國民中學複習叢書

初等新數學

陶伯文編

〔第三冊〕

臺灣開明書店印行

民國六十一年六月初版發行

每冊新臺幣十二元

初等新數學

〔第三冊〕

*

編著者 陶伯文

發行人 劉甫琴

印刷者 臺灣開明書店

總發行所 臺灣開明書店

臺北市中山北路一段七七號

電話 五四三三六九 五五〇八二〇號

郵局劃撥賬號第一二五七號

(台源—80J.)

基價 0.60

編 輯 大 意

一、本書依據最近部頒“國民中學數學暫行課程標準”，並參考現行教科書及 *S. M. S. G.* 原本編輯而成，供升學、進修、複習之用．

二、本書配合教科書，分爲六册，每册後附教科書習題解答（或提示），以供參考．

三、本書內容翔實，觀念與解題法亦予兼顧．

1. 在數理觀念方面，除處處舉例說明，節節提示“注意要項”外，並在習題中列有詳盡之各類測驗題，俾讀者能由此獲致正確而~~深刻印象~~．

2. 在解題法方面，[redacted]條述其步驟外，並使其各型類題，[redacted]淺，難易齊備．遇重要或困難者，[redacted]“要點”或“分析”，俾讀者能獲舉一反三[redacted]遇易生錯誤[redacted]者，特作“正”“誤”兩解，用以提示改正．

四、~~每章後均附綜合性之兩次習題，供讀者自行練習。~~

五、拙編初中用之“初等代數學”，數年來蒙各方關注採用，已發行十餘萬册．茲值課程標準改訂，特復審愼重編，以符合時代之所需，惟訛誤之處，仍難避免，尚祈不吝續賜指正是幸．

編　者　謹　識

民國六十一年六月

目　錄

第一章　基本作圖

第二章　直角坐標系

第三章　方程式簡介

第四章　近似值

第五章　統計圖表

第一章　基本作圖

1-1.　幾何作圖

I.　幾何作圖

1. 常用的畫圖工具有圓規，直尺，三角板，丁字尺，曲線板，量角器等.

2. 僅限用圓規與無刻度的直尺兩種工具來作圖的，稱爲幾何作圖（或稱爲尺規作圖）.

3. 圓規又稱爲兩脚規，是用來畫圓或弧，截取線段使等於定長；直尺是用來畫直線，不可作測量長短之用，在實際應用時可用三角板代替直尺.

II.　注意要項

1. 幾何作圖必須有步驟，層次分明，且每一步驟須有充分的理由作依據.

2. 所謂幾何作圖的步驟，及所依據的理由等，將在§1－3中敍述，宜特別注意.

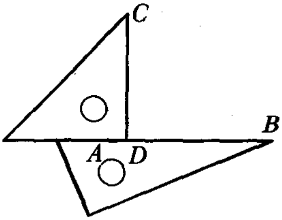
3. 一副三角板有兩塊，一塊是等腰直角三角形；另一塊是三個角的角度分別爲30°，60°，90°的直角三角形。

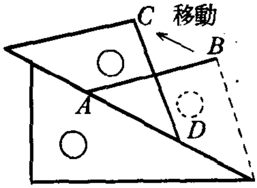
1-2.　三角板及丁字尺的利用

I.　利用兩塊三角板畫互相垂直的二線（或線段）

1. 如下左圖先固定下方一塊三角板，畫$\overline{AB}$，再將第二塊三角板放在上方畫$\overline{CD}$，即得$\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

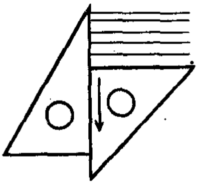
2. 如下右圖，先固定左下方一塊三角板，將另一塊放在所示位置畫$\overline{AB}$，然後移動此三角板畫$\overline{CD}$．亦得$\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

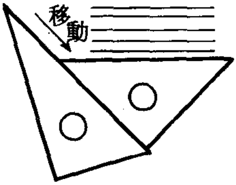


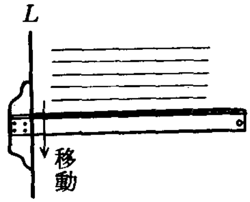


II. 利用兩塊三角板畫平行線

將兩三角板密接，固定其中一塊；將另一塊沿着邊滑動，即可畫出所需的平行線，如下左圖及下中圖.







