x0243

成都工学院图书館

·308877

基本館藏

微积分初步

呂俊熙編著

成都工学院图书館

江苏人民出版社

• 內 容 提 要 •

本書講述最基本的微积分法。簡要地介紹了极限理論，微分法，积分法，无穷級数理論，微分方程，以及微积分法的应用。可供具有高中数学水平的干部和技工等作为参考讀物和自修之用。

微 积 分 初 步

呂俊熙編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 一 号

新华书店江苏分店发行　江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗1/25　印張 8 9/25　字数 207,000

一九五八年五月第一版

一九五八年五月南京第一次印刷

印数 1—5,500

統一书号： 13100·33

定　　价：(8)八角五分

第四章　不定积分及基本积分法

第五章　广义积分及定积分近似求值法

第六章　微积分的应用

第七章　无穷級数簡論

第八章　二元函数微积分法介紹

第九章　微分方程

第一章　基本概念

微积分学是着重研究函数的。所以函数概念，就是本書的基本概念。与它密切相关的一些概念中，以常量，变量和对应概念最为重要。下面，我們就一般的观点来談常量和变量；就最簡單的情况来建立对应概念；并且由此引出函数概念，进一步研究一些函数的簡單性質。

在建立函数概念的过程中，不可避免的，我們要接触到它的变化狀况。事实上，函数变化狀况的規律正是反映了它的本質，我們只有了解了本質的东西，才有可能正确地运用它們。但是在研究"不停地变化着"的对象时，变化趋势就形成了研究中的关鍵問題。一旦我們掌握了它的变化趋势，不管它采取那些多种多样的变化方式，我們都能作出正确的判断。极限概念就是研究函数的变化趋势的。所以极限概念也是微积分学的基本概念。

然后，我們討論了"連續函数"。此后，在我們的闡述中，完全是以这类函数为对象的(除了极个别的例外)。

由于在这一章中，敍述了許多名詞的定义，引証了不少定理，讀者应当耐心地体会，反复査閱，这对于以下各章的了解，將会有很大的帮助。

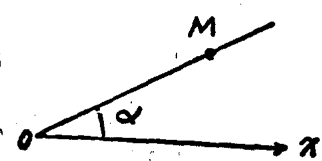
I. 函　　数

§1. 变量和常量

定义：在問題中，①凡与已給条件无关，或②在已給条件下，取某一确定数值的量，叫做"常量"。

显然，在这个定义中常量分兩类，习慣上把①叫做"絕对常数"。②叫做"参数"，或"泛定常数"。

例如：圓周与直徑之比：这个比是 π，是絕对常数，因为无論就什么圓来說，这个比总是 π。



（图 1）

又如：点 M 沿着与水平綫成 α 角的直綫

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

运动，如图1，則 α 是参数。因为 α 只是在这样的条件下，取确定的値。如果另画一个图，則 α 之値可以和这个图中的 α 之値不同。显然，OM 这段距离不是常量，因为問題說明了 M 是运动着的。它不受已給条件限制而取确定的値，只受着已給条件的限制来变动（沿着与水平綫成 α 角的直綫变动）。

定义：在問題中，能取不同数値的量，叫做"变量"。

值得注意的是：区别变量和常量（特别是参数）对于每个問題来說，是不同的。下面的例子，讀者宜留意。

例 1：欧姆定律：$U=IR$

若是我們要研究的是在某一类导綫上 U 和 I 的关系，那末，R 是参数，而 U 和 I 是变量（成正比例变化的两个量）。如果我們要研究的是在一定电压之下 I 和 R 的关系，則 U 是参数，而 I 和 R 是变量（成反比变化的两个量）。

例 2：$y=mx+b$

这是直綫的方程。如果我們要研究的是点 (x,y) 遵循这个方式变化的軌跡，那么点 (x,y) 的軌跡是直綫，x, y 是变量（它們之間的变化，是要依照这个方程的），m 和 b 是参数。假如我們要研究的是这个直綫的位置，因为 m 不同，直綫的位置就不同；b 不同，直綫的位置也不同；所以就要把 m 和 b 看成变量（在此，m 和 b 也是要符合着方程来变化的），而把 x, y 看成参数。

