高等学校教材

高等动力学

肖尚彬　董秋泉　编

西北工业大学出版社

高等学校教材

高等动力学

肖尚彬　董秋泉　编

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书在理论力学的基础上，对一般力学的几个主要专题（除振动理论外）作了较全面的阐述。全书共分八章：前三章介绍分析动力学和刚体动力学的基本理论和方法；第四、第五两章介绍动力学系统的几何性状和运动稳定性的基本定理；最后三章介绍古典天体力学和航天器动力学的基础知识。书末附有习题，供教学中选用。

本书可作为力学专业高年级大学生和研究生的专业基础教材或参考书，其中某些内容还可供需要力学较多的有关专业高年级大学生和研究生选学。本书也为广大理论力学教师和从事力学工作的科技人员进修提高提供较集中而丰富的内容。

高等学校教材

高 等 动 力 学

编　　者：肖尚彬
　　　　　董秋泉

责任编辑：郑文治

*

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路127号）

陕西省新华书店发行

空军导弹学院印刷厂印刷

*

开本787×1092毫米　1/16　印张15.875　386千字

1986年9月第一版　　1986年9月第一次印刷

印数0001—4000册

统一书号：15433·034　定价：2.65元

前　言

随着科学技术的不断发展，工程实际中也不断地向力学提出许多新的、更复杂的课题。因而，使大学生、研究生以及从事力学工作的科技人员在动力学方面获得更广博的知识、接受多方面的训练并具有坚实的基础是十分必要的。

本书在理论力学的基础上，对动力学的几个主要分支作了比较深入的探讨，并力求反映现代科学技术的新成果。其内容包括：分析动力学的基本理论和方法，相对于旋转坐标系的运动和刚体动力学，动力学系统的几何性状和自治系统的稳定性，天体力学和航天器动力学。这些问题都是与现代科学技术紧密联系的，掌握这些动力学内容，将为研究、解决工程中的动力学问题提供必要的理论基础。至于振动理论及其应用，由于国内、外在这方面的专著教材很多，本书未做专题介绍。

力学的发展是和数学紧密相连的，在阐述动力学原理时，当然也离不开数学。但对于高年级大学生、研究生和科技人员来讲，书中涉及的微积分、矢量和矩阵运算、常微分方程等，他们都是具备的。

本书初稿曾在我校印成讲义作为工程力学专业的教材使用过三遍，从内容的深广度看还是比较合适的。讲完本书的基本内容需要80学时，其中加深加广的内容是为兼顾相应专业研究生而提供的。书末附有习题可供教学时选用。

编写本书过程中，参阅了国内、外一些有关著作，其中主要的列在书末的参考文献中，供读者进一步研究时参考。

本书承西安交通大学陈守五、黄幼玲副教授详细审阅，提出了许多宝贵的修改意见，北京航空学院汪恩松、李振祥同志也对本书提了意见，在此一并表示感谢。

编　者

一九八六年元月

目 录

第一章　分析力学基础

研究动力学问题的一种方法是直接以牛顿（Newton）定律为基础，称为**矢量力学**。这种方法借助力和动量的概念来分析运动，二者都是矢量。它研究的对象是隔离物体，着重研究系统各部分相关的力和运动。因此需要考虑各部分之间的相互作用引起的约束力，尽管这些力可能并不重要，甚至是完全不必要的。

研究动力学问题的另一种方法是属于拉格朗日（Lagrange）和哈密顿（Hamilton）的，称为**分析力学**。它研究的对象是整个系统，而不是隔离部分。这种方法着重的不是力和加速度，而是以功和动能作为基本量并引进广义坐标来描述系统的运动，它们都是标量。通过对这些标量函数进行运算以求得运动方程，而无须解出作用于系统各部分的约束力。

本章不拟介绍分析力学的全部内容，而只叙述它的基础部分。重点围绕拉格朗日方程及其应用。为了照顾系统性并适应初学者的需要，讲述从基本概念开始。最后讨论了哈密顿原理和正则方程。

§1.1　自由度·广义坐标

一、自由系统与非自由系统

我们研究由N个质点组成的力学系统，其位置由矢径$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(x_i,y_i,z_i)$给定，其中$x_i,y_i,z_i(i=1,2,\cdots,N)$是第$i$个质点的直角坐标。如果已知全部$N$个质点的位置是时间$t$的某个函数：$x_i=x_i(t)$，$y_i=y_i(t)$，$z_i=z_i(t)$，则力学系统的运动便完全确定。设力学系统中每个质点的运动仅仅决定于它所受的主动力（包括外力和内力）以及运动的初始条件，而不受任何其它几何学的或运动学的限制，这样的系统称为**自由系统**。对于自由系统，确定其运动的N个矢量函数$\boldsymbol{r}_i(t)$是独立无关的；相应地，这N个矢量函数的$3N$个直角坐标$x_i(t)$，$y_i(t)$，$z_i(t)$都是独立的函数。对应于时间的微分dt，这$3N$个变量的微分dx_i，dy_i，dz_i也都是彼此独立的。例如，若将各个天体都看成质点，则由太阳和诸行星、卫星所组成的太阳系就是典型的自由系统。

