

高等学校试用教材

傅里叶光学

华中理工大学 吕乃光 编

GAO
XIAO
XUE
CAI

机械工业出版社

本书系统阐述了傅里叶光学的基本理论和主要应用。全书共九章，一~二章为数学基础，三~六章运用线性系统理论讨论光的传播、衍射，经透镜的傅里叶变换和经光学系统的成像问题以及部分相干场的传播特性。七~九章是光学全息、光学信息处理、激光散斑技术的基本原理和应用。

全书侧重基本概念、基本物理思想以及分析方法的讨论。内容深入浅出，循序渐进，各章附有习题，适于自学。

本书可作为高等学校光学、光学仪器专业本科学生的教材，也可供有关专业研究生和从事光学、光学仪器、图像处理等工作的科技人员参考。

傅里叶光学

华中理工大学 吕乃光 编

责任编辑：林静贤 责任校对：李广孚
版式设计：霍永明

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $17 \frac{1}{4}$ · 字数 424 千字
1988年6月北京第一版·1988年6月北京第一次印刷
印数 0,001—2,200 · 定价：2.90 元

ISBN 7-111-00230-X/O · 2(课)

前 言

本书是根据高等学校光学仪器专业和光学专业《傅里叶光学》教学大纲编写的。全书共九章。第一、二章是傅里叶分析和线性系统理论，为在光学中借鉴通信理论中常用的分析方法建立了必要的数学基础。第三、四、五章运用空间域和频率域方法讨论了光波携带信息在自由空间或经过光学系统的传播问题，以及透镜的傅里叶变换性质。第六章为部分相干理论，目的是使读者了解光场相干性质对干涉、衍射、成像的影响。安排教学时，这一章可作为选讲内容。上述四章可看作是傅里叶光学的物理基础。第七、八、九章介绍了全息、光学信息处理、激光散斑技术，这些属于傅里叶光学的应用。

本书既注意了和经典物理光学的区别和联系，又注意引用通信理论中一些普遍的概念和思想来解释光学现象，以便突出傅里叶光学是光学和通信理论相结合的这一学科特点。尤其强调基本的物理思想以及分析方法，希望使读者能建立清晰的物理图像。在阐述方式上注意深入浅出，循序渐进，理论讨论与图解方法结合，以便于自学。各章习题与正文密切配合，解答这些习题不但有助于掌握基本理论和概念，而且能培养分析和解决问题的能力。

本书可作为高等学校光学仪器和光学专业《傅里叶光学》课程的教材，也可供从事现代光学研究的科研人员、光学仪器工作的工程技术人员参考。

本书由四川大学苏显渝副教授主审，他的热忱帮助无疑使本书增色不少。天津大学张以谟教授审阅了全书。参加审稿会的还有：武汉测绘科技大学朱光世教授、北京工业学院刘培森、清华大学严瑛白、上海机械学院顾坚保、浙江大学项秉琳等同志。他们为本书提出了富有建设性的意见，在此一并致谢。