§2. 数　　軸

无論是变量或常量，它們的值都用数目来表示，因此我們就得首先了解一些数目的普通性質。此后的研究，都在实数的基础上进行，所以我們先来看看实数。

我們知道实数包含两种数，一种是有理数，一种是无理数。凡是能用 $\frac{q}{p}$（p 和 q 是整数）来表示的数，叫做"有理数"；凡不能用 $\frac{q}{p}$ 来表示的数，叫做"无理数"。合有理数与无理数的全体，叫做"实数"。

首先我們来看看是否有这样的数，不能用 $\frac{q}{p}$ 来表示，假如有的，那末

无理数的存在，就是无可怀疑的了。

命题：$\sqrt{2}$不能用$\frac{q}{p}$（p和q是无公因子的整数）来表示。

証明：假如命题不眞，可設

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p} \qquad p \text{ 与 } q \text{ 无公因子。}$$

于是 $$2=\frac{q^2}{p^2} \qquad q^2=2p^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

因为 $2p^2$ 是偶数，故 q 亦必須为偶数。

令 $q=2q_1$ $\qquad \therefore \quad q^2=4q_1^2$

于是 $$4q_1^2=2p^2$$
$$p^2=2q_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

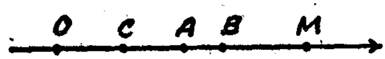
由 (B) 式，可知 p 亦为偶数，因此 p 与 q 有公因子，此与所設矛盾，故命题成立。

一般説来，凡开方不尽的数，例如，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$……都是无理数。反过来説，并不成立，例如 π。

对于实数来說，有些簡單而很重要的性質，如：实数中无最大的数；任意二实数之間，必有实数存在（这个性質叫做实数的密集性）；对实数施行加，减，乘，除（0不能作除数）的結果，仍是实数，大家都用过，我們不一一証明了。

現在来研究一种对应，把实数的数，用来和直綫上的点構成一一对应。这种对应有助于我們此后的研究，同时，也解决了解析几何上能用一对数目表示点的坐标这个根本問題。

在平面上，任取一条直綫，在上面定出一个量度开始之点 O，取定一个單位尺度 OA，再定出一个正向，如图2。



（图2）

令数0对应 O，数1对应 A。而凡与数 x 对应的点 M，应满足等式 $\frac{OM}{OA}=x$。按此規則，显然，数$\frac{1}{2}$对应 OA 的中点 C，任意正有理数都可以按照几何作图的方法，在直綫的正方向上找出一点来和它对应；任意的負有理数，也可以在負方向上找出一点来和它对应。这样对应以后，是不

是直綫上的点都用过了呢?显然不是的。假如取 OB 等于單位正方形的对角綫之長,那末还沒有一个有理数对应它,我們就取 $\sqrt{2}$ 对应 B,这样把无理数也对应了直綫上的点,并且无理数所对应的点显然不能和有理数所对应的点相同。于是每一个实数都可以在綫上找出一点来和它对应,并且数不同,所对应的点也不同;反过来,在綫上任取一点 M,那末 OM 的距离是一定的,我們就取代表 OM 的数(假如 OM 是在正向上,取正数;OM 在負向上,取負数)来对应它,于是綫上每有一点,就有一个数来对应,并且点不同,对应的数也不同。这种对应(每有一数,就有一个唯一的点与之对应;每有一点,就有唯一的数与之对应)叫做一一对应。于是在这个情況下,可以用直綫上的点来代表数,也可以用数来表示直綫上的点,而不致发生誤会。这样的直綫叫做"数軸"。

我們用 (a, b) 表示在数軸上介于 a, b 之間所有的点(不包含 a,b 两

(图3)

(图4)

点),也就是説 (a,b) 表示适合 $a<x<b$ 的全部实数,称 (a,b) 为"开区間"。$[a, b]$ 表示数軸上包含 a, b 两点在内而介于 a, b 之間的全部点,也就是适合 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全部实数,称 $[a,b]$ 为"閉区間"。

(图5)

由上可知,oa 的距离就是 a; ob 的距离就是 b; 因此,ab 的距离是 $ob-oa$ 即 $b-a$。又由于 $|b-a|=|a-b|$,所以在直綫上二点間的距离,用此二点坐标之差的絕对值来表示。(无論此二点在正向或在負向)。