在大量实际问题中，力学系统并不是自由的，而是受到某些预先给定的几何学的或运动学的限制，使得系统各个质点的坐标和速度必须服从一定的关系。这种加于系统运动的限制称为**约束**，例如，火车被限制在铁轨上运动的条件，冰刀运动的速度只能沿刀刃方向的条件，等等，都是约束。而具有约束的系统则称为**非自由系统**。例如，哑铃就是由一根无重刚杆连接两个质点所组成的非自由系统（图1-1）。在直角坐标系中，确定两个自由质点的位形需要六个坐标，但对于哑铃的情形，这六个坐标不是独立的，而是满足

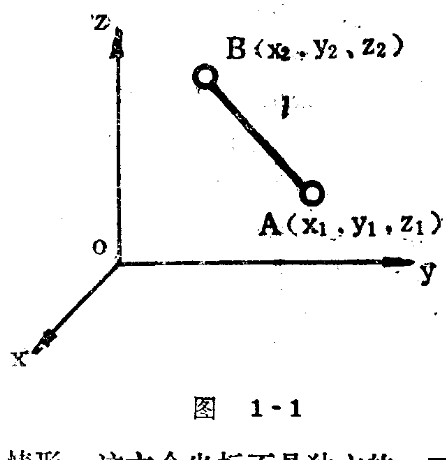

图　1-1

下列关系：

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 \quad . \tag{1·1}$$

式中l是两质点 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$之间的距离，它在运动过程中始终保持不变。这就是刚杆加于质点系的限制条件，关系式（1.1）称为**约束方程**。现在来求上式两边的一阶微分，得

$$(x_1-x_2)(dx_1-dx_2)+(y_1-y_2)(dy_1-dy_2)+(z_1-z_2)(dz_1-dz_2)=0 \quad . \tag{1·2}$$

显然，如果仅仅知道六个坐标中的五个坐标，哑铃的位形便可完全确定，因为第六个坐标可由约束方程（1·1）求得。由此可见，系统的六个坐标中只有五个是彼此独立的；相应地，六个坐标微分必须满足关系式（1·2），因而也只有五个是彼此独立的。

综上所述，若要完全规定由N个质点组成的力学系统的位形，就需要$3N$个坐标。对于自由系统，这$3N$个坐标是独立无关的；而对于非自由系统，这$3N$个坐标并不是完全独立的。由于约束的存在，用来确定系统位形的独立坐标数目减少了，减少的数目就等于独立的约束方程的数目。如何用最少的坐标或参量来描述一个力学系统并求解系统动力学问题，正是分析力学的主要任务。

二、自由度

自由度数是给定的力学系统的一个重要特征。**一个系统的自由度数就是规定这个系统位形所必需的独立坐标的数目，它总是等于系统采用的坐标数目减去独立的约束方程的数目**。如果利用 $3N$个直角坐标来描述具有N 个质点的系统的位形，并且有m个联系这些坐标的独立约束方程，则该系统的自由度数为

$$n=3N-m \quad . \tag{1·3}$$

例如，图1-1中哑铃的例子，坐标数是$3N=6$，独立约束方程数是 $m=1$，因此，系统的自由度数$n=3N-m=5$。亦即，只需五个坐标就可完全确定这个系统的位形。

我们再来考察由三个质点组成的系统，它们用三根刚杆相连，从而构成一个三角形物体，每个顶点上有一个质点。给定三个质点的位置需要九个直角坐标，这九个坐标之间存在三个形如式（1·1）的独立约束方程，因此，该系统具有六个自由度。我们知道，三角形在几何上是不变形的结构，亦即，三角形物体就是刚体的一个例子，它的自由度数和一般刚体的自由度数相同，后者具有六个自由度。

必须指出，自由度数是系统本身的特征，它并不依赖于描述该系统位形时所采用的某组特定的坐标。例如，上述哑铃的位形不一定用两个质点的六个直角坐标中的五个来规定，可以采用一个质点的三个直角坐标以及确定杆子方位的两个角度。三角形物体的位形也不必用三个顶点的九个直角坐标中的六个来规定，通常是采用体内任一点的三个直角坐标以及确定该物体方位的三个欧拉角。

找出这样一组独立坐标或参量来描述一个系统的位形往往是有利的。在此情形，坐标或参量的数目与自由度数相同，所建立的动力学方程具有最小可能的阶，包含最少数目的变量，因而分析和求解过程有可能大为简化。

