

弹性薄版与网格梁

倪明士 編 著

科学技術出版社

彈性薄版与網格梁

倪明士 編著



科学技術出版社

內 容 提 要

本書討論結構工程中常用的一些均質、各向同性、受橫向荷重的各種薄版的小撓度平衡問題，兼及網格梁的分析原理。對薄版及網格梁的一般理論僅作必要的介紹，對各種具體問題的分析則以嚴正的理論解法與近似的分析法並重。

本書可作為高等學校土建系參考用書，更可供結構工程設計人員設計時參考查用。

彈 性 薄 版 與 網 格 梁

編 著 者 倪 明 士

*

科學技術出版社出版

(上海南京西路 2004 號)

上海市書刊出版業營業許可證出 079 號

大眾文化印刷廠印刷 新華書店上海發行所總經售

*

統一書號：15119·763

開本 850×1168 紙 1/32 • 印張 11 9/16 插頁 4 張 • 字數 283,000

1958 年 8 月第 1 版

1958 年 8 月第 1 次印刷 印數 1—2,000

定價：(10) 2.00 元

序 言

薄版在結構工程中的用途甚廣。土建及造船等工程方面的結構物，常需采用各种式样的薄版構件。薄版構件的厚度与寬度比甚小，且受力后所產生的撓度亦極微小，故在研究分析时常称为薄版小撓度問題。

薄版小撓度問題是彈性力學中的重要問題之一，包括內容甚为丰富，除应用最廣并为众所周知的靜力平衡問題外，尚有振動和穩定問題。对于这些問題，本書不拟作全面介紹，而將集中討論一些工程上常用到的均質、各向同性、受橫向荷重的薄版的靜力平衡問題。涉及的有矩形版、方形版、圓形版、环形版、正三角形等杂形版、無梁版和有直交肋梁的大矩形版等。又網格梁的分析原理与版極為相似，故亦同时加以討論。除無梁版和網格梁主要供土木工程方面应用外，其余各种版件在某种程度下亦可供其他工程方面应用。

按照彈性力學來分析薄版小撓度問題，自可得到明确的物理概念及嚴正的解答；但对于某些条件复杂的問題的解答有时不免过于冗繁，于是在实用上不得不有賴于近似計算法。

本書編寫目的在于切合实用，故对一般理論僅作必要的介紹，大部分篇幅均集中于討論各种具体問題。嚴正的理論分析法和近似的数值計算法并重，俾可互相比較。所介紹的近似計算法有多种，如矩形版的馬尔庫斯法，加肋大型版的李滋法等；特別着重地討論了有限差分法，运用不同形狀的格網布置來分析矩形和方形版、三角形等杂形版与網格梁。关于正三角形格網和用有限差分

解網格梁的一些內容，系作者得到某些參考文獻的啓發，經研究後的結果。

對於各具體問題除有數學公式可資推算外，並且附有許多計算表格，其中關於正三角形版的六幀表格，系華東工業建築設計院的圖表資料，承該院允准轉載特此志謝；對於網格梁者則按不同的布置繪成彎矩和剪力系數圖，這些圖表數值承吾妹慧瑾協助計算，亦志謝意。

作者限于專業水平，本書編寫系在公余之暇，倉卒完成，錯誤之處尚祈讀者隨時指正為幸。

倪明士

一九五七年十月

上海市民用建築設計院

第一章 薄版基本計算式的誘導

甲 概述

§ 1-1 应力性質的揣測 設在一四边支持的矩形薄版面上，加有垂直于版面的橫向荷重时，版面上的所有地点皆將產生位移，使原來的平面变成曲面。例如圖 1-1.01 *a* 所示的矩形版 $ABCD$ ，受荷重后，版上的任意点 F 即变位至 F' ，而使原在版平面上的直綫 EF 和 GF 成 EF' 和 GF' 曲綫状态。从材料力学中梁的理論，可以断定撓曲的產生是由于弯矩的作用。因此，当 EF 变为 EF' 时必有一弯矩作用着，同样在 GF 变为 GF' 时亦必有弯矩的作用。更進一步而言，一般沿 EF 和 GF 綫上的弯矩不一定为定量，而是有变化的，这样更会引起剪力的存在。