关于絕对值,我們再談一点它的性質,当然絕对值总是表正数。因此

1) 和的絕对值不大于絕对值之和。

即 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

2) 差的絕对值不小于絕对值之差。

即 $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$

3) 积(或商)的絕对值等于絕对值之积(或商)。

即 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

或 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

事实上在 1) 和 2) 中，若 a, b 的符号相异，则不等式成立；若 a,b 的符号相同，则等式成立。

例：1. $|3+(-2)| < |3| + |2|$

因 $|3+(-2)| = 1$ 而 $|3| + |2| = 5$

2. $|5-3| = \big||5| - |3|\big|$ 因 $|5-3| = 2$；$\big||5| - |3|\big| = 2$

3. $|5-(-3)| > \big||5| - |3|\big|$

因 $|5-(-3)| = 8$；$\big||5| - |3|\big| = 2$

§3. 函数及其定义域

在自然科学和应用科学中，我們常常碰到一組变量，其中一个依另一个的变化而变化，当我們知道它們之間的变化关系之后，就可以把一个变量作为另一个变量的函数。例如在电阻一定的情形下，电流可作为电压的函数，其变化的对应关系，是 $I=\frac{U}{R}$。一般說来，若有一組变量 x, y，其中 y 依 x 的变化而变化。我們就說 y 是 x 的函数，記作 $y=f(x)$。式中 f 是指某一个对应关系。

函数 $y=f(x)$，其中 x 是自变量，这就是說，一个 x 之値，通过 f 这个关系，对应着一个或多个确定的 y 值。如果每一个 x 之值，只对应着一个 y 值，那末叫 $y=f(x)$ 是單值函数*。否則称 $y=f(x)$ 是多值函数。同样的，$f(x,y)=0$ 也可以定义一个函数，不过在这个式子中，可以任取一个为自变量，我們称做“隐函数”，而 $y=f(x)$，就叫做“显函数”。

例： $y=x^2$ 显函数。

$x^2+2xy-y^2=0$ 隐函数。

并不是所有的 x 之値，都能使 $f(x)$ (或 y) 有确定之值，在这种情形下，

* 注：为了方便起見，在本書中，除了特别声明的以外，我們講的“函数”都指單值函数。

我們有必要把能使 $f(x)$ 有意义的 x 之値，和不能使它有意义的 x 之値，拿来分开。例如：$y=\log x$，在此，因 0 和負数不能取对数，所以 x 只在正値的时候，函数才有意义。又如 $\sqrt{1-x}$，只有当 $1-x\geqslant 0$ 时，开方才有意义（因为我們的討論，是限制在实数上），所以仅在 $x\leqslant 1$ 时，函数才有意义。

使函数有意义的那些 x 之値集在一起，叫做"函数的定义域"。

例： $y=\sqrt{1-x^2}$ 其定义域是 $|x|\leqslant 1\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$

$y=\sin x$ 其定义域是 x 为任何值。

記号 $f(a)$，表示当 $x=a$ 时，$f(x)$ 所取之値，如 $f(x)=\log x$，則

$f(1)=0$，$f(10)=1$，又如 $f(x)=\sin x$，則 $f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=1$。

如上所述，可見要确定一个函数，只要先确定：

1) 函数的定义域，

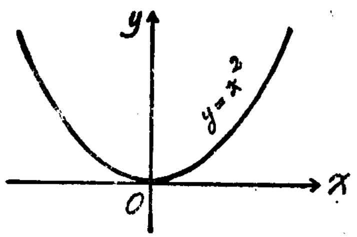
2) 函数的对应規律，

函数也就随之而确定了。

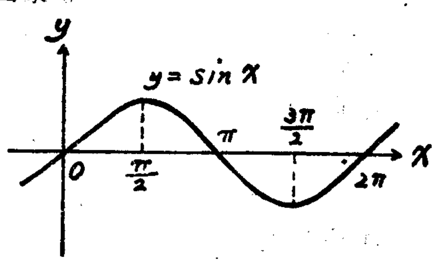
不过，在考察問題的时候，問題所給定的条件，会給予算式中的变量以一定的限制，在了解函数的定义域时，就要考虑到此种情形，例如：$S=\frac{1}{2}gt^2$，作为算式而論，則不管 t 是什么实数，S 总是实数；但如果認为它是表示自由落体的路程和时間的关系，那么 t 的值就不能小于零，在此，函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域，就只能是 $t\geqslant 0$ 了。

