论悬流中的悬浮质运动

Г. И. Баренблатт 著

水利出版社

[illegible]

[illegible]

[illegible]

論紊流中的悬浮質运动

Г.И.Баренблатт 著
范 家 驊 等 譯

水 利 出 版 社
1956 年 11 月

本書包括巴侖勃拉特先后發表于应用数学与力学杂志討論悬浮質运动的論文兩篇。著者根据柯尔莫格洛夫水流脉动能平衡的概念，推导含有悬浮質液体紊流运动的一般方程，从而得出不均質液体二元运动的方程系。后篇进而討論二元明渠中悬浮質的运动，討論限于含沙数量小的情况。最后引用凡諾立实驗結果进行比較。

本書可供力学研究人員，水利工程技术研究人員，水利工程系、物理系学生参考之用。

本書譯文曾經侯暉昌同志校閱。

論紊流中的悬浮質运动

原書名	О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке
原著者	Г.И. Баренблатт
原出版处	科学出版社
原出版年份	1953、1955
譯者	范家驊等
出版者	水利出版社(北京和平門內北新华街35号) 北京市書刊出版業营業許可証出字第080号
印刷者	水利出版社印刷厂(北京西城成方街13号)
發行者	新华書店

42千字，787×1092 1/32开，$2^{1}/_{16}$印張

1956年11月第一版，北京第一次印刷，印数1—3,800

統一書号：15047.35 定价：(11)0.38元

目　　錄

I. 論紊流中的悬浮質运动

本文載有不均質（即含有悬浮質）液体紊流运动的普遍方程式的引伸。从普遍方程中得到不均質液体平面的經过平均以后沿水平綫上是均匀而稳定的运动的方程系。

紊流中的悬浮質运动問題，由于各种技术問題的需要，是有很大的理論和实用意义的，这許多技术問題中首先要推：土工的水力机械化，河流中的泥沙运动，含塵气体的运动，顆粒在压縮气流中的运动等。在文献中关于紊流中悬浮質运动理論有兩类著作[1]。

所謂扩散理論（B.M. 馬卡維耶夫[2]），是把悬浮質运动看作与通常在紊流中所研究的扩散过程一样来研究，也就是認为悬浮質是一种被水流携帶的实体，而对此水流的动力不起反作用（我們在这里不談 B. M. 馬卡維耶夫的簡化假定，这种假定不是所提出問題的本質的必要条件，而在联系到古典傳热方程式問題时才需要的。我們先不談这些簡化的物理基础不够充分，而是注意到所談的簡化在目前并不是必需的，因为我們完全有可能不用类似这类簡化而有效地解决范圍广大的問題）。以后將要証明，合理地建立起来的扩散概念有它一定的应用范圍，但一般說来是不够的。

M. A. 費里堪諾夫[3]研究出来的重力理論，企圖考虑水流中悬浮質对挾沙水流动力的影响。显然，M. A. 費里堪諾夫是首先指出必須考虑这种影响并算出水流举起悬移質所作的功的。但是 M.A. 費里堪諾夫沒有考虑到：上述的功是作为水流脉动能平衡方程中的一項而出現的；在計及作这些功以后脉动能將較相应的均質水流的脉动能为小（由于这个緣故，我們联系到一个老早已被許多实驗家所确定了的事实，就是携帶悬浮質的水流的脉动和水流阻力，比相应的均質液体要低）。

因此 M.A.费里堪諾夫的基本方程——“能量方程”,不能認为是正确的。

在本文中討論帶有相对体积小(即含量少)的悬浮質的水流;同时假定顆粒甚小,而且水流的加速度也比重力加速度小(是指瞬时加速度,不是平均水流的加速度)。本文是以 A. H. 柯尔莫格洛夫关于水流脉动能平衡的概念为基础。作者謹向 A. H. 柯尔莫格洛夫对本文的指导表示深切的感謝。