III. 利用丁字尺畫平行線

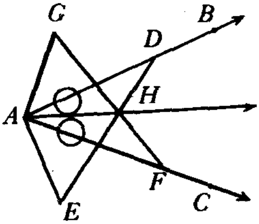
先畫一直線L，使L與丁字尺密接，然後移動丁字尺畫平行線，如上右圖.

IV. 利用一塊三角板畫任意角$\angle BAC$的平分線.

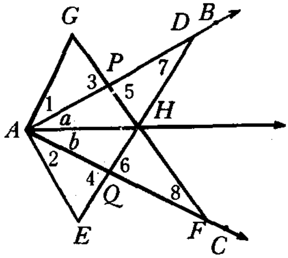
1. 把三角板的一股（非斜邊）與角的一邊$\overrightarrow{AB}$密接，且使直角頂與A相合，沿斜邊畫線段$\overline{DE}$.

2. 再把這三角板原來的一股與角的另一邊$\overrightarrow{AC}$密接，也使直角頂和A相合，沿斜邊畫線段$\overline{FG}$，$\overline{DE}$與$\overline{FG}$交於H.

3. 連結A，H，則$\overrightarrow{AH}$即爲所求作$\angle BAC$的平分線.



〔理由〕 ① 如右圖，$\overline{AB}$與$\overline{FG}$交於P，$\overline{AC}$與$\overline{DE}$交於Q.



② $\angle G=\angle E$, $\overline{AG}=\overline{AE}$, $\angle 1=\angle 2$（同爲 $90°-\angle BAC$）

$\therefore \triangle AGP\cong\triangle AEQ$（$ASA$ 性質）

$\therefore \angle 3=\angle 4$, $\overline{AP}=\overline{AQ}\cdots(a)$

③ $\angle 3=\angle 5$，$\angle 4=\angle 6$，$\therefore \angle 5=\angle 6$，又 $\angle 7=\angle 8$，$\overline{PD}=\overline{QF}$（$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$, $\therefore \overline{AD}-\overline{AP}=\overline{AF}-\overline{AQ}$）$\therefore \triangle PDH\cong\triangle QFH$（$ASA$ 性質）

$\therefore \overline{PH}=\overline{QH}$ ……………………………………… (b)

④ $\overline{AH}\cong\overline{AH}$ ……………………………………… (c)

⑤ 由 (a), (b), (c)，故 $\triangle APH\cong\triangle AQH$（$SSS$ 性質）

$\therefore \angle a=\angle b$，故 $\overrightarrow{AH}$ 爲 $\angle BAC$ 的平分線.

V.　注意要項：

1. 上述各作方法，都曾利用三角板或丁字尺的特性（直角意義），故不能稱爲幾何作圖.

2. 平分一直角時，須用三個角爲30°，60°，90° 的那一塊（即三邊不相等的）三角板，才能沿斜邊先後畫出兩線段.

〔例1〕　下列各敍述，正確的記"○"，不正確的記"×".

1. 在幾何作圖所使用的工具中，有圓規和直尺. …（　）
2. 幾個作圖所用的直尺，可作測量線段長短之用.（　）
3. 我們所使用的三角板都是直角三角形. …………（　）
4. 利用兩塊三角板畫平行線，因並沒有利用三角板來測量角或線段，故可稱爲幾何作圖. …………（　）
5. 利用三邊都不等長的那一塊三角板，可畫出任意一角的平分線. ……………………………………（　）

【解】　1.（×）僅限用圓規和直尺.　2.（×）.　3.（○）

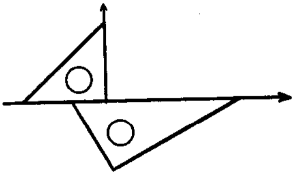
4. (×). 5. (○).