三、广义坐标

正如前面所述，除直角坐标外，可以采用不同的坐标组来描述一个给定力学系统的位

形。任何一组能用来描述一个系统的位形的参量都可选为这样一组坐标。但是，**当且仅当坐标的数目对单一地确定一个系统的位形是必要而充分的情形下，这一组坐标才称为该系统的一组广义坐标。**也就是说，任何一组数目最小的独立坐标都是一组广义坐标。广义坐标比笛卡儿直角坐标的意义更为广泛，广义坐标不一定是线坐标，也可以是角坐标或其它的物理量，例如面积、体积、动量、电场强度，等等。

我们研究由N个质点组成的力学系统，可以用$3N$个直角坐标$x_1, y_1, \cdots, z_N$来规定系统的位形。对于自由系统，$3N$个坐标是彼此独立的，即可取为广义坐标。对于非自由系统，$3N$个坐标不是完全独立的，设独立坐标数等于n，这里，$n<3N$。方便的是另选一组n个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_n$来描述该系统的运动。一般地，可以将联系直角坐标$x_1, y_1, \cdots, z_N$同广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_n$的变换式写为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), \\ &(i = 1, 2, \cdots, N). \end{aligned}\right\} \tag{1·4}$$

因为诸q是彼此独立的，所以一组且仅仅一组q对应于系统的每一个可能位形。换言之，对于每一个时间值，在诸x_i，y_i，z_i容许区域内的各点同诸q容许区域内的各点之间应该有一一对应的关系。能够将q作为x_i，y_i，z_i和t的函数解出的必要和充分条件是，变换式的雅可比行列式不等于零。

作为例子，假定$3N$个直角坐标之间具有m个下列形式的约束方程：

$$f_j(x_1, y_1, \cdots, z_N, t) = \alpha_j \qquad (j = 3N - m + 1, \cdots, 3N)\ . \tag{1·5}$$

设选定n个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_n$，亦即系统的自由度数为

$$n = 3N - m$$

为求雅可比行列式，再来补充定义另一组m个q，并令它们与m个常数α_j分别相等，即

$$q_j = \alpha_j \qquad (j = n+1, \cdots, 3N)\ . \tag{1·6}$$

于是可以将变换式（1·4）扩充为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots q_{3N}, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots q_{3N}, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots q_{3N}, t), \\ &(i = 1, 2, \cdots, N). \end{aligned}\right\} \tag{1·7}$$

如果雅可比行列式不等于零，亦即

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \cdots, z_N)}{\partial(q_1, q_2, \cdots, q_{3N})} \neq 0\ , \tag{1·8}$$

则可由式（1·7）解出诸q作为直角坐标和t的函数，即

$$q_j = {}_j q(x_1, y_1, \cdots, z_N, t) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)\ . \tag{1·9}$$

其余的对应于$j=n+1,\cdots,3N$的常值q由式（1·5）和（1·6）给定。

最后指出，广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_n$并不总是具有实际意义的，而且也不是唯一的，这说明可能不止一组坐标能够用来描述同一个力学系统。但是，它们必须是有限的、单值的、连续的和可微的。

四、位形空间

广义坐标的概念扩展了人们的视野，促进了矢量力学的物理世界向更抽象化更数学化的分析领域的过渡。

我们考察具有N个质点的系统的位形，它由$3N$个直角坐标给定。如果系统具有m个形如式（1·5）的独立约束方程，即只限制系统中各质点的位置，于是系统的自由度数为$n=3N-m$，可以选择n个独立的广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_n$来规定该系统的位形。与给定的系统相联系，我们可以设想一个具有正交基的n维欧氏空间（矩形空间），其中任意一点的位置坐标为（$q_1,q_2,\cdots,q_n$），则系统的每一给定位形对应于这个空间中单一的点；反之，这个空间中一个给定的点对应于系统的单一位形。于是，具有有限自由度的任何力学系统的实际运动，可以由这个空间中的一个点在该空间的运动来描述。我们将这个空间称为**位形空间**，相应地，将这个点称为**位形点**。我们还可以设想从原点到给定的位形点作一矢量$\boldsymbol{q}$，该矢量$\boldsymbol{q}$具有相应的n个q作为它在位形空间中的正交分量。

当给定的力学系统的位形随时间变化时，位形点在位形空间划出一条轨迹曲线，称为C轨迹。在诸q都是彼此独立的通常情形下，该曲线将是连续的，并且在位形空间中不受限制。如果有表示为诸q的函数形式的约束存在，这类约束可以解释为位形空间中的维数小于n的超曲面，则位形点就被限制在这些小于n维的超曲面上运动，C轨迹必须位于曲面的交线上。因此，这类约束的作用就是降低位形空间的维数，将系统的运动限制在相应的较小维数的子空间里。

