# 模糊集与粗糙集

# Fuzzy Set and Rough Set

李丽红　李爽　李言　杨亚锋　编著

刘保相　审

清华大学出版社

# 模糊集与粗糙集

# Fuzzy Set and Rough Set

李丽红　李爽　李言　杨亚锋　编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

模糊数学与粗糙集理论已成为高等院校普遍开设的课程。本书结合编者多年的教学经验和亲身体会，本着通俗易懂的原则，简明扼要地阐述了模糊集合理论与粗糙集合理论的基本概念、基本方法及其简单应用和格序决策的基本方法，力求内容全面，条理清晰，概念明确，论证严谨，难度适中，适合广大工科专业研究生和本科高年级学生使用。



**图书在版编目（CIP）数据**

模糊集与粗糙集/李丽红、李爽、李言、杨亚锋编著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41492-6

Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①李… ②李… ③李… ④杨… Ⅲ. ①模糊集理论一研究 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 212922 号

**责任编辑：** 付弘宇 柴文强
**封面设计：** 常雪影
**责任校对：** 焦丽丽
**责任印制：** 宋 林

**出版发行：** 清华大学出版社
　　**网　址：** http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　址：** 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编：** 100084
　　**社总机：** 010-62770175　　**邮　购：** 010-62786544
　　**投稿与读者服务：** 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈：** 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　**课 件 下 载：** http://www.tup.com.cn，010-62795954
**印 装 者：** 清华大学印刷厂
**经　销：** 全国新华书店
**开　本：** 170mm×230mm　**印　张：** 12.75　**字　数：** 224 千字
**版　次：** 2015 年 12 月第 1 版　**印　次：** 2015 年 12 月第1次印刷
**印　数：** 1～1500
**定　价：** 35.00 元

产品编号：063946-01

# 前　言

随着科学发展的不断深入，人们对系统判别和推理的精确性要求越来越高，同时需要研究的关系也越来越复杂。经典集合理论对集合的定义逐渐显现出它的力不从心，模糊性成为不可忽视的因素。1965 年 L. A. Zadeh 的模糊集合论应运而生。模糊集合论是经典集合论进一步发展的必然产物。在“知识(人的智能)就是一种分类能力”观点的指引下，1982 年 Z. Pawlak 开创性地提出了粗糙集理论。该理论较强的定性分析能力使得它自问世以来，在知识获取、规则生成、智能控制等领域取得了巨大的成功。模糊集合论与粗糙集理论极大地促进了集合论的发展，丰富了集合论的内容，使集合论成为我们求解问题时不可或缺的理论工具。人类的活动离不开决策，尤其是数据科学的迅速发展，如何做出科学合理的决策是决策科学界十分关系的重要课题。格序决策运用格这一代数工具，对方案的排序拓展为格序结构，并构建格序行为公理体系。

全书共 7 章。第 1 章介绍了经典集合论的相关背景知识；第 2 章介绍了代数系统特别是格的基本概念；第 3 章详述了模糊集的基本理论与方法；第 4 章总结了模糊集的四大应用；第 5 章阐述了粗糙集理论的基本概念与内容；第 6 章简述了粗糙集理论在不确定性系统处理和规则提取等领域中的应用。第 7 章介绍了格序决策及行为公理体系。

本书的编写和出版得到华北理工大学应用数学重点学科的资助，华北理工大学刘保相教授在百忙之中审阅了本书，并提出了修改意见，数学专业研究生祝弘扬、寇春蕾、李明霞校对了全书。在此作者一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，且编写时间仓促，书中有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2015 年 3 月

# 目　　录

# 第 1 章　经典集合论简介

集合论是现代数学的基础。现代数学中几乎所有的分支都会用到集合这一概念。如果没有集合论的观点，很难对现代数学产生深刻理解。因此，集合论在数学中占据着极其重要的位置。

作为本书的预备知识，本章首先扼要地介绍经典集合和经典关系的一些必要的基本知识，但不作进一步的详细讨论。其次，简述了经典集合论、模糊集合和粗糙集理论的联系和各自的特点，使读者对模糊集合和粗糙集理论有初步的印象，以便以后的学习。