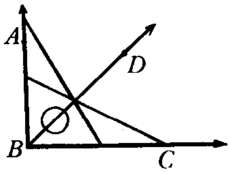
〔例2〕 試利用三角板畫出90°的角,再利用三角板畫出其平分線,然後利用量角器量各角的大小，看是否眞確.

【解】 ① 畫法如§1−2 I, IV. 圖形如下.

② 平分90°的角必須利用三邊不相等的那一塊.

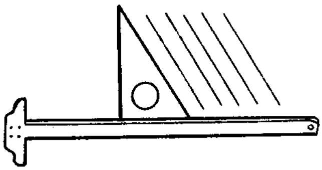
③ 用量角器量得各角的大小是：$\angle ABC=90°$，
$\angle ABD=\angle DBC=45°$，故 $\overrightarrow{BD}$ 爲 $\angle ABC$ 的平分線.





〔例3〕 試利用丁字尺及三角板畫平行線.

【解】 如右圖所示，將三角板的一股密接丁字尺的一邊移動,同時沿三角板的斜邊（或另一股）畫線，卽得平行線.

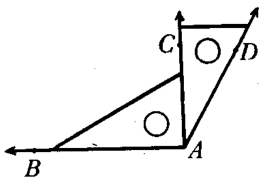


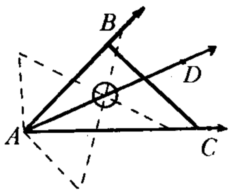
〔註〕 利用三角板及丁字尺，仿照本例，亦可畫出互相垂的兩線．

〔例4〕 試利用一副三角板畫出：①120°，②22.5°的角.

【解】 ① 拿出三邊不相等的這塊三角板，利用其90°與30°的兩角，畫出這兩角爲相鄰，如下左圖.

卽 $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90°+30°=120°$.





② 拿出等腰直角三角形的一三角板，利用其 45°的角，先沿一股及斜邊畫出 45° 角，再平分這個角，如上右圖．即$\angle BAD=\angle B'AC\div 2=45°\div 2=22.5°$．

1–3. 常用的幾何作圖題

在幾何作圖中，關於用直尺畫直線（或線段），已往已有說明，今談到用圓規作圖，當首先要知道圓的意義及性質．

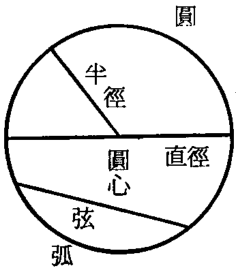
I. 圓的意義：

圓是一平面上的簡單封閉曲線，這曲線上的任一點都與這平面上一定點的距離相等．

II. 圓的性質及有關名詞

1. 圓的意義中所說的簡單封閉曲線是一個點集合，這點集合中的每一點，都在同一個平面上，且都與這平面上的一定點等距．

2. 圓心：在圓的所在平面上，與圓上每一點的距離都相等的一定點，稱爲圓心，簡稱心．



3. 半徑：圓心與圓上任一點所連接的線段，稱爲半徑．

4. 弦：圓上任兩點所連接的線段，稱爲弦．

5. 直徑：過圓心的弦，稱爲直徑．

6. 圓弧：圓的一部分，稱爲圓弧，簡稱弧．

7. 注意要項：

(1)習慣上，半徑（或直徑）的長，也簡稱半徑（或直徑）．

(2)直徑（的長）是半徑（的長）的兩倍．

(3)直徑是圓的最長弦．

(4)圓將其所在的平面分割爲三部分，即① 圓的本身，② 圓的內部，③ 圓的外部．

(5)在圓的所在平面上，若一點與圓心的距離小於半徑時，則此點

在圓的內部，圓的內部簡稱圓內.