§1. 基本假定及普遍方程的引伸

1°. 采用直角坐标系 x_1, x_2, x_3, 令 x_3 軸表示垂直向上方向。引用下列符号: d_1——液体密度, d_2——顆粒密度, ρ——悬浮質的相对体积●, v_i——液体沿 x_i 軸的速度分量, $i=1, 2, 3$, w_i——顆粒沿 x_i 軸的速度分量, f_i——單位体积混合物內的液体与顆粒之間相互作用力沿 x_i 軸的分量, g_i——沿 x_i 軸的重力加速度的分量。

假定水流中顆粒的分子扩散可以忽略不計,則可得液体运动方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}d_1(1-\rho)v_i+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}d_1(1-\rho)v_iv_\alpha=-\frac{\partial sp}{\partial x_i}+\frac{\partial\tau_{\alpha i}^{(1)}}{\partial x_\alpha}-$$
$$-d_1(1-\rho)g_i-f_i\cdots\cdots(1.1)$$

式中 p——不均質液体某点总的水动压力, s——不均質液体中作用于液体上的压力部分, $o<s\leqslant 1$(假定顆粒間有相互作用), $\tau_{\alpha i}^{(1)}$——液体中粘滯应力張量。(这里以及此后假定希臘指数順次重复自 1 到 3。)

在同一假定中可得顆粒的运动方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}d_1\rho w_i+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}d_2\rho w_iw_\alpha=-\frac{\partial(1-s)p}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{\partial\tau_{\alpha i}^{(2)}}{\partial x_\alpha}-d_2\rho g_i+f_i\cdots\cdots(1.2)$$

● 按照 M. A. 費里堪諾夫的术語“渾濁度”。

式中 $\tau^{(2)}_{\alpha i}$——因顆粒相互作用而产生的应力張量。將(1.1)和(1.2)相加，得不均質液体运动量方程式：

$$\frac{\partial DV_i}{\partial t}+\frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-Dg_i \cdots (1.3)$$

式中
$$D=d_1(1-\rho)+d_2\rho \cdots\cdots (1.4)$$
是不均質液体在水流某点上的密度；

$$V_i=\frac{d_1(1-\rho)v_i+d_2\rho w_i}{D} \cdots\cdots (1.5)$$

是圍繞某点的無限小体积的不均勻液体重心的运动速度；

$$\Pi_{i\alpha}=d_1(1-\rho)v_i v_\alpha+d_2\rho w_i w_\alpha \cdots\cdots (1.6)$$

$$T_{i\alpha}=\tau^{(1)}_{i\alpha}+\tau^{(2)}_{i\alpha} \cdots\cdots (1.7)$$

我們注意到，当水流中悬浮質相对体积不大时，張量 $\tau^{(1)}_{\alpha i}$ 的結構与均質粘性而不可压縮的液体中的張量結構相同，但具有一个由于水流中存在悬浮質故而粘滯性加大而加上的爱因斯坦校正項●，同时張量 $\tau^{(2)}_{\alpha i}$ 比 $\tau^{(1)}_{\alpha i}$ 要小。

液体和顆粒的質量守恒方程式相应地有下式：

$$\frac{\partial}{\partial t}d_1(1-\rho)+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}d_1(1-\rho)v_\alpha=0 \cdots\cdots (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}d_2\rho+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}d_2\rho w_\alpha=0 \cdots\cdots (1.9)$$

將此二式相加，得到不均質液体的質量平衡方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial DV_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \cdots\cdots (1.10)$$

● 我們知道，挾帶悬浮質的液体的粘性比無悬浮質的同样液体为大，当悬浮質相对体积 ρ 小时，对于不均質液体有效粘滯动力系数 μ 有 A. 爱因斯坦关系式

$$\mu=\mu^\circ(1+c\,\rho)$$

式中 μ°——相应的均質液体的粘滯性，c——常数，大約等于 2.5。

將(1.8)和(1.9)式分別除以 d_1 和 d_2，再相加，就得到不均質液体的連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[(1-\rho)v_\alpha+\rho w_\alpha]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.11)$$