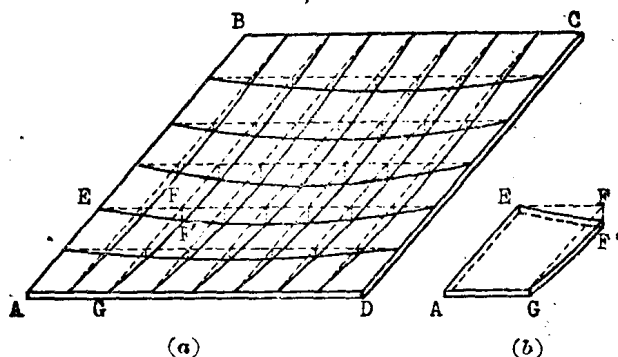


圖 1-1.01

如果我們將版的 $AEGF$ 部分分割而为自由体，如圖 1-1.01 *b*，我們發覺变形后的 $AGF'E$ 是一扭曲面。这就說明在 GF' 和 EF'

上尚有扭矩的作用。

因此僅從這些現象，我們可以肯定薄版受荷重或外力後所產生的應力有彎矩、剪力及扭矩的作用，比梁件上的應力作用要複雜些。

§ 1-2 矩形薄版分析法的進展 回顧一下矩形薄版的分析法的進展，頗為有趣。

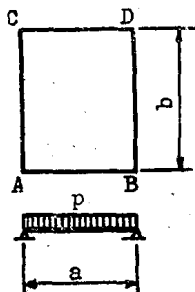


圖 1-2.01

(1) 薄版梁法：最早是將四邊支承的矩形薄版在兩短邊上的支承作用略而不計；換言之，即不論版的長寬比為若干，皆作為單向版計算。顯然這是非常粗糙的方法，且當版的形狀愈近正方時，誤差愈大；對方形版而言，從對稱的關係看來，是很難以理解的。按此規定，若方形版的邊長為 a （見圖 1-2.01），單位面積上的均布荷重為 p ，則在版中心的最大彎矩

$$M_{\max} = \frac{1}{8} p a^2 = 0.1250 p a^2. \quad (1-2.01)$$

(2) 格子梁法：本法假定版是由縱橫二方向的狹版梁所組成的，而在任意點，從過該點的二方向的狹版梁所計算得的撓度應相等。如圖 1-2.02, EF 和 GH 為二個分別平行於 x - 和 y - 軸的狹版梁，它們的交點為 U 。若荷重 p 分布于二狹版梁的強度各為 p_x 及 p_y ，則在 U 點的撓度為

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \alpha \frac{p_x a^4}{EI} \\ w_y &= \beta \frac{p_y b^4}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (1-2.02)$$

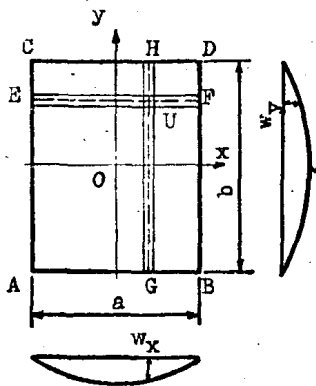


圖 1-2.02

其中 α 和 β 為撓度係數，隨 U 點的地位、荷重狀態及支承情形而定； E 為材料的彈性模量， I 為截面慣矩。因為 $w_x = w_y$ ，所以

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{b^4}{a^4}, \quad (1-2.03)$$

又因 $p_x + p_y = p$, 使得

$$\frac{p_x}{p} = \frac{\beta b^4}{\alpha a^4 + \beta b^4}, \quad \frac{p_y}{p} = \frac{\alpha a^4}{\alpha a^4 + \beta b^4} \quad (1-2.04)$$

將沿 x -軸上的荷重分配比 $\frac{p_x}{p}$ 按不同的長寬比繪成圖形, 其分布狀態如圖 1-2.03 所示。從圖形可知, 沿 x -軸上的荷重分配並不為均布狀, 而是呈曲綫形的, 在中心為最小, 至末端為最大; 而當長寬比為 2 時, 在 y -軸向的荷重僅為全部的 6% 左右, 此即所以在實用上規定, 在此值

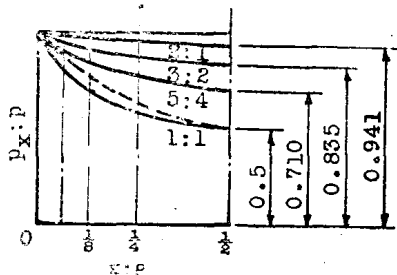


圖 1-2.03

開始, 即可作為單向版計算而無多大誤差。今為簡化起見, 若假定方形版沿 x -軸的分配比圖形為拋物綫 (如圖中虛綫), 則可求得在版中心的最大彎矩為

$$M_{\max} = \frac{7}{96} p a^2 = 0.0728 p a^2, \quad (1-2.05)$$

與 (1-2.01) 式相比, 減小了許多。

(3) 中心交叉梁法: 此法又名為格拉旭夫朗肯 (Grashof-Rankine) 法。其原理與前格子梁理論相似, 唯一區別是假定版上的荷重分配比只以版中心的數值為準, 作為均布的, 而不計其曲綫變化。這樣的假設, 在理論上說是退步的, 但在實用上却十分方便。依此, 則方形版中心的最大彎矩即為

$$M_{\max} = \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} a^2 = 0.0625 p a^2, \quad (1-2.06)$$