（6）在圓的所在平面上，若一點與圓心的距離大於半徑時，則此點在圓的外部，圓的外部簡稱圓外.

（7）若 A, B 為一圓上同一直徑的兩端點，則在此圓上且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的同側的所有點再連同 A, B 兩點的聯集，稱為半圓.

（8）圓弧的長，大於半圓時，稱為優弧，小於半圓時稱劣弧. 惟習慣上，凡說到弧，且未加說明時，都是指劣弧而言.

Ⅲ. 幾何作圖的步驟

1. 已知：敍述題中已給予的條件.

2. 求作：說明題中所求作的圖形.

3. 分析：問題曲折時，可先作一草圖，假設這圖形已符合所求，然後由此圖逆推至已知部分，來覓求作圖的方法. 惟簡易的作圖題，常省去這個步驟.

4. 作法：作出正確的圖形，並說明這圖形的作法步驟.

5. 證明：引用有關性質，及下述幾何作圖依據作理由，證明所作出的圖形，合於“已知”與“求作”的條件.

6. 討論：討論已知條件與求作圖形間的關係，以說明答案的有無及答案的個數，若祇有一個答案的作圖題，常省去這個步驟.

〔提示〕 上述各步驟中，應儘量引用數學上所用的符號.

Ⅳ. 幾何作圖的重要依據

1. 相異兩點，可決定一直線.

2. 以一定點為圓心，任一線段（之長）為半徑，可決定一圓.

3. 在同一平面上，過一已知直線上或直線外的一點，恰可作一直線與這已知直線垂直.

4. 過一已知直線外一點，恰可作一直線與這已知直線平行.

〔提示〕 平行的兩直線，必在同一平面上.

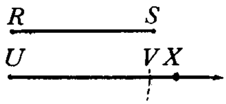
Ⅴ. 常用的幾何作圖題

下面所敍述的幾個常用幾何作圖題，常出現在較複雜的幾何作圖題的

步驟中，故可稱爲基本幾何作圖題.

1. 作一線段等於一已知線段的長.

例如：已給線段$\overline{RS}$，求作$\overline{UV}$，使$\overline{UV}=\overline{SR}$.



【解】〔已知〕$\overline{RS}$.

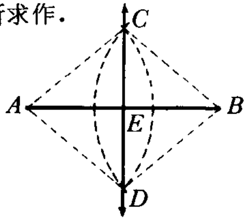
〔求作〕一線段$\overline{UV}$，使$\overline{UV}=\overline{RS}$.

〔作法〕① 用直尺畫一任意$\overrightarrow{UX}$.

② 以U爲圓心，$\overline{RS}$爲半徑畫弧，交$\overrightarrow{UX}$於V，則$\overline{UV}$即爲所求作.

【證明】$\overline{UV}=\overline{RS}$（作圖），故$\overline{UV}$即爲所求作.

2. 作已知線段的垂直平分線.



例如：已給線$\overline{AB}$，求作$\overline{AB}$的垂直平分線.

【解】〔已知〕$\overline{AB}$.

〔求作〕$\overline{AB}$的垂直平分線.

〔作法〕① 分別以A, B爲圓心，同以大於$\overline{AB}$一半的適當長爲半徑畫兩弧.

② 兩弧相交於C, D兩點，且各在$\overleftrightarrow{AB}$的相反兩側.

③ 連接C, D，則$\overleftrightarrow{CD}$即爲所求$\overline{AB}$的垂直平分線.

【證明】① 作$\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$，令$\overleftrightarrow{CD}$與$\overline{AB}$交於E.