§4. 函数的漸增、漸减及其图象

在解析几何中，我們已經知道，用图形来表出一个方程中兩个变量的变化关系，这种图形也叫做"函数的图象"。



$y=x^2$。
（图 6）



$y=\sin x$
（图 7）

从图 6 的抛物綫来看，在第一象限的一支，x, y 的变化情况是当 x 不断增加时，y 之値也不断的增加，这样就使曲綫形成上昇的情况，而在第二象限的一支，则情形恰好相反，当 x 不断增加时，y 不断的減小，因而曲綫在这部分形成下降的情况。在图 7 中，也有同样的情形，在区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 中，曲綫是上昇的，在区間 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 中是下降的，等等。

从图象上来識別，仅仅只是感性認識，为了提高到理性認識上，我們給出下列定义。

定义：函数 $f(x)$，在其定义域内，任取 x_1, x_2

若当 $x_1 < x_2$ 时，就有 $f(x_1) < f(x_2)$

则 $f(x)$ 称为增函数。

若当 $x_1 < x_2$ 时，就有 $f(x_1) > f(x_2)$

则 $f(x)$ 称为减函数。

注意：①我們当然可以把函数的定义域，分成几个部分，使得函数在这些部分上是增函数或減函数。那些使函数为增函数（或減函数）的自变量之値所構成的区間，叫做"函数的單調区間"。

②若函数在其全部定义域上都是增函数（或減函数），称之为"單調函数"。

例：1．$y = \log x \qquad x > 0$

任二正数 x_1, x_2

若 $x_1 < x_2$，显然有 $\log x_1 < \log x_2$

$\therefore$ $y = \log x$ 是單調增函数。

2．$y = \sin x \qquad [0, 2\pi]$

在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 中，函数为增函数。

在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 中，函数为減函数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在$\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$中，函数为增函数。

$\therefore$ $y=\sin x$ 之單調区間为

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$$

§5. 反　函　数

就函数 $y=f(x)$ 来看，按定义所示，x 是自变量。当 x 取某一值时，通过 f 这关系，对应着一个（或多个）函数 y 之值。在这一个过程中，是先取 x，然后根据 x 来确定 y。

在許多情況下，我們需要把函数和自变量的关系对調过来。例如，在眞空中的自由落体运动方程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，在此 t 是自变量，距离 s 是函数，从这个函数关系中，我們所研究的是“在不同的时間中，物体所經过的距离”，假如我們想由距离来确定时間，那末就得由上式解 t，得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$（当然在这个情形下，根号前的負号必須弃去，因为就問題的本义来談，t 应是正値），就是把 t 看成 s 的函数，便于根据 s 之値来确定 t。我們把

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

和

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

这一組函数，叫做互为反函数的函数組。如果取定 (A) 式为直接函数，那末 (B) 式就叫做 (A) 的反函数。反之也是这样。

一般地說来，函数 $y=f(x)$，由它解出 x，如可得

$$x=\phi(y),$$

那末就得到了互为反函数的函数組。例如 $y=x^2, x=\pm\sqrt{y}$；$y=a^x$，$x=\log_a y$；$y=\sin x$，$x=\arc\sin y$；等等。通常在这样的函数組中，总取函数式和性質較明显簡單的一个为直接函数。

就函数的图象来說，假如在坐标上，文字 x 所取之值由横軸表示，文字 y 所取之值由縱軸表示，則函数組

$$y=f(x)$$
$$x=\phi(y)$$

的图形是同一的，事实上，凡适合于 $y=f(x)$ 的 (x,y)，都满足 $x=\phi(y)$。

但是就函数关系而言，对 $x=\phi(y)$，应把 y 作为自变量来看，把 x 作为函数，这样一来，仍然要求用縱軸来表示 y 的值，而横軸表示 x 的值就显得很不方便了。因为在同一組坐标上，对于 $y=f(x)$ 来說，横軸表示自变量的值，而縱軸表示函数之值；对于 $x=\phi(y)$ 来說，情形則恰好相反。

为了消除这种不便的情形，我們規定由横軸表自变量的值（用 x 軸来称呼它），而縱軸表函数的值（用 y 軸来称呼它），于是既不違反慣例，又满足了我們的要求，只是在这种規定之下，函数 $x=\phi(y)$ 就应当換写成为 $y=\phi(x)$ 了。显然 $y=\phi(x)$ 仍然是 $y=f(x)$ 的反函数。因为反函数的确定，主要是看函数关系 f 和 ϕ 是否互逆。这样变过写法以后，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=\phi(x)$ 的图形，就不再是同一的了，我們可以証明，在这种情形下，它們的图形是对称于直綫 $y=x$ 的。