方程式(1.3)，(1.10)，(1.11) 是在相当普遍的假定中推导出来的所討論的問題的基本方程系。上面所作的关于水流特性的补充假定，使得这方程系封閉。由于所作关于顆粒及水流加速度比重力加速度为小的假定，可以采取顆粒和液体的水平速度分量相同，而垂直分量則相差某一个数值 a，即

$$w_i=v_i-a\,\delta_{i3} \quad (\text{当 } i\neq j \text{ 时}, \delta_{ij}=0, i=j \text{ 时}, \delta_{ij}=1) \cdots\cdots (1.12)$$

同时 a——顆粒的水力粗度——被認为是悬浮質相对体积 ρ 的已知函数，应該預先从理論或实驗予以确定❶。当認为 a 只与 ρ 有关时，我們从而假定，水流中所有的顆粒都是一样的。必要时可以假定水流中存在几种不同大小的顆粒，这对提出的問題并不引起很大的困难。根据(1.12)的假定得：

$$V_i=v_i-\frac{1}{D}d_2\rho a\delta_{i3}=w_i+\frac{1}{D}d_1(1-\rho)a\delta_{i3} \cdots (1.13)$$

$$\Pi_{i\alpha}=DV_iV_\alpha+\frac{1}{D}d_1d_2\rho(1-\rho)a^2\delta_{i3}\delta_{\alpha3} \cdots (1.14)$$

$$(1-\rho)v_\alpha+\rho w_\alpha=V_\alpha+\frac{1}{D}(d_2-d_1)a\,\rho(1-\rho)\delta_{\alpha3} \cdots (1.15)$$

將(1.13)，(1.14)，(1.15)代入(1.3)和(1.11)，得

---

❶ 当研究悬浮質相对体积很大的水流时，例如稠漿，a 与 ρ 的关系是很重要的，在这一点上所有的討論中，將不作悬浮質相对体积小的假定。

$$\frac{\partial DV_i}{\partial t}+\frac{\partial DV_iV_\alpha}{\partial x_\alpha}=-Dg_i+\frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-$$

$$-d_1d_2\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{a^2\rho(1-\rho)}{D}\right]\delta_{i3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.16)$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}=-(d_2-d_1)\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{a\rho(1-\rho)}{D}\right]\cdots\cdots\cdots(1.17)$$

將(1.17)代入(1.10),得質量平衡方程式:

$$\frac{\partial D}{\partial t}+V_\alpha\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}=(d_2-d_1)D\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{a\rho(1-\rho)}{D}\right]\cdots(1.18)$$

方程系(1.16),(1.17),(1.18)是独立变数 V_i, p, D 的封閉方程系。

2°. 在平均的水平方向上的水流中顆粒悬浮的現象可解釋为由于在水流中存在垂直方向的脉动流速分量所致。如果顆粒大到可以不計其分子扩散的話,則水平的層流,就不能携帶顆粒。由此可見,不均質液体的紊流运动,对所討論的問題,具有特别的意义。为了研究不均質液体的紊流运动,就要轉到运动的时間平均方程式上来。运动方程式的时間平均是用方程式中出現的数值的数学期望的概念来进行的。所得的方程式由于遍历的(Эргодической)假定,对于时間間隔内平均运动的特性,將近似地正确的。这种时間間隔,比平均流动的特征时間小,而比脉动的特征时間大。

在本文中,我們只限于討論小的悬浮質相对体积,以及水流携帶小的顆粒的情况,即

$$\rho\ll 1,\qquad \sigma\rho\ll 1,\qquad \sigma=\frac{d_2-d_1}{d_1}$$

沒有这种限制的基本方程式的引伸,將要在以后的著作中討論。

3°. 如果 ρ 很小,則可認为顆粒的水力粗度 a 为常值,它

等于在液体占据無限空間中一个顆粒以等速沉降的速度。在所采用的关于水流特性的这个假定里，不均質液体运动的基本方程系可写成：

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_\alpha\frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha}=-(1+\sigma\rho)g_i+\frac{1}{d_1}\frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{d_1}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V_\alpha\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}=a\frac{\partial \rho}{\partial x_3} \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}=-a\ \sigma\frac{\partial \rho}{\partial x_3} \qquad \cdots\cdots(1.21)$$