② 在$\triangle ACD$與$\triangle BCD$中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BC}$（作圖），$\overline{CD}=\overline{CD}$（公共邊），

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$（$SSS$性質）

$\therefore \angle ACD = \angle BCD$（對應角）

③ 在$\triangle ACE$與$\triangle BCE$中，$\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{CE}=\overline{CE}$,

$\angle ACE = \angle BCE$（已證）

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCE$（$SAS$性質）

④ $\therefore \overline{AE}=\overline{BE}$（對應邊），即$E$爲$\overline{AB}$的中點（線段中點意義）.

⑤ 且$\angle AEC = \angle BEC$（對應角）

但$\angle AEC+\angle BEC=180°$,

$\therefore \angle AEC=\angle BEC=90°$.

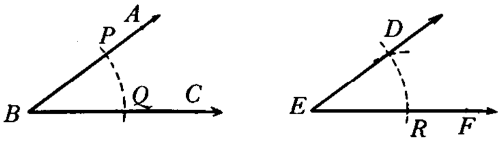
⑥ 卽$\overleftrightarrow{CD}$爲AB的垂直平分線.

〔註〕 已知$\overline{AB}$, 求作$\overline{AB}$的中點, 或求作$\overline{AB}$的二等分, 其作圖法與本作圖法相同.

3. 作一角全等於一已知角.

例如:已給$\angle ABC$, 求作$\angle DEF$, 使$\angle DEF=\angle ABC$.

【解】 〔已知〕 $\angle ABC$.



〔求作〕 一角$\angle DEF$, 使$\angle DEF=\angle ABC$.

〔作法〕 ① 以B爲圓心, 適當長爲半徑畫弧, 交$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$於P, Q兩點.

② 任作$\overrightarrow{EF}$, 以E爲圓心, $\overline{BP}$爲半徑畫弧交$\overrightarrow{EF}$於R.

③ 以R爲圓心, $\overline{QP}$爲半徑畫弧交前弧於D.

④ 作$\overrightarrow{ED}$, 則$\angle DEF$卽爲所求作.

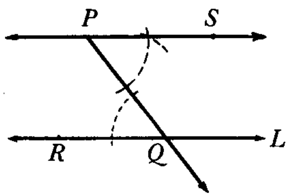
【證明】 ① 作$\overline{PQ}$, $\overline{DR}$.

② $\overline{BQ}=\overline{ER}$, $\overline{BP}=\overline{ED}$, $\overline{PQ}=\overline{DR}$(作圖),

$\therefore \triangle BPQ\cong\triangle EDR$($SSS$性質)

③ $\therefore \angle B=\angle E$(對應角), 卽$\angle DEF=\angle ABC$.

4. 過線外一點, 作此線的平行線.



例如:已給一直線L及L外一點P, 求作過P而與L平行的直線.

【解】 〔已知〕 直線L及L外一點P.

〔求作〕 過P而平行於L的直線.

〔作法〕 ① 過 P 任作一射線與 L 交於 Q.

② 在 L 上任取異於 Q 之一點 R.

③ 以 P 爲頂點，$\overrightarrow{PQ}$ 爲一邊，作 $\angle SPQ$，使 $\angle SPQ = \angle RQP$，並使 S 與 R 在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的反側.

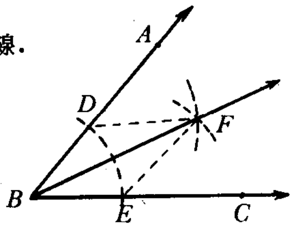
④ 作 $\overleftrightarrow{PS}$，則 $\overleftrightarrow{PS}$ 卽爲所求作.

【證明】 ① $\because \angle SPQ = \angle RQP$（作圖）.

② $\therefore \overleftrightarrow{PS} /\!/ L$.（平行線由內錯角判別性質）.

5. 作一角的平分線

例如：已給一角 $\angle ABC$，求作此角的平分線.



【解】〔已知〕 $\angle ABC$.

〔求作〕 $\angle ABC$ 的平分線.

〔作法〕 ① 以 B 爲圓心，適當長爲半徑畫弧，交 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ 於 D, E.