同时还要感谢华中理工大学光学工程系教师和研究生所给予的多方面的支持和帮助；感谢雷洞天同志冲洗了全书的照片。

限于编者水平，书中会有一些缺点和错误，恳请读者不吝指正。

编者 1987年2月于华中理工大学

目 录

| | | |
|-------------------------|--------------------------|-----|
| 前言 | § 6-2 光场相干性的一般概念 | 144 |
| 绪论 | § 6-3 互相干函数和复相干度 | 146 |
| 第一章 傅里叶分析 | § 6-4 相干度的测量 | 150 |
| § 1-1 一些常用函数 | § 6-5 傅里叶变换光谱学 | 151 |
| § 1-2 脉冲函数 | § 6-6 准单色光的干涉 | 153 |
| § 1-3 卷积 | § 6-7 准单色光的传播和衍射 | 156 |
| § 1-4 相关 | § 6-8 范西特-泽尼克定理 | 165 |
| § 1-5 正交矢量空间和正交函数系 | § 6-9 部分相干场中透镜的傅里叶变换性质 | 171 |
| § 1-6 傅里叶级数 | § 6-10 部分相干光成像 | 173 |
| § 1-7 傅里叶变换 | 习题 | 178 |
| 习题 | 第七章 光学全息 | 180 |
| 第二章 线性系统 | § 7-1 引言 | 180 |
| § 2-1 线性系统 | § 7-2 波前记录与再现 | 180 |
| § 2-2 线性不变系统 | § 7-3 同轴全息图和离轴全息图 | 182 |
| § 2-3 抽样定理 | § 7-4 基元全息图分析 | 186 |
| 习题 | § 7-5 傅里叶变换全息图 | 190 |
| 第三章 标量衍射理论 | § 7-6 位相全息图 | 193 |
| § 3-1 光波的数学描述 | § 7-7 平面全息图的衍射效率 | 194 |
| § 3-2 基尔霍夫衍射理论 | § 7-8 体积全息图 | 196 |
| § 3-3 衍射的角谱理论 | § 7-9 计算全息图 | 198 |
| § 3-4 菲涅耳衍射 | § 7-10 全息术的应用 | 200 |
| § 3-5 夫琅和费衍射 | 习题 | 208 |
| § 3-6 衍射光栅 | 第八章 空间滤波和光学信息处理 | 210 |
| 习题 | § 8-1 引言 | 210 |
| 第四章 透镜的傅里叶变换性质 | § 8-2 相干滤波的基本原理 | 212 |
| § 4-1 透镜的位相调制作用 | § 8-3 简单振幅和位相滤波的例子 | 223 |
| § 4-2 透镜的傅里叶变换性质 | § 8-4 光栅滤波器的应用——图像加 | 230 |
| § 4-3 光学频谱分析系统 | 减和微分 | 230 |
| 习题 | § 8-5 复数滤波器的应用——图像识别和消模糊 | 233 |
| 第五章 光学成像系统的频率特性 | § 8-6 非相干光处理 | 238 |
| § 5-1 透镜的成像性质 | § 8-7 白光信息处理 | 244 |
| § 5-2 成像系统的一般分析 | 习题 | 250 |
| § 5-3 衍射受限的相干成像系统的频率响应 | 第九章 激光散斑及其应用 | 252 |
| § 5-4 衍射受限的非相干成像系统的频率响应 | § 9-1 散斑现象及其分类 | 252 |
| § 5-5 像差对于成像系统传递函数的影响 | § 9-2 散斑照相 | 254 |
| § 5-6 相干与非相干成像系统的比较 | § 9-3 散斑干涉计量 | 260 |
| § 5-7 光学链 | 习题 | 264 |
| 习题 | 附录一 贝塞尔函数 | 266 |
| 第六章 部分相干理论 | 附录二 记录介质 | 268 |
| § 6-1 实多色场的复值表示 | 参考书目 | 271 |

绪 论

一、光学和通信理论的结合

光为我们带来热和光明，是人类赖以生存的重要条件。它不仅是一种重要的能源，也是携带和传递信息的重要载体。正是由于光波携带物体的信息，传播入人的眼睛，人才能对周围事物产生视觉印象。这是人类认识外部世界的最主要的方式。人类寻找食物、创造财富、用书刊、照片、电影、电视交流信息，在人类的各项活动中，光起着极为重要的作用。可以说，没有光也就没有现代的物质和精神文明。

光波在传递信息过程中，同时伴随着能量的传递。但从应用角度来看，光作为能源利用时，关心的是如何有效利用光辐射的能量；光用于信息传递时，则考虑的是包含光信息的光场分布在传递过程中所发生的变化。正因如此，可以把现代光学工程从能量和信息利用的角度分为两大类：如照明工程、激光武器、激光加工、太阳能利用等都属光能量技术；而光信息的记录、显示和测量、光信息处理、光纤通信都属于光信息技术。

自发光物体或间接发光的物体（物体受光照射产生透射光或漫反射光）依据其本身的形状、明暗、色彩来改变光波的位相、光强、波长等参数，对光波产生空间调制。这种调制和照明光波的性质有关。例如，相干光照明物体，通常产生空间振幅和位相调制；非相干光照明，则产生空间强度调制；部分相干场中，物体将改变光波场的互相干函数；白光照明彩色图像或物体，会使某些波长的光吸收，其它波长的光透射或漫反射，因而产生空间的波长调制或者说不同时间频率的光的空间分布。物体本身的信息正是转化为这样一些形式的光信息由光波携带而传递出去的。

把光学系统看作收集和传递信息的系统，它的作用和通信系统在本质上是相同的。只不过在通信系统中，信息是时间性的，如随时间变化的电流和电压信号。而在光学系统中，信息是空间性的，如复振幅或强度的空间分布。正是这种本质上的共同点，导致了光学和通信理论之间的联系。从本世纪30年代后期开始，两者的关系愈来愈紧密。