由于悬浮質相对体积小，故只有在質量平衡方程中才予考慮液体的不均質性，而在其他的一些方程式里，如果与液体不均質性有关的項具有乘数 g，才予考慮。这就說明这样的項，当乘以大乘数 g 的时候，在动力学上將是極端重要的，例如在脉动能平衡方程中，就会發生这种情况。因此方程式(1.21)可以写成

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \qquad \cdots\cdots(1.22)$$

將不均質液体运动量的方程取时間平均时，得到

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha}=-\frac{\partial \overline{V_i'V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}-(1+\sigma\overline{\rho})g_i+$$
$$+\frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{T}_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \qquad \cdots\cdots(1.23)$$

(字母上面的一横，像常用的那样，表示数学期望值。)在这方程式中，根据一般原則，忽略不計 $\overline{V_i'\partial V_\alpha'/\partial x_\alpha}$ 項。对質量平衡方程式取时間平均时，而并不計 $a\overline{\rho'^2}$ 級的小項，得到

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \overline{\rho'V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}=a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} \qquad \cdots\cdots(1.24)$$

將連續方程式取时間平均，得

$$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = -a\sigma \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.25)$$

除了与質量平衡有关的問題外，不論在什么地方，这一方程可以取下列形式

$$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.26)$$

現在我們將引伸不均質液体流动的脉动能平衡方程式。

1942 年 A. H. 柯尔莫格洛夫得出均質不可压縮液体流动的脉动能的平衡方程[4]。这个方程式的最好的引伸即推广到可压縮液体上去的工作，包括在莫宁的論文中[5]。对于紊流中悬浮質运动的問題，研討脉动能的平衡具有特別重要意义，因为水流中顆粒的悬浮，需要消耗动能，而会引起脉动能的減小。

現在我們將討論顆粒的水力粗度和脉动速度同級的水流；而脉动速度和水流平均速度相比，可以認为是小的。

准确到不計 ρa^2 級的小量，不均質液体的單位体积內的动能等于

$$E = \frac{1}{2} D \sum_{i=1}^{3} V_i^2 \approx \frac{1}{2} d_1 \sum_{i=1} V_i^2$$

其次

$$\overline{E} = E^\circ + B, \quad E^\circ = \frac{1}{2} d_1 \sum \overline{V}_i^2, B = \overline{D' V'_\alpha} \overline{V}_\alpha + \frac{1}{2} d_1 \sum_{i=1}^{3} \overline{V_i'^2}$$

这里 E°——不均質液体單位体积內的平均运动的动能，B——平均脉动能，即平均反作用力在平均流动上所作的功，加單位体积的混合物中紊动脉动速度的平均动能，同时，由于采用了有关水流的假定，第一項比第二項小。

为了研討不均質液体脉动能的平衡，必須算出数值

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial B}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{E}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial E^\circ}{\partial t}-\overline{V}_\alpha\frac{\partial E^\circ}{\partial x_\alpha}\quad\cdots(1.27)$$

設

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

数量 $d\varphi/dt$ 是不均質液体运动某函数 φ 的質量微商。根据一般原則略去小項 $\overline{E'(\partial V'_\alpha/\partial x_\alpha)}$，得到

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{E}}{\partial x_\alpha}=\frac{d\overline{E}}{dt}-\frac{\partial \overline{E'V'_\alpha}}{\partial x_\alpha}$$

其次根据一般原則略去小項，則从时間平均方程中得

$$\frac{d\overline{E}}{dt}=d_1\overline{V_\alpha\frac{dV_\alpha}{dt}}=-\overline{D}\,\overline{V}_3g-\overline{D'V'_3}g+\overline{V_\beta\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}}-\frac{\partial\overline{pV_\alpha}}{\partial x_\alpha}$$

$$\frac{\partial E^\circ}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial E^\circ}{\partial x_\alpha}=-d_1\frac{\partial\overline{V'_\alpha V'_\beta}}{\partial x_\alpha}-\overline{D}\,\overline{V}_3g+\overline{V}_\beta\frac{\partial\overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\overline{p}\overline{V}_\beta}{\partial x_\beta}$$