② 分別以 E，D 爲圓心，同以大於 $\frac{1}{2}\overline{DE}$ 之適當長爲半徑畫弧，二弧交於 F.

③ 作 $\overrightarrow{BF}$，則 $\overrightarrow{BF}$ 卽爲所求作的角平分線.

【證明】 ① 作 $\overline{DF}$, $\overline{EF}$,

② $\overline{BD} = \overline{BE}$, $\overline{DF} = \overline{EF}$（同半徑作圖），$\overline{BF} = \overline{BF}$,
$\therefore \triangle BDF \cong \triangle BEF$（$SSS$ 性質）.

③ $\therefore \angle DBF = \angle EBF$（對應角），卽 $\overrightarrow{BF}$ 爲 $\angle ABC$ 的平分線.

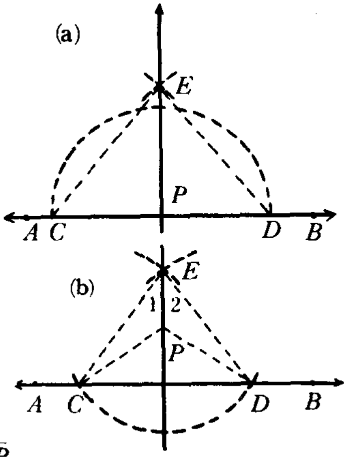
6. 作一線的垂直線，使所作垂直線過一已知點.

例如：已給一直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 及一點 P，求作一線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直，且過 C.

【解】〔已知〕 $\overleftrightarrow{AB}$ 及一點 P.

〔求作〕 一線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直，且過 P.

〔作法〕 ① 以 P 爲圓心，適當長爲半徑畫弧，交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C, D 兩點.



② 分別以C, D爲圓心，同以大於$\frac{1}{2}\overline{CD}$之適當長爲半徑畫弧，二弧交於E.

③ 作$\overleftrightarrow{PE}$，則$\overleftrightarrow{PE}$即爲所求作$\overleftrightarrow{AB}$的垂直線.

〔註〕 右圖(a)所示，P點在$\overleftrightarrow{AB}$上，圖(b)所示，P點不在$\overleftrightarrow{AB}$上，兩種情形的作法均相同。

【證明】 如圖(a)

① 作$\overline{CE}$, $\overline{DE}$.

② $\overline{CE}=\overline{DE}$, $\overline{CP}=\overline{DP}$（作圖），$\overline{EP}=\overline{EP}$, $\therefore \triangle CPE \cong \triangle DPE$（$SSS$性質）

③ $\therefore \angle CPE=\angle DPE=90°$（兩角互補且相等），即$\overleftrightarrow{EP}\perp\overleftrightarrow{AB}$,

如圖(b).

①′ 作$\overline{CE}$, $\overline{CP}$, $\overline{DE}$, $\overline{DP}$.

②′ $\overline{CE}=\overline{DE}$, $\overline{CP}=\overline{DP}$,（作圖），$\overline{EP}=\overline{EP}$,
$\therefore \triangle CPE \cong \triangle DPE$（$SSS$性質）.

③′ $\therefore \angle 1=\angle 2$（對應角），即$\overleftrightarrow{EP}$爲等腰$\triangle ECD$頂角的平分線.

④′ $\therefore \overleftrightarrow{EP}\perp\overleftrightarrow{AB}$（等腰△的頂角平分線必垂直底邊）.

V. 注意要項

① 本作圖題均僅限用圓規與直尺兩種工具的幾何作圖.

② 幾何作圖題解法的主要步驟是"已知，求作，作法，證明".

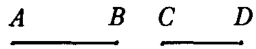
③ 本書以後凡說到"作圖"，若未加說明，均爲幾何作圖.

④ 作圖題之作法中須引用上述基本幾何作圖時，其基本幾何作圖之"作法"與"證明"可省略.