此外，光学系统和通信系统还具有相同的基本性质。例如，在一定条件下，可认为光学系统和通信系统一样，也具有线性性和不变性。因而可用线性系统理论描述、分析各自的系统：用时间脉冲响应和时间频率响应描述通信系统；用空间脉冲响应和空间频率响应描述光学系统。从频率域考察系统的效应，即频谱分析方法正是线性系统理论和傅里叶分析提供给我们的最重要的方法。它使以往分道扬镳的光学工作者和电气工程师之间有了共同的语言。

傅里叶光学，或称信息光学正是光学与通信和信息理论相结合而产生的一个现代光学的新分支。它采用傅里叶分析和线性系统理论分析光波的传播、衍射、成像等现象。而光学传递函数、光学全息、光学信息处理则是建立在傅里叶光学理论基础上的实践领域。光学和信息科学的相互渗透，相互结合已经产生了许多重要的成果，它们使光学，这一物理学中最古老的学科焕发了青春，呈现出生机勃勃的景象。

二、全书内容概述

本书第一章给出了必要的数学基础。由于光学系统通常传递二维信息，所以重点讨论了

二维函数的卷积、相关和傅里叶变换。对所涉及的特殊函数及数学定理，着重阐明在光学上的应用，而不追求数学上的严谨。

第二章为线性系统理论。讨论了线性系统、线性不变系统的定义和性质。指出了从空间和频率域讨论系统的两种基本方法。前者着眼于系统脉冲响应，后者着眼于系统的频率响应即传递函数。在后续各章中，正是按这两种方法讨论了单色光场的传播、成像、相干性的传播、光波的波前记录和再现，以及空间滤波等问题。本章实际上为全书建立了一个线性系统的骨架。

光波既然作为信息的载体，光信息的传递本质上是光波的传播和衍射问题。这正是第三章的内容。本章的一些结论与经典物理光学的原理一致，有着相同的物理图像。但讨论方法不同，侧重角谱理论。在频率域讨论了传播现象的传递函数，并由它出发导出菲涅耳衍射和夫琅和费衍射公式。本章还从线性系统理论上给出了经典物理光学的基尔霍夫理论和角谱理论的联系。“夫琅和费衍射是实现傅里叶变换的光学手段”，这是本章着重强调的重要结论。所列举的衍射图样的计算实例，目的在于使读者了解一些典型物体的空间频谱。

第四章从透镜的位相变换入手，根据衍射公式分析了透镜在特定光路中能实现傅里叶变换的作用。介绍了光学频谱分析系统及其应用。

第五章用频谱分析方法对相干和非相干成像系统的性质作了充分讨论。分别定义了相应的传递函数，讨论了像差影响。并从不同角度对两种系统作出比较。本章最后介绍了如何利用光学链这一概念指导系统设计并估计最终的像质。

第六章为部分相干理论。从干涉现象作为物理图像入手，介绍了描述光场相干性的物理量：互相干函数和复相干度。讨论了相干度的测量。利用线性系统理论分析了准单色部分相干场的传播、衍射和成像问题。傅里叶光谱学和范西特-泽尼克定理的讨论表明：对干涉图样作傅里叶分析，可以确定点光源的光谱分布或者准单色扩展光源的光强分布。毫无疑问，这些都应该是傅里叶光学的重要内容。

第七章通过对波前记录与再现，以及基元全息图的讨论，着重阐明光学全息的基本原理。介绍了一些重要类型的全息图以及光学全息的主要应用，包括全息干涉计量、全息光学元件、全息存储和全息显微术。

第八章是光学信息处理。分别讨论了相干光处理、非相干光处理和白光处理的原理。重点放在频域综合上，阐明空间滤波的基本原理以及三种处理之间的本质差别。给出了典型的处理系统。主要的实例包括：相衬法、图像加减和微分、图像识别和消模糊、切趾术以及假色编码等。

第九章介绍了激光散斑现象及其分类，讨论了散斑照相及其在形变测量、图像处理上的应用。最后简要阐述了散斑干涉计量的基本原理。

第一章 傅里叶分析

实验上发现很多物理现象具有所谓线性性质，即它们对同时作用的几个激励的响应等于每个激励单独作用时引起的响应之和。这种线性性质带来很大方便。它使我们能够用对某种“基元”激励的响应，来完备描述物理现象。只要把任意复杂的激励分解为这些基元激励的线性组合，一旦确定下各个基元激励的响应，再通过相应线性组合就可以求出总的响应。在第二章深入讨论线性系统理论之前，首先要解决的问题是：选择什么函数作为基元激励？如何实现任意函数的分解？傅里叶分析正是解决这些问题的重要数学工具。