## 1.1　经典集合论

### 1.1.1　基本概念

集合，如同几何学中的点、线、面一样是数学的最基本概念，很难再用其他概念给出精确定义。我们不妨理解为所谓集合是由具有明确涵义的事物(或个体)组成的整体，集合里的每一个事物称为集合的元素。通常用大写字母 $A,B,\cdots,S$ 表示集合，用小写字母 $a,b,\cdots,z$ 表示集合的元素。如果 $a$ 是集合 $S$ 的元素，则称 $a$ 属于 $S$，记作 $a\in S$；如果 $a$ 不是集合 $S$ 的元素，则称 $a$ 不属于 $S$，记作 $a\notin S$。对任意元素 $a$ 与任意集合 $S$ 来说，或者 $a\in S$，或者 $a\notin S$，二者必居其一而且只居其一，这就是经典集合论的基本特征。

设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，如果 $B$ 的所有元素都是 $A$ 中的元素，则称 $B$ 是 $A$ 的子集，记作：$B\subseteq A$；如果 $B$ 是 $A$ 的子集，而且 $A$ 中至少有一个元素不是 $B$ 的元素，则称 $B$ 是 $A$ 的真子集，记作 $B\subset A$。当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$

时，称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$。

设集合 $A$ 是任意的一个集合。将 $A$ 的每一个子集作为一个元素组成一个新的集合，称这个新的集合为集合 $A$ 的幂集。

不含任何元素的集合称为空集合，用 $\varnothing$ 表示。空集是任何集合的子集，且空集是唯一的。一个集合 $A$ 如果由有限个元素构成，则称为有限集合。反之为无限集合。

集合主要用以下三种方式描述：

(1) 列举法：将集合的元素全部列出。

(2) 构造法：写出作为集合的元素应具备的条件，用条件表示集合的特征。

(3) 归纳法：用递归定义描述集合。

### 1.1.2 集合的运算

交、并、补是集合最基本的三种运算，下面简要介绍这几种运算的定义及基本公式。

**定义 1.1** 设 $A$、$B$ 是任意两个集合

(1) 由 $A$ 和 $B$ 中所有相同元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的交，记作 $A\cap B$。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

(2) 由属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的并，记作 $A\cup B$。即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

(3) 由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的差集，记作 $A-B$。即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

(4) 全集 $U$ 对集合 $A$ 的差集 $U-A$，称为 $A$ 的补集，记作 $A^c$。即

$$A^c = U - A = \{x \mid x \in U \text{ 但 } x \notin A\}$$

**定义 1.2** 设 $U$ 是全集，$A\subseteq U$，定义映射 $\varphi_A: U\rightarrow\{0,1\}$，令

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称 $\varphi_A$ 为集合 $A$ 的特征函数。

特征函数 $\varphi_A(x)$ 刻画了集合 $A$ 中元素的隶属情况，故也称为 $A$ 的隶属函数。$\varphi_A$ 在 $x$ 处的值 $\varphi_A(x)$ 称为 $x$ 对 $A$ 的隶属度。当 $x\in A$ 时，$x$ 的隶属度 $\varphi_A(x)=1$，表示 $x$ 绝对属于 $A$；当 $x\notin A$ 时，$x$ 的隶属度 $\varphi_A(x)=0$，表示 $x$ 绝对不属于 $A$。

隶属函数的优点在于可以将集合转化为函数，把集合的交、并、补等运算转化为隶属函数的相应运算。

隶属函数具有下列运算性质：

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow\varphi_A(x)\leqslant\varphi_B(x)$，即集合 $B$ 包含集合 $A$ 等价于集合 $B$ 对每一个元素的隶属度均大于或等于集合 $A$ 中对应元素的隶属度。

(2) $\varphi_{A\cup B}(x)=\max(\varphi_A(x),\varphi_B(x))$，即 $A\cup B$ 的隶属函数等于 $A$、$B$ 两个集合的隶属函数的最大值。

(3) $\varphi_{A\cap B}(x)=\min(\varphi_A(x),\varphi_B(x))$，即 $A\cap B$ 的隶属函数等于 $A$、$B$ 两个集合的隶属函数的最小值。

