100-80(t-9.25), & t\in[9.25,10.50].\end{cases}$$

距离 s 是时间 t 的分段函数，其定义域为 $[6,\ 10.50]$，如图 1-5 所示。

例16 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB、BC 上的点，且 $AE=BF=1$。过线段 EF 上的点 P 分别作 DC、AD 的垂线，垂足为 M、N。延长 NP 交 BC 于点 Q(图 1-6)，试写出矩形 $PMDN$ 的面积 y 与 FQ 的长 x 之间

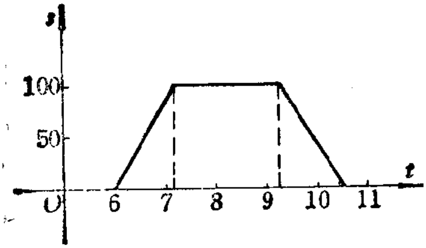


图 1-5

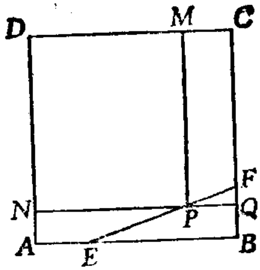


图 1-6

的函数关系式，并求出 y 的最大值。

解 由图 1-6 所示 $\because\ AE=BF=1,\ QF=x$，

$\therefore\ AN=BQ=1-x$，

又 $\because\ AB=AD=4$，$\therefore\ DN=4-AN=3+x$。

由题设知 $PQ/\!/EB$，所以$\triangle FPQ\backsim\triangle FEB$。于是有

$$\frac{PQ}{EB}=\frac{FQ}{FB}，即\frac{PQ}{4-1}=\frac{x}{1}，$$

求出 $PQ=3x$，则 $PN=4-3x$，于是矩形 $PMDN$ 的面积为

$$\begin{aligned}y&=(3+x)(4-3x)\\&=-3x^2-5x+12,\ x\in[0,\ 1].\end{aligned}$$

配方

$$y=-3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{169}{12}.$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以当 $x=0$ 时，矩形$PMDN$ 的面积取得最大值，且最大值为 12。

例17 已知$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$。

解法1 令$u=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$，则$\frac{1}{x}=u-1$。

已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$,

所以 $f(u)=u+(u-1)^2=u^2-u+1$。

将 u 换成 x，即

$$f(x)=x^2-x+1。$$

解法2 $\because$ $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1,$$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$。

解法 1 为普遍采用的方法；解法 2 是根据问题的特点，方法简捷，技巧性强。

例18 设 $f(x)=\frac{5x}{4x-3}\left(x\neq\frac{3}{4}\right)$，求 $f[f(x)]=x$ 的解集。

解 $f[f(x)]=\frac{5f(x)}{4f(x)-3}=\frac{5\cdot\frac{5x}{4x-3}}{4\cdot\frac{5x}{4x-3}-3}=x$,

整理得 $8x^2-16x=0$,

解得 $x=0$ 或 $x=2$。

满足方程 $f[f(x)]=x$ 的解集为

$X=\{x|x=0\}\cup\{x|x=2\}$, 或 $X=\{0\}\cup\{2\}$。

例19 要使函数 $f(x)=\sqrt{kx^2-6x+(k+3)}$ 的定义域是所有实数，求 k 的取值范围。

解 由于偶次方根的被开方数非负，即

$$kx^2-6x+(k+3)\geqslant0,$$