再根据一般原則略去小項，得到

$$\overline{E'V'_\alpha}=\frac{1}{2}d_1\sum_{i=1}^{3}\overline{V_i'^2V'_\alpha}+d_1\overline{V'_\alpha V'_\beta}\;\overline{V}_\beta$$

容易看出，我們有下列的关系式

$$\frac{\partial\overline{V'_\alpha V'_\beta}\,\overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha}-\overline{V}_\beta\frac{\partial\overline{V'_\alpha V'_\beta}}{\partial x_\alpha}=\overline{V'_\alpha V'_\beta}\,\frac{\partial\overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{2}\overline{V'_\alpha V'_\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$$

$$\overline{V_\beta\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}}-\overline{V}_\beta\frac{\partial\overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}=\overline{V'_\beta\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}}=\frac{\partial\overline{V'_\beta T'_{\alpha\beta}}}{\partial x_\alpha}-\overline{T'_{\alpha\beta}\frac{\partial V'_\beta}{\partial x_\alpha}}=$$

$$=\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}-Q$$

$$q_\alpha=\overline{V'_\beta T'_{\alpha\beta}} \qquad Q=\frac{1}{2}\overline{T'_{\alpha\beta}\varepsilon'_{\alpha\beta}}$$

式中 q_α——由于紊动形态造成的分子的轉移，沿 x_α 軸产生脉动能的流动密度向量的分量，Q——不均質液体單位体积内脉动能的耗損，將所得之关系式代入(1.27)，得到不均質液体流动脉动能的平衡方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial B}{\partial x_\alpha}=-\overline{D'V'_3}g-\frac{\partial\overline{p'V_\alpha}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}-Q-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{1}{2}d_1\sum_{i=1}^{3}\overline{V_i'^2V'_\alpha}\right]-\frac{1}{2}d_1\overline{V'_\alpha V'_\beta}\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\cdots(1.28)$$

我們指出这个方程式右面各項的物理意义：

第一項表示水流上举悬浮質所消耗的脉动能；

第二項表示由于脉动压力在脉动运动上作功的脉动能流入；

第三項表示由于紊动形态造成分子轉移的脉动能流入；

第四項表示脉动能的耗損；

第五項表示由于紊动形态造成紊动轉移的脉动能流入；

第六項表示由平均运动的能量中取得的脉动能流入。

因此，除了第一項外，所有各項与均質不可压縮液体脉动能平衡方程中相应各項具有相同的意义(参閱 A. C. 莫宁的論文)[5]。由于乘数 g 很大，因此即使是在悬浮質相对体积小的时候，第一項也可能是很大的。

現在我們要指出的是，表示由于脉动压力在脉动运动上所作的功而發生的脉动能流入的第二項，小得可以抛弃。其次，除了水流中固定不动的表面的附近以外，第三項到处比第五項小，在水流中这些固定表面的附近，速度梯度有極大值，因此第三項也就很重要。因为我們現在放弃研討紧接固定壁

附近的运动，所以第三項也可以放弃。

对运动量方程式也作相应的簡化，就得到紊流中悬浮質运动問題的基本方程系：

$$(\text{I}.1)\quad \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \overline{V_i'V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}=-(1+\sigma\overline{\rho})g_i-\frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$$

$$(\text{I}.2)\quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \overline{\rho' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}=a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3}$$

$$(\text{I}.3)\quad \frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$(\text{I}.4)\quad \frac{\partial B}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial B}{\partial x_\alpha}=-\sigma g d_1\overline{\rho' V_3'}-Q-$$

$$-\frac{1}{2}d_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{3}\overline{V_i'^2V_\alpha'}\right)-\frac{1}{2}d_1\overline{V_\alpha'V_\beta'}\,\varepsilon_{\alpha\beta}$$

4°. 將所得的一般关系式应用到沿水平綫上平均为稳定而均質的平面流动的情况。这一情况从应用观点来看，是很有意义的，同时也是最簡單的。

因为水流沿水平綫上平均是定常而均質的，故

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}=-d_1C,\qquad \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2}=0$$