在 $y=f(x)$ 上，任取一点 $M(a,b)$，显然 $N(b,a)$ 是 $y=\phi(x)$ 上的一点，

于是，綫段 MN 的斜率，就是 $\dfrac{a-b}{b-a}=-1$

$\therefore$ 綫段 MN 垂直于直綫 $y=x$

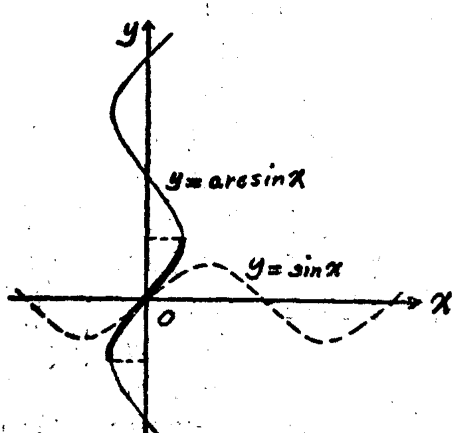
又綫段 MN 的中点 D 的坐标是 $D\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

$\therefore$ 直綫 $y=x$ 垂直平分綫段 MN，亦即 M, N 两点是对称于 $y=x$ 的。

由于 M 是在 $y=f(x)$ 上任取的一点，故得 $y=f(x)$ 的图形和 $y=\phi(x)$ 的图形是对称于 $y=x$ 的。

例如：$y=\sin x$, $y=\text{arc}\sin x$

值得注意的是，单值函数的反函数，并不一定是單值函数，如上例，$y=\sin x$ 是單值函数，而其反函数并非單值的，实則在



（图 8）

$y=\arc\sin x$ 中，对于任一給定的 x 都有无限多 y 值与之对应，这种情形使得我們很不方便。但如果对于每一給定的 x 值，規定在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上去找对应的 y，那末，y 值就被唯一地确定了。我們叫这一函数

$$y=\operatorname{arc}\sin x, \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

为反正弦的"主値函数"。同理

$$y=\operatorname{arc}\cos x \qquad 0\leqslant y\leqslant\pi$$

$$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x \qquad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

各为反余弦和反正切的主値函数。

§6. 初 等 函 数

由于微积分学的主要研究对象是函数，所以我們在知道了一些函数概念以后，有必要再問究竟我們的研究从何着手呢？函数的数目是如此其众多，如果不給以分类，我們就会无从下手。在此，我們把函数分成兩类，一类叫做初等函数，一类叫做非初等函数。并且此后我們是在初等函数上进行工作，所以我們来了解一下什么样的函数是初等函数。

首先我們規定下列函数为基本初等函数：

1. 冪　函　数：　x^n　(n 为有理数)
2. 指数函数：　a^x　$(a>0, a\neq 1)$
3. 对数函数：　$\log_a x$　$(a>0, a\neq 1)$
4. 三角函数：　$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x\cdots\cdots$
5. 反三角函数：*　$\operatorname{arc}\sin x, \operatorname{arc}\cos x, \operatorname{arc}\operatorname{tg} x,\cdots\cdots$

以上五种函数，都是我們熟知的函数，关于它們，不再詳述。

其次我們来建立复合函数概念。若有三个(或 n 个)变量 u, y, x，其彼此間的变化关系为 u 依 y 变化，而 y 依 x 变化，于是按函数定义可得

$$u=\phi(y)$$
$$y=f(x)$$

因此 x 的变化直接确定 y 的变化，間接确定 u 的变化。事实上由上

* 注：我們按一般的习慣，在反三角函数上，以小写其首一字母 a 表主値函数。

二式可得

$$u=\phi[f(x)]$$

这样我們就說 u 是"x"的复合函数。(y 叫做中間变量)