比 (1-2.05) 式又小了若干。

(4) 對角綫彎矩法: 從實際試驗鋼筋混凝土版, 至破損階段

時，可在版的底面上發現裂紋。當版的長寬比近乎 1 時，裂紋的地位很近乎對角綫，但當比較大時，即有顯著的出入。然無論如何，

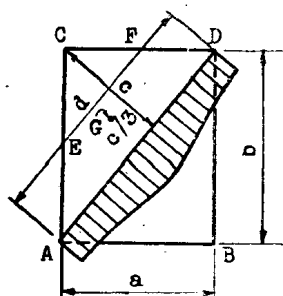


圖 1-2.01

裂紋的地位總顯示最大彎應力的地位；至於彎矩在對角綫上如何分布，尚無法說明。在本法中假定其為均布的。

在圖 1-2.04 中，當荷重為均布時，AC 與 CD 邊上的反力中心分別為 E 和 F 點；在 $\triangle ACD$ 上的荷重可假定集中於 G 點，離 AD 對角綫的垂直距離為

$\frac{1}{3}c$ 。從靜力平衡條件，在 AD 對角綫上的彎矩總值為

$$M_d = \frac{pab}{2} \cdot \frac{c}{2} - \frac{pab}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{pab}{12}c,$$

因為

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

所以

$$M_d = \frac{p}{12} \cdot \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

分解至二個方向

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{a^3 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{p}{12} \\ M_y &= \frac{a^2 b^3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{p}{12} \end{aligned} \right\} \quad (1-2.07)$$

以方形版而言，在版中心的單位寬度上的彎矩

$$M_{\max} = \frac{1}{24} p a^2 = 0.0417 p a^2, \quad (1-2.08)$$

與前法比較再減小了些。

(5) 彈性力學的嚴正解：前述的各種方法是以材料力學而進行的計算法。版的應力作用，關連到 x, y, z 三個方向，所以是立體問題。我們將討論到按照彈性力學理論的基本計算式是偏微分方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}, \quad (1-2.09)$$

其中 $N = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)}$ 称为版的刚度, 与材料的弹性模量 E 、泊松比 (Poisson's Ratio) μ 、及厚度 h 有关。

随着对实际问题的研究, 从 (1-2.09) 式所得到的解答, 几乎全是冗长的级数, 包含着由三角函数、指数函数、双曲线函数等所组成的多项式。此外亦有些问题, 即使是繁复的答案, 亦尚未能很好的解决。因此在实用上, 还有借助于数值计算的必要。

对于矩形薄版, 马尔库斯 (H. Marcus) 更有简化的算法。他比较了中心交叉梁法与弹性力学的理论解法, 发现这两个方法的主要不同点是在前法中忽视了版内交叉狭版梁间的扭转作用。他用浅显的结构力学的理论在前法中补充考虑了扭转作用, 求得了非常近似于弹性力学的答案。

1925 年时, 德国曾规定使用马尔库斯的方法于钢筋混凝土版件的计算。在当时曾引起了这样的问题: 即以各向同性的假设为基础的算法, 是否亦适用于钢筋混凝土版。反对者以为, 由于钢筋混凝土版中在两个方向的钢筋不在同一平面, 并且当其有裂纹出现后抗扭作用是否存在殊属疑问, 因此不宜采用。为此, 马尔库斯曾著文说明裂纹出现后的抗扭作用。同时给黑尔 (Gehler) 在 1927 ~ 30 年中, 曾做了许多试验, 证明其使用的可能性。

以弹性力学理论计算薄版是与泊松比值有关的, 这对于钢材是比较肯定的 $\mu = 0.3$ 。但对于钢筋混凝土, 却是一个出入幅度很大的数值。平均而言约为 $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{7}$ 。在苏联规定一般民用结构中 μ 值的影响可略而不计, 仅对十分重要的版件, 始考虑之。

(6) 塑性理论解: 在 1950 年以前, 包括苏联在内, 各国对于钢筋混凝土版的分析是以弹性理论为基础的。最近苏联格复斯其夫 (Гвоздев) 教授制订了以限界平衡理论、考虑了因塑性变形而产生