这里 C——具有尺度为速度平方的某一常数。对于現在研討的运动，基本方程系(I. 1)—(I. 4)就成了下列形式：

$$\overline{V}_3\frac{d\overline{V}_1}{dx_3}+\frac{d\overline{V_1'V_3'}}{dx_3}=C(\text{取相应于 } i=1 \text{ 的方程式})\cdots\cdots(1.29)$$

$$-\overline{V}_3\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}-\frac{d\overline{\rho' V_3'}}{dx_3}+a\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1.30)$$

$$\frac{d\overline{V}_3}{dx_3}=-a\sigma\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.31)$$

（为了在所研究的特殊問題里，举例說明被引进的簡化的性

采用下面的假設:

$$\overline{V'_\alpha V'_\beta}=\frac{2}{3}b\delta_{\alpha\beta}-\nu\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\overline{V_1'^2 V'_\alpha}=-\nu\frac{\partial b}{\partial x_\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

$$\overline{\rho' V'_\alpha}=-\lambda\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

式中 ν_1, ν_2, λ——水流的某种特征量。(这些量的無向量的性質是假定的。)这些假定同通常热学上研討不均匀紊流中所采用的假定,是完全类似的。

基本方程系有下列形式:

$$(\text{III}.1)\quad \frac{\partial\bar{V}_i}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x_\alpha}=-(1+\sigma\bar{\rho})g_i-\frac{1}{d_1}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\partial b}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\nu_1\bar{\varepsilon}_{\alpha i})$$

$$(\text{III}.2)\quad \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_\alpha}\right)+a\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_3}$$

$$(\text{III}.3)\quad \frac{\partial\bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$(\text{III}.4)\quad \frac{\partial b}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}=\sigma g\lambda\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_3}-\frac{1}{d_1}Q+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu_2\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\right)+$$

$$+\frac{\nu_1\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{2}$$

在引伸最后的方程式时,利用了下列关系式:

$$\bar{\varepsilon}_{11}+\bar{\varepsilon}_{22}+\bar{\varepsilon}_{33}=2\frac{\partial\bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

2°. 所提供的問題給出了一种考虑水流携帶的顆粒对挾沙水流流态的作用的可能性。同时所得的方程系証明,当水

流对悬浮顆粒所作的功很小时，即 $\sigma g\lambda\partial\bar{\rho}/\partial x_3$ 項比脉动能平衡方程式的其他各項为小时，則悬浮質对挟沙水流动力作用將小得可以不計的。同时方程系分解为彼此無关的液体运动方程式和水流的質量平衡方程式：

$$(\mathrm{IV}.1)\quad \frac{\partial\bar{V}_i}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x_\alpha}=-g_i-\frac{1}{d_1}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial b}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\nu_1\bar{\varepsilon}_{\alpha i})$$

$$(\mathrm{IV}.2)\quad \frac{\partial\bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$(\mathrm{IV}.3)\quad \frac{\partial b}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}=-\frac{Q}{d_1}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu_2\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{\nu_1\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{2}$$

$$(\mathrm{IV}.4)\quad \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\bar{V}_\alpha\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_\alpha}\right)+a\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x_3}$$

特性量 λ 应从液体运动方程中来决定，而与水流中悬浮質含量無关。这表示，在上述情况中紊流中悬浮質的扩散观念是可以应用的。

3°. 在二元、水平方向均質及平均为稳定的平面流中，(2.1)，(2.2)，(2.3)的假設一般並不是假定，而是 ν_1, ν_2, λ 的定义。(II.1)—(II.3)系采取下列形式：

$$(\mathrm{V}.1)\quad \nu_1\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}=v_*^2-Cx_3$$

$$(\mathrm{V}.2)\quad a\bar{\rho}+\lambda\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}=0$$

$$(\mathrm{V}.3)\quad \sigma gad_1\bar{\rho}+Q-d_1\frac{d}{dx_3}\left(\nu_2\frac{db}{dx_3}\right)-d_1\nu_1\left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right)^2=0$$

如果水流对悬浮顆粒所作的功甚小，即 $\sigma agd_1\bar{\rho}$ 項比方程式(V.3)中其他各項要小，則方程系分解为彼此無关的液体