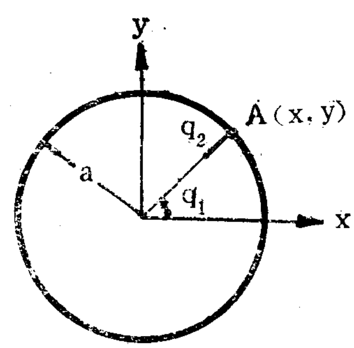

图 1-2

例1·1 作为由直角坐标到广义坐标变换的例子，我们来考察一个质点，它被限制在半径为a的固定圆周路径上运动（图1-2）。

解 以直角坐标表示点A的位置，约束方程为

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=a, \tag{a}$$

故该点具有单自由度。取单个广义坐标q_1表示一个自由度。这个极角q_1可以任意地改变而不破坏约束。根据式（1·6），我们补充定义第二个常值广义坐标

$$q_2=a \quad , \tag{b}$$

于是变换式可写为

$$x=q_2\cos q_1, \qquad y=q_2\sin q_1 \quad . \tag{c}$$

为了反解出q_1，q_2，必须求这个变换式的雅可比行列式，有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2}\\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2}\end{vmatrix}=-q_2 \tag{d}$$

可见，除去在$q_2=0$时雅可比行列式等于零的情形外，q_1，q_2均可从式(c)中反解出来，表示为x，y的函数。而在$q_2=0$的情形，圆的半径为零，并且角q_1是不确定的，因此从式(c)中不能解出q_1，q_2。这些变换式为

$$q_1=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}\ ,\ q_2=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{e}$$

为使q_1，q_2成为x，y的单值函数，可以任意地取$0\leqslant q_1\leqslant 2\pi$和$0<q_2<\infty$。除原点外，这些变换式适用于平面$Oxy$上全部的点。

例1·2 双摆由两个质点A、B构成，中间用两根各长l_1,l_2的无重刚杆相连，悬挂在固定点O，可以在铅直平面Oxy内摆动(图1-3)。试求该系统的坐标变换式。

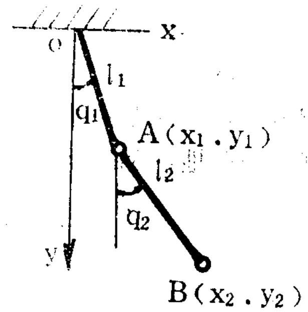

图 1-3

解 以直角坐标表示点A和B的位置，两根刚杆的约束方程为

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2, \tag{a}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2\ . \tag{b}$$

故双摆具有两个自由度，取两杆与铅直线的夹角为广义坐标q_1，q_2。根据式（1·6），我们补充定义另两个常值坐标为

$$q_3=l_1,\qquad q_4=l_2 \tag{c}$$

于是得到由直角坐标到广义坐标的变换式

$$\left.\begin{aligned} x_1&=q_3\sin q_1, & y_1&=q_3\cos q_1,\\ x_2&=q_3\sin q_1+q_4\sin q_2, & y_2&=q_3\cos q_1+q_4\cos q_2. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

现在来求逆变换，上式的雅可比行列式是

$$\frac{\partial(x_1,y_1,x_2,y_2)}{\partial(q_1,q_2,q_3,q_4)}=-q_3q_4\ . \tag{e}$$

可见，雅可比行列式只在$q_3=0$或$q_4=0$时才等于零，此时，双摆退化为$l_1=0$或$l_2=0$的单摆。除此从外，诸q均可表为x，y的函数。这些变换式为

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_1}{y_1}, & q_2&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1},\\ q_3&=(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}, & q_4&=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

§1.2 约束及其分类

除自由系统外，一般的力学系统都会受到某些几何的或运动学特性的限制，这些限制

就是约束。由于约束的存在，对系统的可能运动加上了限制条件，于是减少了系统的自由度数。对于约束的处理，以牛顿定律为基础的矢量力学是利用解除约束原理，以相应的约束力代替约束的作用；而分析力学则是将实际约束用数学方程解析地表达出来，这就是约束方程。下面我们比较详细地讨论约束的分类和数学表达。

一、几何约束与运动约束

如果约束方程仅是联系系统中各质点坐标之间的关系式，这类约束称为**几何约束**或**有限约束**。对于含有N个质点的力学系统，加于系统的m个几何约束的一般表达式为

$$f_j(x_1,y_1\cdots,z_N)=0 \qquad (1\cdot10)$$

$$(j=1,2,\cdots,m)\ .$$

例如，上节中提到的哑铃和双摆所受的刚杆约束，其约束方程具有（1·1)的形式，就是几何约束。由于两根刚杆的限制，双摆中的A点只能在以悬点O为圆心，l_1为半径的圆弧上运动；而B点的运动范围则被缩小在以O为圆心，l_1+l_2为半径的圆弧作为边界的面积以内。这表明，由于几何约束的存在，减少了系统的自由度数，限制了系统在三维空间或一般地在位形空间的可达区域，使之不能具有任意位形。