(4) $\varphi_{A^c}(x)=1-\varphi_A(x)$，即 $A^c$ 的隶属函数等于1减去 $A$ 的隶属函数。

**例 1.1**　设全集 $U=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,c,d\}$，$B=\{b,c\}$，求 $A$ 和 $B$ 的特征函数。

**解**　由定义可知，对子集 $A$ 有

$$\varphi_A(a)=\varphi_A(c)=\varphi_A(d)=1,\quad \varphi_A(b)=0,$$

故 $\varphi_A=\{(a,1),(b,0),(c,1),(d,1)\}$。

对子集 $B$ 有

$$\varphi_B(b)=\varphi_B(c)=1,\quad \varphi_B(a)=\varphi_B(d)=0,$$

所以 $\varphi_B=\{(a,0),(b,1),(c,1),(d,0)\}$。

下述恒等式是集合的一些基本定律，它对任何集合都成立。

(1) 幂等律　$A\cap A=A, A\cup A=A$

(2) 结合律　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(3) 交换律 $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$

(4) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(5) 互补律 $A\cap A^c=\Phi, A\cup A^c=U$

(6) 同一律 $A\cap U=A, A\cup\Phi=A$

(7) 零一律 $A\cap\Phi=\Phi, A\cup U=U$

(8) 吸收律 $A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$

(9) 德·摩根律 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c, (A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

(10) 双重否定律 $(A^c)^c=A$

下面对分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$进行证明,其他定律读者可自行证明。

**证**

$$\begin{aligned}\varphi_{A\cup(B\cap C)}(x)&=\varphi_A(x)\vee\varphi_{(B\wedge C)}(x)\\&=\varphi_A(x)\vee(\varphi_B(x)\wedge\varphi_c(x))\\&=(\varphi_A(x)\vee\varphi_B(x))\wedge(\varphi_A(x)\vee\varphi_C(x))\\&=\varphi_{A\cup B}(x)\wedge\varphi_{A\cup C}(x)\end{aligned}$$

故 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

证毕。

下面介绍一种特殊形式的集合——卡氏积

**定义 1.3** 任意两个元素 $x,y$ 按次序排列形成的序列,称为序偶,记作 $(x,y)$。

**定义 1.4** 集合 $A$ 和 $B$ 的笛卡儿积(简称卡氏积或直积)用 $A\times B$ 表示,它是以序偶$(x,y)$为元素构成的集合,其中 $x$ 取自集合 $A$,$y$ 取自集合 $B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

**例 1.2** 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{a,b,c\}$,求 $A\times B$,$B\times A$,$A\times A$。

**解** $A\times B=\{1,2\}\times\{a,b,c\}$

$=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$$B \times A = \{a, b, c\} \times \{1, 2\}$$
$$= \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$$
$$A \times A = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

由例题我们可以看出笛卡儿积对交换律不成立，易证它对结合律也不成立。

# 1.2 经典关系

## 1.2.1 关系的基本概念及性质

我们已经知道以序偶为元素的笛卡儿积是一种特殊的集合，而关系的数学定义是用序偶和笛卡儿积表示的。那么，什么是关系呢？

**定义 1.5** 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，称笛卡儿积 $A \times B$ 的任意一个子集 $R$ 为 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。对任意元素 $x, y$，如果 $(x, y) \in R$ $(x \in A, y \in B)$，则称元素 $x$ 和元素 $y$ 满足关系 $R$，记作 $xRy$；如果 $(x, y) \notin R$ $(x \in A, y \in B)$，则称元素 $x$ 和元素 $y$ 不满足关系 $R$，记作 $x \not R y$。特别地，当 $A = B$ 时，称 $A$ 到 $B$ 的二元关系 $R$ 为集合 $A$ 上的一个二元关系。

关系可以具有以下性质：

(1) 自反性　$\forall x \in A$，均有 $xRx$；

(2) 反自反性　$\forall x \in A$，均有 $(x, x) \notin R$；

(3) 对称性　$\forall x, y \in A$，若有 $xRy$，必有 $yRx$；

(4) 反对称性　$\forall x, y \in A$，若有 $xRy$，且 $y \not R x$，则 $x = y$；

(5) 传递性　$\forall x, y, z \in A$，若有 $xRy$ 和 $yRz$ 时，必有 $xRz$。

## 1.2.2 关系的运算

关系也是一个集合，当然可以对它进行集合的交、并、补等运算，运算结果产生一个新的关系。举例说明如下：

**例 1.3** 设 $R_1$，$R_2$ 为集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的两个关系，其中 $R_1 = \{(1,1),$

$(1,3),(2,4),(3,1)\}$,$R_2=\{(1,2),(2,4)\}$,则

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1)\} \cap \{(1,2),(2,4)\} = \{(2,4)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(1,2)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$$

$$\begin{aligned} R_1^c &= A \times A - R_1 \\ &= \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2), \\ &\quad (3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\} \end{aligned}$$