例如：1. $u=\log_a(x-1)$

u 是复合函数。因为上式表函数

$$u=\log_a y$$

$$y=x-1$$

的复合情形。

2. $y=\log_a\sin\sqrt{x-1}$

在此 $y=\log_a v$, $v=\sin\omega$

$\omega=\sqrt{t}$ $t=x-1$

v, ω, t 都是中間变量，x 是自变量，y 是函数。

現在我們来定义初等函数。

定义：对基本初等函数，施行有限次数的四則运算和函数复合步驟所得的函数，叫做初等函数。

例如：

$$y=3x^2+5x-1$$

$$y=\sin x^2-\log_a\sqrt{x-1}+a^x$$

$$y=\text{arc tg}x-\log_a 2x$$

$$y=a^x\cdot\text{arc tg}x+5$$

$$y=\frac{\text{arc sin}x}{(x-1)\sin x}$$

等等，都是初等函数。

习 题

1. 已知 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

求 $f(0), f(\sqrt{2}), f(a), f(y), f(x+h)$,

2. 已知 $f(x)=a^x$

試証 $f(s)\cdot f(t)=f(s+t)$

3. 已知 $f(x)=x^3+1$

求 $f(t^2)$, $[f(t)]^2$

4. 已知 $y=\sin x$, $v=\log y$, $u=\sqrt{1+v^2}$

把 u 写成 x 的函数。

5. 把函数 $y=\log\sin^3\sqrt{x}$ 的复合情形，分解出来。

6. 求下列函数的定义域：

a. $y=\log(x+3)$　　b. $y=\sqrt{5-2x}$

c. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$　　d. $y=\sqrt{\log(x^2-1)}$

e. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

7. 利用区間記号，表出下列不等式之解：

a. $|x-1|<2$　　b. $|3x-2|<1$　　c. $\dfrac{1}{|x+1|}>2$

8. 若三角形之底边 BC 固定，而頂点 A 沿着与 BC 平行的直線运动，試区别下列各量，何者为常量，何者为变量？

a) 三內角之和，　b) 三角形之面积，　c) $\angle ABC$

d) 頂角 $\angle BAC$　e) 在 BC 边上之高，　f) 在 AB 边上之中線。

2. 極　限

§1. 极限定义

在自然数 1，2，3，……n，……中，我們知道沒有最大的数，就是說对于任意取得的一个正数，在自然数中会有数大于它。这个概念有助于研究变量的变化趋势。

一个变量 u，假如在它的变化过程中，自某一时刻开始，其絕对值总保持大于任意預先指定的正数 M，即

$$|u|>M \quad \text{自某一时刻开始。}$$

就叫 u 为无穷大量。称这样的变化过程为 u 趋于无穷大，用記号 $u\to\pm\infty$ 表示。在这里我們并无意思說符号 ∞ 是数，只仅仅用它来表达 $|u|$ 无限增大而已。于是我們可以借用这个符号来作一些用途。例如 $-\infty<x<\infty$ 或 $(-\infty,\infty)$，表示全部实数或全部数軸。

若变量 u 在其变化过程中，其絕对值总不大于某一正数：即

$$|u| \leqslant M$$

称 u 为有界变量。

例：1．$u=\frac{n}{3}\quad(n=1,2,3\cdots\cdots n\cdots\cdots)$

則 u 是无穷大量。

因无論給 M 为任何正数。

使 $\left|\frac{n}{3}\right|>M$，　只須 $n>3M$ 就行了。

2．$u=\sin x\qquad -\infty<x<\infty$

在此，u 是有界变量，因

$$|u|=|\sin x|\leqslant 1,\qquad -\infty<x<\infty$$

現在我們来研究极限。

平常我們說变量 u 无限地接近于一个常数 A（在其变化过程中）或者說变量 u 趋于 A，这些話的具体内容，究竟包含着什么？或者当变量 u 在其变化过程中，它的变化趋势是否可以用这些話来說明呢？只要我們严格地規定了这些話的意义，对于后者的答复就是肯定的。

定义：变量 u 在其变化过程中，自某一時刻开始，它所可能具有之值，都适合 $|u-A|<\epsilon$，其中 ϵ 为任意預先指定的正数，而 A 是某一个确定的常数，則称 A 是 u 的极限。（在这样的变化过程中）用通常的符号来表示，就是

$$\lim u=A\qquad\qquad \text{或}\quad u\to A$$

注意：①在定义中，值得特别注意的是“自某一时刻开始”这句話、在我們确定 A 是极限的时候，需要指明那样的时刻标准是否存在。

②在定义中，并沒有告訴 A 究竟是怎样的数。只肯定了它是一个数，那末这个定义的作用，主要是檢驗所提出的数是否确为 u 的极限。至于 A 的找法，在这里是沒有提出的。

③ ϵ 是任意預先給定的正数，因为是正数，所以 $\epsilon>0$，但是它可以任意的小，不管所指定的 ϵ 是怎样小，自某一时刻开始，都要有 $|u-A|<\epsilon$ 成立。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com