〔例1〕 設$\overline{AB}$, $\overline{CD}$爲已知二線段，且$\overline{AB}>\overline{CD}$，求作一線段$\overline{EF}$，分別使 (i) $\overline{EF}=\overline{AB}+\overline{CD}$,　(ii) $\overline{EF}=\overline{AB}-\overline{CD}$.

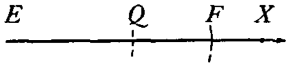
【解】〔已知〕$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, 且 $\overline{AB} > \overline{CD}$.

〔求作〕$\overline{EF}$, 使 $\overline{EF}$ 之長分別等於



(i) $\overline{AB}+\overline{CD}$, (ii) $\overline{AB}-\overline{CD}$.

(i)〔作法〕① 作 $\overrightarrow{EX}$.



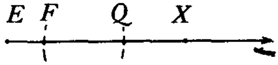
② 以 E 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑畫弧，交 $\overrightarrow{EX}$ 於 Q.

③ 以 Q 爲圓心，$\overline{CD}$ 爲半徑畫弧，交 $\overrightarrow{QX}$ 於 F，則 $\overline{EF}$ 即爲所求作.

【證明】① $\overline{EQ}=\overline{AB}$, $\overline{QF}=\overline{CD}$（作圖）.

② $\therefore \overline{EF}=\overline{EQ}+\overline{QF}=\overline{AB}+\overline{CD}$，故 EF 即爲所求作.

(ii)〔作法〕① 作 $\overrightarrow{EX}$.



② 以 E 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑畫弧，交 $\overrightarrow{EX}$ 於 Q.

③ 以 Q 爲圓心，$\overline{CD}$ 爲半徑畫弧，交 $\overline{EQ}$ 於 F，則 $\overline{EF}$ 即爲所求作.

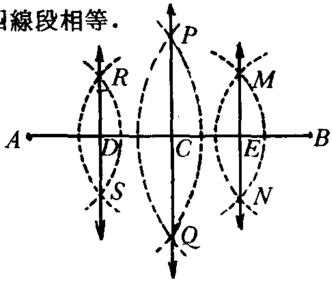
【證明】① $\overline{EQ}=\overline{AB}$, $\overline{QF}=\overline{CD}$（作圖）.

② $\therefore \overline{EF}=\overline{EQ}-\overline{QF}=\overline{AB}-\overline{CD}$，故 $\overline{EF}$ 即爲所求作.

〔例2〕任意作出一線段，然後利用圓規和直尺將其四等分.

【解】〔已知〕$\overline{AB}$.

〔求作〕$\overline{AB}$ 上三點，使所分成的四線段相等.



〔作法〕① 作 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 C.

② 作 $\overline{AC}$ 的垂直平分線 $\overleftrightarrow{RS}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D.

③ 作 $\overline{CB}$ 的垂直平分線 $\overleftrightarrow{MN}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E，則

D, C, E 三點，四等分 $\overline{AB}$．

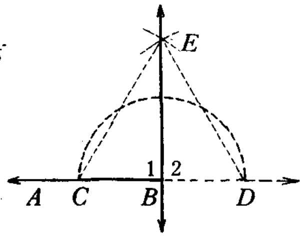
【證明】 ① $\overline{AC}=\overline{CB}$, $\overline{AD}=\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{CE}=\overline{EB}=\dfrac{1}{2}\overline{CB}$（作圖）．

② $\therefore \overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CE}=\overline{EB}$，故 D, C, E 三點四等分 $\overline{AB}$.

〔例3〕 過一線段的端點，作該線段的垂直線．

【解】 〔已知〕 $\overline{AB}$.

〔求作〕 過 $\overline{AB}$ 的一端點 B，作 $\overline{AB}$ 的垂直線



〔作法〕 ① 以 B 爲圓心，適當長爲半徑畫弧，交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C, D.