生的应力重分布的計算法。

按照限界平衡理論，当鋼筋混凝土版的荷重能力逐漸消耗而至尽端时，在版的上下面上即有裂紋出現。这种裂紋即称为塑性鉸，將版分为若干塊。因此，版件便可从超靜定結構而視為靜定結構，这样，不僅簡化了計算工作，且又可節約材料。

乙 理論分析

§ 1-3 薄版小撓度問題的基本假設^① 高度远小于底面尺度的柱形彈性体，而成扁平的版形时，即称为薄版。平行于薄版的上下面、且又平分其厚度的平面，称为中央面。当薄版受垂直于版面的橫向荷重时，版便要發生撓曲，并且在其平面內尚有張力發生。但当

(1) 版的厚度远較它的其他二尺度为小，
和 (2) 版的撓度比它的厚度小，
則 (3) 版平面內的張力即可略而不計；
同时，按照綫性平版理論，尙假定

(4) 在撓曲前中央面的法綫在变形后仍为撓曲中央面法綫，
和 (5) 版的各水平層間無正应力存在。

这些便是彈性薄版小撓度問題的基本假設。据此可誘導基本計算式而解决各种具体問題。

(一) 直角坐标

§ 1-4 傾度与曲率 在分析版內各种应力前，必須对撓曲面的性質有所明瞭。將版的中央平面安置在坐标所成的 xy -面上，如圖 1-4.01 a 。版受弯曲后，中央平面上各点即有位移產生，这样的位移在今后版的討論中即称为撓度。現考慮过該面上的任何一点 a ，取一微分体素 $dx \cdot dy$ ，并过 a 点作 $m\eta$ -面垂直于 xy -面，則在

① 參閱 Н. И. 別茹霍夫：彈性与塑性理論 p. 263；錢偉長：彈性力學，p. 253。

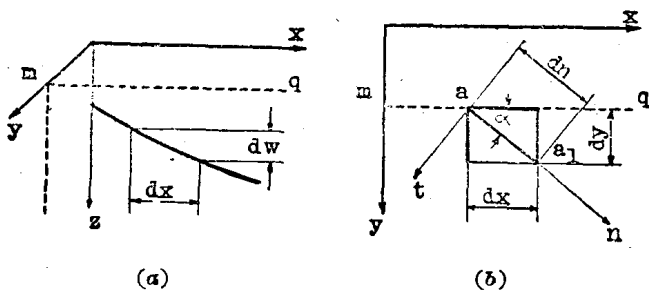


圖 1-4.01

該點沿 x -方向的傾度為 $i_{ax} = \frac{\partial w}{\partial x}$ 。同樣在 a 點沿 y -方向的傾度為 $i_{ay} = \frac{\partial w}{\partial y}$ 。倘過 a 點在 xy -面上取一任意方向 an 與 x -軸成 α 角，則 a 點與 a_1 點的撓度差為

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

同時它的相當傾度為

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1-4.01)$$

將上式微分一次，並使等於零，即得到傾度最大時的方向角 α_1 的

$$\tan \alpha_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad (1-4.02)$$

所以 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 的最大值為

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}. \quad (1-4.03)$$

再使 (1-4.01) 式為零，即得到傾度為零的方向角 α_2 的

$$\tan \alpha_2 = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial y}}; \quad (1-4.04)$$

从(1-4.02)和(1-4.04)式,可知

$$\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1,$$

此即表明:在薄版撓曲面上任一点 a 处的最大倾度方向恒与倾度为零的方向互相垂直。

从微分学,我們知道在曲綫上任一点的曲率等于其曲率半徑的倒数,因此若以 r_x 代表在薄版撓曲后的中央平面上任意点沿 x -方向的曲率半徑,則

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

因为薄版的撓度很小,所以 $\tan \alpha \approx \alpha$, $\tan^2 \alpha \approx 0$, 于是

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1-4.05)$$

撓曲向下时,曲率規定为正,因而使 $\frac{1}{r_x}$ 的值帶有負号。按同理可知在沿 y -方向的曲率为

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (1-4.06)$$

(1-4.05)和(1-4.06)式說明薄版曲率的計算与梁者相同。至于在 a 点而沿任意方向 an 的中央平面的曲率則应为

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right). \quad (1-4.07)$$

从(1-4.01)式

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha,$$

和

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha\right) = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha\right) = \\ &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha - \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \quad (1-4.08) \end{aligned}$$

式中 $\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 常称为对 x -和 y -軸的扭轉(以下簡稱扭轉)。

我們再求沿另一与 an 垂直的新方向 at 的曲率; 將(1-4.08)式中的 α 用 $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 替代, 使得