如果约束方程不仅联系系统中各质点的坐标，而且包含各点的速度分量，这类约束称为**运动约束**。一般地，加于系统的s个运动约束可以解析地表达为

$$f_k(x_1,y_1,\cdots,z_N;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\cdots,\dot{z}_N)=0 \qquad (1\cdot11)$$

$$(k=1,2,\cdots,s)\ .$$

在大多数情况下，具有实际意义的运动约束是式（1·11)左边为各点速度分量的线性函数，这时，运动约束方程可写为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i+b_{ki}\dot{y}_i+c_{ki}\dot{z}_i)=0 \qquad (1\cdot12)$$

$$(k=1,2,\cdots,s)\ .$$

式中a_{ki}，b_{ki}，c_{ki}是各点坐标的函数。

式（1·12）也可写为坐标微分之间的关系式：

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}dx_i+b_{ki}dy_i+c_{ki}dz_i)=0 \qquad (1\cdot13)$$

$$(k=1,2,\cdots,s)$$

因此，运动约束又称为**微分约束**，它是加于各点坐标微分的限制条件。

作为运动约束的例子，可以举出薄圆盘在粗糙的水平直线轨道上作纯滚动的情形（图1-4)。由运动学可知，加于圆盘运动的条件为

$$\dot{x}_c-r\dot{\theta}=0, \qquad (1\cdot14)$$

其中x_c是圆盘质心的横坐标，r是圆盘半径，θ是圆盘转角。可见，约束方程（1·14）

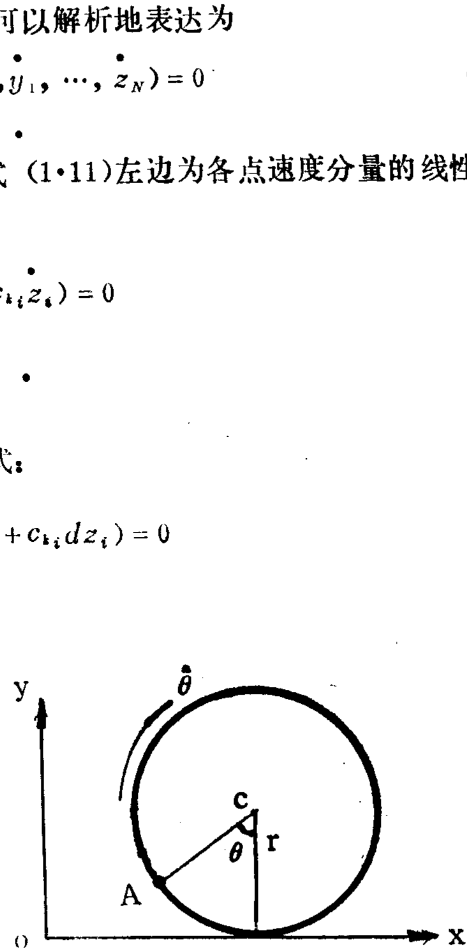

图 1-4

中包含盘心线速度和圆盘角速度，故属于运动约束。它也可写为微分约束的形式：

$$dx_c - rd\theta = 0 \quad . \tag{1·15}$$

还须指出，式（1·14）或（1·15）虽然具有运动约束的形式，但进一步的分析可知，经过一次积分，式（1·15）就变为

$$x_c - r\theta = 常数。 \tag{1·15$'$}$$

上式实际上是盘心线坐标和圆盘相对于中心轴的角坐标之间的有限关系式，因而在实质上它代表加于圆盘的几何约束，表示限制圆盘沿直线轨道作纯滚动的条件。

一般地，微分约束又分两类：**可积约束**与**不可积约束**。下面我们还将比较详细地讨论微分约束的可积条件。

二、平稳约束与非平稳约束

如果几何约束方程和运动约束方程中不显含时间 t，这类约束称为**平稳约束**或**定常约束**。

如果约束方程中除坐标和速度分量外，还显含时间t，则这类约束称为**非平稳约束**或**非定常约束**。在此情形，几何约束方程可写为下列形式：

$$f_j(x_1, y_1, \cdots, z_N, t) = 0 \tag{1·16}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, m)。$$

而运动约束方程一般可写为

$$f_k(x_1, y_1, \cdots, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \cdots \dot{z}_N; t) = 0 \tag{1·17}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, s) \quad .$$

特别地，线性约束的情形具有下列的一般表达式：

$$\sum_{i=1}^{N} (a_{ki}\dot{x}_i + b_{ki}\dot{y}_i + c_{ki}\dot{z}_i) + e_k = 0 \tag{1·18}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, s) \quad ;$$