② 分別以 C, D 爲圓心，同以大於 $\dfrac{1}{2}\overline{CD}$ 之適當長爲半徑畫弧，二弧交於 E．

③ 作 $\overleftrightarrow{BE}$，則 $\overleftrightarrow{BE}$ 即爲所求作．

【證明】 ① 作 $\overline{CE}$, $\overline{DE}$.

② $\overline{CB}=\overline{DB}$, $\overline{CE}=\overline{DE}$（作圖），$\overline{BE}=\overline{BE}$,

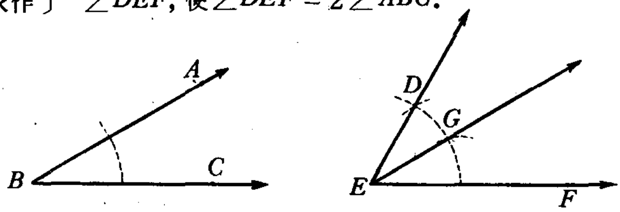
$\therefore \triangle CBE \cong \triangle DBE$（$SSS$ 性質）．

③ $\therefore \angle 1=\angle 2=90^\circ$（對應角相等且互補），故 $\overleftrightarrow{BE} \perp \overline{AB}$ 於 B．

〔例4〕 設 $\angle ABC$ 爲已知銳角，求作一角 $\angle DEF$，使 $\angle DEF = 2\angle ABC$．

【解】 〔已知〕 $\angle ABC$.

〔求作〕 $\angle DEF$, 使 $\angle DEF = 2\angle ABC$.



〔作法〕 ① 作$\overrightarrow{EF}$.

② 以E爲頂點，$\overrightarrow{EF}$爲一邊，作$\angle GEF$，使$\angle GEF=\angle ABC$.

③ 以E爲頂點，$\overrightarrow{EG}$爲一邊，作$\angle DEG$，使$\angle DEG=\angle ABC$，則$\angle DEF$即爲所求作.

【證明】 ① $\angle GEF=\angle ABC$，$\angle DEG=\angle ABC$（作圖）

② $\therefore \angle DEF=\angle GEF+\angle DEG=2\angle ABC$，故合題意.

〔例5〕 任意作一銳角，再利用圓規和直尺將其四等分.

【解】 〔已知〕 $\angle BAC$，且$\angle BAC<90°$.

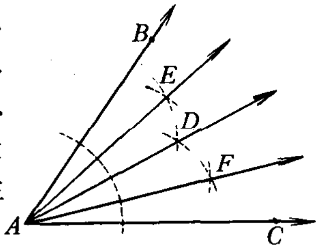
〔求作〕 在$\angle BAC$的內部作三射線，使其所分四個角相等.

〔作法〕 ① 作$\angle BAC$的平分線$\overrightarrow{AD}$.

② 作$\angle BAD$的平分線$\overrightarrow{AE}$.

③ 作$\angle DAC$的平分線$\overrightarrow{AF}$.

③ 則$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$即爲求作的四等分$\angle BAC$的三射線.

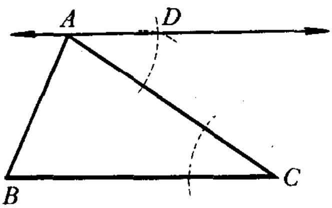


【證明】 ① $\angle BAD=\angle DAC$，$\angle BAE=\angle EAD=\frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle DAF=\angle FAC=\frac{1}{2}\angle FAC$.（作圖）.

② $\therefore \angle BAE=\angle EAD=\angle DAF=\angle FAC$.

即$\angle BAE=\angle EAD=\angle DAF=\angle FAC$，故$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$即爲所求作.

〔例6〕 過三角形的一頂點，作一直線平行其對邊.



【解】 〔已知〕 $\triangle ABC$.

〔求作〕 過A點作$\overline{BC}$的平行線.

〔作法〕 ① 以A爲頂點，$\overrightarrow{AC}$爲