关系是一种特殊的集合,它以序偶作为元素,加之其本身特有的性质,使得关系除了满足集合的基本运算外,还产生了一种新的运算——关系的合成运算。

**定义 1.6** 设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的关系,$S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的关系,则将从集合 $A$ 经集合 $B$ 到集合 $C$ 的关系称为 $R$ 与 $S$ 的合成关系,记作 $R \circ S$,即

$$R \circ S = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C, \exists b(b \in B, aRb, bSc)\}$$

求 $R \circ S$ 的运算称为关系的合成运算。

合成关系的性质:

(1) 合成运算满足结合律,即 $(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$;

(2) 合成运算不满足交换律,即 $R \circ S \neq S \circ R$;

(3) 合成对并运算满足分配律,即

$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

(4) 设 $R$ 为集合 $A$ 到集合 $B$ 的关系,$I_A$ 为 $A$ 中的恒等关系,$I_B$ 为 $B$ 中的恒等关系,则

$$I_A \circ R = R \circ I_B = R$$

**例 1.4** 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,$C=\{1,2,3,4,5\}$,$R$ 为 $A$ 到 $B$ 的关系,$S$ 为 $B$ 到 $C$ 的关系,且 $R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$,$S=\{(1,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,3),(4,5)\}$,求 $R \circ S$。

**解** $$1R2 \text{ 与 } 2S3 \rightarrow 1(R \circ S)3$$

$$2R1 \text{ 与 } 1S2 \rightarrow 2(R \circ S)2$$

$$2R3 \text{ 与 } 3S1 \rightarrow 2(R \circ S)1$$

$$2R3 \text{ 与 } 3S2 \rightarrow 2(R \circ S)2$$

$$3R3 \text{ 与 } 3S1 \rightarrow 3(R \circ S)1$$

$$3R3 \text{ 与 } 3S2 \rightarrow 3(R \circ S)2$$

所以，$R \circ S=\{(1,3),(2,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$。

请思考合成对运算是否具有分配律?

### 1.2.3　等价关系与相容关系

等价关系与相容关系是两种特殊的关系，在一定条件下相容关系可以转化为等价关系，在以后的章节中我们将给出详细的介绍。本节主要介绍等价关系和相容关系的基本内容。

**定义 1.7**　若定义在集合 $A$ 上的一个关系 $R$ 是自反的、对称的、传递的，则称 $R$ 为 $A$ 上的等价关系。

**例 1.5**　设 $I$ 为整数集，$R=\{(x,y)\mid x\equiv y(\mathrm{mod}\ k)\}$，证明 $R$ 是等价关系。

**证**　要证明 $R$ 是等价关系，只需证明 $R$ 具有自反性、对称性和传递性。

(1) $\forall a\in I$，因为 $a-a=k\cdot 0$，所以 $(a,a)\in R$，即 $R$ 是自反的；

(2) 设任意 $a,b\in I$，若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ k)$，即 $a-b=k\cdot t$（$t$ 为整数），则

$$b-a=-k\cdot t=k\cdot(-t)$$

所以 $b\equiv a(\mathrm{mod}\ k)$，即 $R$ 是对称的；

(3) 设任意 $a,b,c\in I$，若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ k)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\ k)$，即 $a-b=k\cdot t$，$b-c=k\cdot s$（$t,s$ 为整数），则

$$a-c=a-b+b-c=k\cdot t+k\cdot s=k\cdot(t+s)$$

即 $a\equiv c(\mathrm{mod}\ k)$，所以 $R$ 是传递。

由(1)、(2)、(3)可知 $R$ 是等价关系。

证毕。

当一个关系不满足等价关系的传递性时，就得到下面研究的另一种关

系——相容关系。

**定义 1.8** 设 $R$ 是集合 $A$ 上的关系，如果关系 $R$ 同时具有自反性、对称性，那么就称 $R$ 是集合 $A$ 上的一个相容关系。

等价关系是一种特殊的相容关系。

**例 1.6** 设集合 $B=\{a,b,c,d\}$，则集合 $B$ 的幂集 $A$ 是一个有 $2^4=16$ 个元素的集合，取集合 $A$ 的一个子集 $A_1$

$$A_1=\{\{a\},\{d\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,c,d\}\}$$