或

$$\sum_{i=1}^{N} (a_{ki}dx_i + b_{ki}dy_i + c_{ki}dz_i) + e_k dt = 0 \tag{1·19}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, s) \quad .$$

其中a_{ki}，b_{ki}，c_{ki}，e_k都是坐标和时间t的函数。对于平稳约束，$e_k \equiv 0$、而且a_{ki}，b_{ki}，c_{ki}仅是坐标的函数。约束方程（1·19）称为普发夫型。

仅仅具有平稳约束的力学系统称为**平稳系统**，而受有非平稳约束的系统称为**非平稳系统**。

例如，当单个质点用长为l的刚杆相连，如刚杆的上端固定不动，取这点作为坐标原点，则约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \tag{1·20}$$

这就是平稳约束。如杆的上端沿水平直线以匀速u运动，取该直线上某固定点作为坐标原点，轴x沿此直线，则约束方程具有形式：

$$(x - ut)^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \tag{1·21}$$

这就是非平稳约束。

三、双面约束与单面约束

如果约束方程用等式联系，无论是几何的或运动的，平稳的或非平稳的，都称为**双面约束**。简言之，双面约束即系统在运动过程中始终不能脱离的那种约束，故又称为**不可解约束**。

如果约束方程用不等式联系，则这类约束称为**单面约束**或**可解约束**。单面约束允许系统在某一方面脱离约束，它的一般表达为

$$f(x_1,y_1,\cdots,z_n,t)\leqslant 0 \quad . \tag{1·22}$$

在上式中，如果等号成立，就说约束是**张紧**的；而如不等号成立，则说约束是**松弛**的。因此，当有单面约束存在时，系统的运动可以分段考虑：在约束是张紧的一段上，系统的运动如同在双面约束情形下一样；而在约束是松弛的一段上，则系统如同处在没有约束的情形一样。今后，我们主要讨论双面约束。

例如，当单个质点被限制在半径为r的固定球面上运动时，取球心体为坐标原点，则约束方程由等式给出：

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0 \quad . \tag{1·23}$$

而如质点不是被限制在球面之上，而是处在空心球面之内，仅仅以球面作为边界。这时，约束方程由不等式给出：

$$x^2+y^2+z^2-r^2\leqslant 0 \quad . \tag{1·24}$$

若质点处于球内并不接触其内表面，则不等式成立，该质点如象自由质点一样在三维空间中自由地运动。若质点在每一时间区间内沿球面运动，则等式成立，这时质点只能在二维曲面上自由地运动。

四、完整约束与非完整约束

如果约束方程可以用有限形式表示，包括几何约束和可积微分约束，统称**完整约束**。约束方程不能用有限形式表示，如不可积微分约束，则称为**非完整约束**。

仅仅具有完整约束的力学系统称为**完整系统**或**全定系统**，而具有非完整约束的系统称为**非完整系统**或**非全定系统**。

从数学上讲，只有在线性微分多项式（1·13）不是某个函数的全微分的情形，或者说，不可能将式（1·13）经过积分而得到坐标之间的有限关系式的情形，它才表示真正的微分约束，即不可积约束。

我们现在来研究微分约束方程的可积条件。在简单情形下，设系统受有单个微分约束：

$$a\,dx+b\,dy+c\,dz=0 \quad . \tag{1·25}$$

式中a、b、c都是x、y、z的函数。由微积分学知，如果微分型（1·25）是恰当微分，则必定有函数$f(x,y,z)$存在，并且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=b,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=c \quad . \tag{1·26}$$

而上述关系式成立的必要和充分条件是：a，b，c对于x，y，z的偏导数必须存在，并且

$$\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x},\qquad \frac{\partial b}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial y},\qquad \frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial z}\ . \tag{1·27}$$

但须指出，对于约束方程(1·25)是恰当微分来说，式（1·27）是充要条件；而对于微分约束（1·25）是可积约束来说，式（1·27）则不是充要条件。在微积分学中已经证明，微分型（1·25）可积的充要条件是

$$a\left(\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial z}\right)+c\left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)=0 \tag{1·28}$$

显然，当条件（1·27）满足时，亦即当微分型（1·25）是恰当微分时，条件（1·28）必定被满足。但是，反过来说则并非如此。

一般地说，当有完整约束存在时，位形空间的维数相应地减少，减少的维数就等于独立的完整约束数，这样一来，在每一个给定的时刻 t，该系统就不能在空间占有任意的位置。而非完整约束则仅限制在位形空间中任意给定点处的许可运动的方向，但并不减少位形空间的维数，也不限制系统可以获得各种各样的位形。由此可见，规定完整系统位形所必需的广义坐标数就等于系统的自由度数；而规定非完整系统位形所必需的广义坐标数则大于系统的自由度数。亦即，非完整系统的自由度数等于广义坐标数减去独立的非完整约束数。