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha \quad (1-4.09)$$

如將(1-4.08)和(1-4.09)式相加, 則

$$\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t}, \quad (1-4.10)$$

这就是說, 撓曲面上任一点 a 沿任意二相垂直方向的曲率之和与角度 α 無關。此和值有时亦称为該点的平均曲率。

在任意点 a 对于 an 及 at 兩方向的扭轉为

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dn} \right),$$

因为 an 和 at 相垂直, 所以將(1-4.01)式的 α 用 $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 替代, 便得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{nt}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha\right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

或

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) + \cos 2\alpha \frac{1}{r_{xy}} \quad (1-4.11)$$

將(1-4.08)式對 α 微分并使等於零, 便得在此任意點 a 的最大與最小曲率的方向, 即

$$\frac{1}{r_x} \sin 2\alpha + \frac{2}{r_{xy}} \cos 2\alpha - \frac{1}{r_y} \sin 2\alpha = 0 \quad (1-4.12)$$

或

$$\tan 2\alpha = - \frac{\frac{2}{r_{xy}}}{\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}} \quad (1-4.13)$$

由(1-4.13)式, 可求得兩個 α 的值, 相差 $\frac{\pi}{2}$ 。將此二值代入(1-4.07)式即有兩個 $\frac{1}{r_n}$ 值, 一個是最大值, 另一個是最小值, 此即在該任意點的主曲率, 而該兩個如圖1-4.01b上所示的 nax -和 tax -面即稱為曲率主面。因此若將坐標面 xz -和 yz -平行於此二個曲率主面, 則(1-4.08)和(1-4.11)式即簡化為

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \\ \frac{1}{r_{nt}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-4.14)$$

(1-4.12)式的左邊恰為(1-4.11)式的二倍, 所以若 an 和 at 是曲率主面, 則 $\frac{1}{r_{nt}}$ 必等於零。

§ 1-5 應力和彎矩 圖1-5.01表示薄版在沿 x -方向某垂直面上撓曲後的狀態。從該圖可知, 在中性面上任意點 F' 的法綫於撓曲過程中所轉過的角為 $-\frac{\partial w}{\partial x}$ 。這裡所以採用負號是當 z 以負值代入(即在中性軸以下)時, 能相當於拉應力區域有正的應變值。從這一轉動可使在離中性軸 F' 點 z 距離外有一沿 x -方向的偏移

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1-5.01)$$

同理, 沿 y -方向, 該点的偏移可用

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-5.02)$$

表示, 亦即在 x -和 y -方向的应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1-5.03)$$

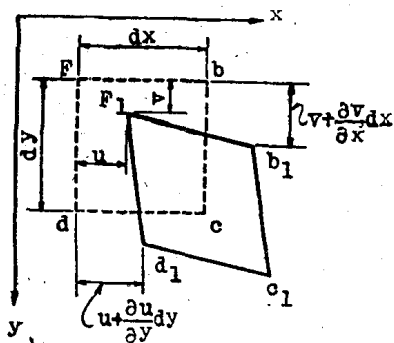


圖 1-5.02

为了求得相应的剪应变的算式, 更進一步在 F 处取一微分元素 $Fbcd$, 見圖 1-5.02。它的 Fb 和 Fd 边分别平行于 x -和 y -方向, 并距离中性軸的距离亦为 z 。受弯矩作用后, F 、 b 、 c 和 d 四角点即有偏移。若 F_1 点的偏移为 (u, v) , 則 d 点的偏移沿 x -方向

是 $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$, b 点沿 y -方向的偏移是 $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。因此剪应变是

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-5.04)$$

將(1-5.01)和(1-5.02)式代入(1-5.04)式, 使得

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1-5.05)$$

根据虎克定律

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \right\} \quad (1-5.06)$$

式中 E 為材料的彈性模量, μ 為其泊松比。所以從 (1-5.03) 和 (1-5.06) 式可知

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1-5.07)$$

這種垂直於微分體素側面的叫做正應力。正應力為拉力時規定為正, 壓力時為負。再水平的剪應力的值為

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2Gz \frac{1}{r_{xy}} \quad (1-5.08)$$

式中 G 為剛性模量。又象梁的理論, 在任何地點垂直剪應力應等於水平剪應力的理由一樣、考慮到此微分體素沿 z -軸的力偶平衡得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

圖 1-5.03 a 所示 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和 τ_{yx} 的方向皆表示正方向。

因為此微分體素是極為微小的, 所以在各側面上的各種應力成分即可視為是在 P 點沿各截面的應力。正應力和水平剪力必可依其厚度化為力偶, 即在單位長度上的

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \\ M_{xy} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, \end{aligned} \right\} \quad (1-5.09)$$