在集合 $A_1$ 上如下定义的关系 $R$

$R$：$\forall x,y\in A_1,(x,y)\in R\Leftrightarrow x$ 和 $y$ 含有 $B$ 中至少一个相同的元素。

如果将集合 $A_1$ 中的元素简记为

$$x_1=\{a\},\quad x_2=\{d\},\quad x_3=\{a,b\},\quad x_4=\{b,c\},\quad x_5=\{b,c,d\}$$

那么，关系 $R$ 可以用通常序偶的形式表示如下：

$$\begin{aligned}R=\{&(x_1,x_3),(x_3,x_1),(x_2,x_5),(x_5,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_3),\\&(x_3,x_5),(x_5,x_3),(x_4,x_5),(x_5,x_4),(x_1,x_1),(x_2,x_2),\\&(x_3,x_3),(x_4,x_4),(x_5,x_5)\}\end{aligned}$$

显然，这样定义的关系 $R$ 是集合 $A$ 上的相容关系。

### 1.2.4 划分

下面给出划分的定义。

**定义 1.9** 设 $A$ 是一个给定的非空集合，$S_1,S_2,\cdots$皆为 $A$ 的非空子集。如果

$$S_i\cap S_j=\Phi(i\neq j),\qquad \bigcup_i S_i=A$$

就称$\{S_1,S_2,\cdots\}$是集合 $A$ 的一个划分 $\pi$，每个非空子集 $S_i$ 称为该划分的一个划分块。

**例 1.7** 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则

$$\pi_1=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\},\quad \pi_2=\{\{1\},\{3\},\{2\},\{4\},\{5\}\},$$

$$\pi_3=\{\{1\},\{2,3,4,5\}\},\quad \pi_4=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\},$$

$$\pi_5=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\},\quad \pi_6=\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$$

均为 $A$ 的划分。

由此可见，给定一个非空集合，它的划分不是唯一的，但最大划分(即块数最多的划分)和最小化分(即块数最少的划分)却是唯一的。

设 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_i\}$ 和 $Q=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_j\}$ 是集合 $A$ 上两个任意的划分，如果对于每一个 $S_i\in S$，均有 $Q_j\in Q$ 使 $S_i\subseteq Q_j$，则称划分 $S$ 为 $Q$ 的加细。

根据定义，我们知道例 1.7 中，$\pi_2$ 细分 $\pi_1,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$。

**定义 1.10** 设 $R$ 是集合 $A$ 上一个等价关系，则对任意元素 $a\in A$，$A$ 的如下子集

$$[a]_R=\{x\mid x\in A,(x,a)\in R\}$$

称为等价关系 $R$ 的以 $a$ 为代表元的一个等价类。

**注**：当只讨论一个等价关系时，无须区别同一代表元所代表的不同等价关系的等价类，这时可以将标识关系 $R$ 的下标省去，将等价类简记为 $[a]$。

等价类具有如下性质：

(1) 对任意 $a\in A$，必定存在某个等价类 $[x]$，使 $a\in[x]$。反过来说，任何一个等价类 $[a]$ 至少有一个元素 $a$，它总是非空的。

(2) 每个等价类都是集合 $A$ 的子集。

(3) $a\in[b]$ 当且仅当 $(b,a)\in R$(或 $aRb$)。

(4) 如果 $a\in[b]$，那么 $[a]=[b]$。

(5) 如果 $[a]\neq[b]$，那么 $[a]\cap[b]=\Phi$。

**证明** 由等价类的定义容易看出性质(1)、(2)、(3)是成立的。

(4)对任意的 $a,b\in A$，如果 $a\in[b]$，那么由(3)知 $(b,a)\in R$。任取 $x\in[a]$ 有 $(x,a)\in R$，又 $(a,b)\in R$，得 $(x,b)\in R$，于是 $x\in[b]$。所以 $[a]\subseteq[b]$。

同理可证 $[b]\subseteq[a]$，故有 $[a]=[b]$。

性质(5)由读者自行证明。

**定义 1.11** 设 $R$ 是定义在集合 $A$ 上一个等价关系，集合 $A$ 在等价关系 $R$ 下被分成的所有等价类之并组成的集合

$$\{[x]_R\mid x\in A\}$$