例1·3 一个半径为r的铅直圆盘，在水平面Oxy上滚动而无滑动（图1-5），试写出圆盘的约束方程。

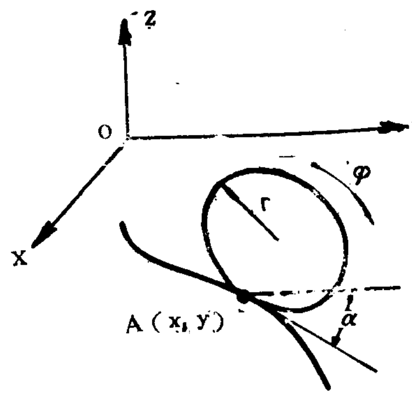

图 1-5

解 选取接触点A的坐标x，y，圆盘绕通过中心并垂直盘面的轴的转角φ，以及盘与Oyz平面的夹角α作为广义坐标。滚动而面无滑动的要求可写为约束条件：

$$dx-r\sin\alpha\cdot d\varphi=0, \tag{a}$$

$$dy-r\cos\alpha\cdot d\varphi=0\ . \tag{b}$$

式中$rd\varphi=ds$是接触点A沿着其路径走过的微分位移，α即是路径在A点的切线与轴y之间夹角。按条件(1·27)立即判定，式（a）和（b）的两个微分式不是恰当微分，因此这两个约束都是非完整的。

在这个例子中，有四个坐标和两个独立约束方程，结果得到两个自由度。由于约束都是非完整的，自由度虽然减少了，但位形空间的维数并不降低，只要恰当地选择路径，任意位形（x,y,φ,α）都可以由其它任一位形而达到。

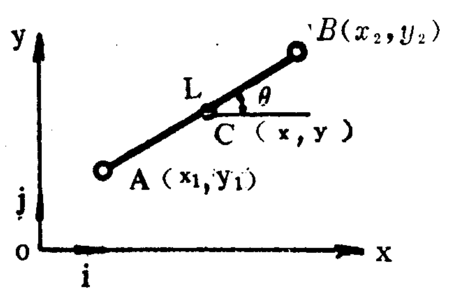

图 1-6

例1·4 两质点由长为l的无重刚杆相连，可以在光滑的冰面上滑动（图1-6）。如果在每个质点处加上刀刃支承，而刀刃垂直于两点连线，并且不允许两点速度具有沿杆子方向的分量。但是都可以沿垂直于杆子方向无摩擦地滑动。试写出该系统的约束方程。

解法1 选取两个端点的四个直角坐标

x_1、y_1、x_2、y_2为坐标以确定系统位形。由于刚杆约束的存在，有完整约束方程：

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0 \quad . \tag{a}$$

由于刀刃支承的存在，不允许两端点的速度具有沿杆子方向的分量，这一限制条件可写为两个标积形式：

$$(\dot{x}_1\boldsymbol{i}+\dot{y}_1\boldsymbol{j})\cdot[(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}]=0,$$
$$(\dot{x}_2\boldsymbol{i}+\dot{y}_2\boldsymbol{j})\cdot[(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}]=0,$$

或两个标量方程：

$$\dot{x}_1(x_2-x_1)+\dot{y}_1(y_2-y_1)=0, \tag{b}$$
$$\dot{x}_2(x_2-x_1)+\dot{y}_2(y_2-y_1)=0. \tag{c}$$

这三个约束方程并不是彼此独立的，如式（b）+（c）：

$$(x_2-x_1)(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+(y_2-y_1)(\dot{y}_1+\dot{y}_2)=0, \tag{d}$$

式（c）－（b）：

$$(x_2-x_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+(y_2-y_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1)=0. \tag{e}$$

式（d）不可积，是一个非完整约束；式（e）可积，其积分就是式（a），是一个完整约束。所以，这个系统的四个定位坐标之间存在两个独立约束方程，因此具有两个自由度。但由于其中一个约束是非完整的，故位形空间应是三维，即确定系统位形的独立坐标应是三个。

解法2 选取杆子中点C的两个直角坐标x、y和杆与轴x之间夹角θ作为广义坐标。由于两端点刀刃支承的存在，不允许刚杆上任一点，当然也包含中点C在任一瞬时的速度具有沿杆子方向的分量，这一限制条件可写为标积形式：

$$(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j})\cdot(\cos\theta\cdot\boldsymbol{i}+\sin\theta\cdot\boldsymbol{j})=0,$$

或标量方程：

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=0. \tag{f}$$

这就是该系统唯一的约束方程，显然，这个约束是非完整的。

解法2比解法1简捷，原因是选取了恰当的广义坐标作为系统的定位参数，它们是一组数目最小的独立坐标。

§1.3 虚位移原理

一、可能位移与虚位移

我们考察具有N个质点的系统，其位形由$3N$个直角坐标$x_1,y_1,\cdots,z_N$给定。设在该系统上加有m个完整约束和s个微分约束。m个完整约束方程形如（1·16），可以写为相应的微分约束形式；另外，s个微分约束方程形如（1·18）。即有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0 \quad (j=1,2,\cdots,m),\\&\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i+b_{ki}\dot{y}_i+c_{ki}\dot{z}_i)+e_k=0 \qquad (k=1,2\cdots,s)\ .\end{aligned}\right\} \tag{1·29}$$

上述 $(m+s)$ 个方程是加在系统各质点速度 $\boldsymbol{v}_i(\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)$ 上的限制条件，满足这一组方程的矢量组 $\boldsymbol{v}_i$ 称为瞬时 t 系统在其可能位置上的**可能速度**。因此，**可能速度是约束所容许的速度**。对于系统在时刻 t 的每一个可能位置，都存在无数组可能速度，而系统在时刻 t 作实际运动时，这无数组速度中仅有一组被实现。必须指出，这一组被实现的速度不仅由 $(m+s)$ 个约束方程相联系，而且还取决于动力学定律。但每一组可能速度则只决定于 $(m+s)$ 个约束方程。

我们将可能的无穷小位移 $d\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{v}_i dt(i=1,2,\cdots,N)$ 称为**可能位移**，其中 $\boldsymbol{v}_i$ 即是可能速度。将式 (1·29) 逐项乘以 dt，便得到加于可能位移 $d\boldsymbol{r}_i$ (dx_i,dy_i,dz_i) 上的 $(m+s)$ 个约束方程：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t_i}dt=0\\&\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,m),\\&\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}dx_i+b_{ki}dy_i+c_{ki}dz_i)+e_k dt=0\\&\qquad\qquad(k=1,2,\cdots,s).\end{aligned}\right\}\tag{1·30}$$

取系统在同一时刻、同一位置的两组可能位移 $d\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{v}_i dt$ 和 $d'\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{v}'_i dt(i=1,2,\cdots,N)$，$d\boldsymbol{r}_i$ 和 $d\boldsymbol{r}_i$ 同样都满足方程 (1·30)。以 $\delta\boldsymbol{r}_i(\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i)$ 表示二者之差，即令

$$\delta\boldsymbol{r}_i=d'\boldsymbol{r}_i-d\boldsymbol{r}_i\quad(i=1,2,\cdots,N)\tag{1·31}$$

式中，符号 δ 表示变分，以区别于微分符号 d。则诸 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 都满足下列齐次关系式：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\quad(j=1,2,\cdots,m),\\&\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\delta x_i+b_{ki}\delta y_i+c_{ki}\delta z_i)=0\qquad(k=1,2,\cdots,s).\end{aligned}\right\}\tag{1·32}$$

我们将无穷小矢量组 $\delta\boldsymbol{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 称为**虚位移**，式 (1·32) 就是加于虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 上的 $(m+s)$ 个约束方程。满足方程 (1·32) 的任意一组矢量 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 都是一组虚位移。将确定虚位移的方程 (1·32) 同确定可能位移的方程 (1·30) 加以比较即可看出，它们之间的差别仅仅在于前者没有 $\frac{\partial f_j}{\partial t}dt$ 或 $e_k dt$ 这类的项。亦即，虚位移的发生并不伴随着时间 t 的无穷小增量 dt。因此可以说，虚位移是设想时间突然停滞，从而约束被"凝固"时非自由系统可能发生的无穷小位移。所谓"凝固"，对于完整约束来说，意思是指出现在约束方程中的时间 t 被固定，换言之，约束将保持它在时间 t 的形状不变。因此，在求函数 f_j 的微分时就不出现 $\frac{\partial f_j}{\partial t}dt$ 这一项，或者说，应取 $dt=0$。于是，式 (1·30) 中前 m 个方程就与式 (1·32) 中前 m 个方程一样。而"凝固"一词，对于非完整约束来说，则意味着使它具有平稳的特征，即去掉约束方程左边的 e_k，并令显含在系数 a_{ki}，b_{ki} 和 c_{ki} 中的时间 t 固定不变。于是，式 (1·30) 中后 s 个方程就与式 (1·32) 中后 s 个方程一样。我们也可以这样说：**虚位移乃是系统中各质点从系统在时刻 t 的某一可能位置到系统在同一时刻 t 可能占有的另一无限接近的位置的位移。**

综上所述，一般情形虚位移不一定与可能位移一致，而在系统所受约束都是平稳约束