一个函数在某一区间内可由相互正交的一些函数的线性组合表示。正、余弦函数系和复指数函数系都属于正交函数系。我们将从正交展开引出傅里叶级数、傅里叶变换的概念。

卷积是描述线性不变系统输入-输出关系的基本运算。相关常用来比较两个物理信号的相似程度。本章侧重从定义上讨论这两个重要的积分运算。

在傅里叶光学中，有一些广泛使用的函数，包括脉冲函数，用来描述各种物理量。为方便起见，本章一开始就给出它们的定义。

§ 1-1 一些常用函数

一、阶跃函数

$$\text{step}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

函数图形见图 1-1 a。 $\text{step}(x - x_0)$ 则表示间断点移到 x_0 的阶跃函数。当它和某函数相乘， $x > x_0$ 的部分，乘积等于原函数。 $x < x_0$ 的部分，乘积恒为零。因而阶跃函数的作用如同一个“开关”，可在某点“开启”或“关闭”另一个函数。常用它表示直边（或刀口）的透过率。

二、符号函数

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

函数图形见图 1-1 b。注意它与阶跃函数的联系：

$$\text{sgn}(x) = 2 \text{step}(x) - 1 \quad (1-3)$$

$\text{sgn}(x - x_0)$ 则表示间断点移到 x_0 的符号函数。当它与某函数相乘，可使 $x < x_0$ 部分函数的极性（正负号）改变。例如某孔径的一半嵌有 π 的位相板，可利用符号函数来描述它的复振幅透过率。

三、矩形函数

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1-4)$$

函数以原点为中心，宽度为 a ，高度为 1（图 1-1c）。当 $a = 1$ ，矩形函数为 $\text{rect}(x)$ 。二维矩形函数，可表示成一维矩形函数的乘积：

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

式中， $a > 0$ ， $b > 0$ ，它在 xy 平面上，以原点为中心， $a \times b$ 的矩形范围内，函数值为 1。其它地方处处为零。当 $a = b = 1$ ，则有 $\text{rect}(x)\text{rect}(y)$ 。

光学上常常用矩形函数表示狭缝、矩孔的透过率。它与某函数相乘时，可限制函数自变量的范围，起到截取的作用，故又常称之为“门函数”。

四、三角形函数

$$\text{tri}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1-5)$$

式中， $a > 0$ ，函数以原点为中心，是底边宽 $2a$ 的三角形（图 1-1d）。当 $a = 1$ ，三角形函数为 $\text{tri}(x)$ 。二维三角形函数可表示为一维三角形函数的乘积：

$$\text{tri}\left(\frac{x}{a}\right)\text{tri}\left(\frac{y}{b}\right)$$

式中， $a > 0$ ， $b > 0$ 。当 $a = b = 1$ ，则有 $\text{tri}(x)\text{tri}(y)$ 。

三角形函数可用来表示光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数。

五、sinc 函数

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{\pi x}{a}} \quad (1-6)$$

式中 $a > 0$ ，函数在原点具有最大值 1。零点位置在 $x = \pm na$ ($n = 1, 2, 3 \dots$)。参见图 1-1e。当 $a = 1$ 时，有 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ 。它的零点位于 $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ 。二维 sinc 函数可以表示为

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\text{sinc}\left(\frac{y}{b}\right)$$

式中， $a > 0$ ， $b > 0$ 。零点位置在 $(\pm na, \pm mb)$ ， n 和 m 均为正整数。

sinc 函数常用来描述狭缝或矩孔的夫琅和费衍射图样。

六、高斯函数

$$\text{Gaus}\left(\frac{x}{a}\right) = \exp\left[-\pi\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \quad (1-7)$$

见图 1-1f，函数在原点具有最大值 1，曲线下的面积为 a ($a > 0$)。当 $a = 1$ ， $\text{Gaus}(x) = \exp(-\pi x^2)$ 。

二维高斯函数可以表示为

$$\text{Gaus}\left(\frac{x}{a}\right)\text{Gaus}\left(\frac{y}{b}\right) = \exp\left\{-\pi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\right\} \quad (1-8)$$

式中, $a > 0$, $b > 0$, 函数曲面下的体积等于 ab 。当 $a = b = 1$, 高斯函数为

$$\text{Gaus}(x)\text{Gaus}(y) = \exp[-\pi(x^2 + y^2)] \quad (1-9)$$

也可用极坐标表示, 令 $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\text{Gaus}(r) = \exp(-\pi r^2) \quad (1-10)$$

高斯函数常用来描述激光器发出的高斯光束。

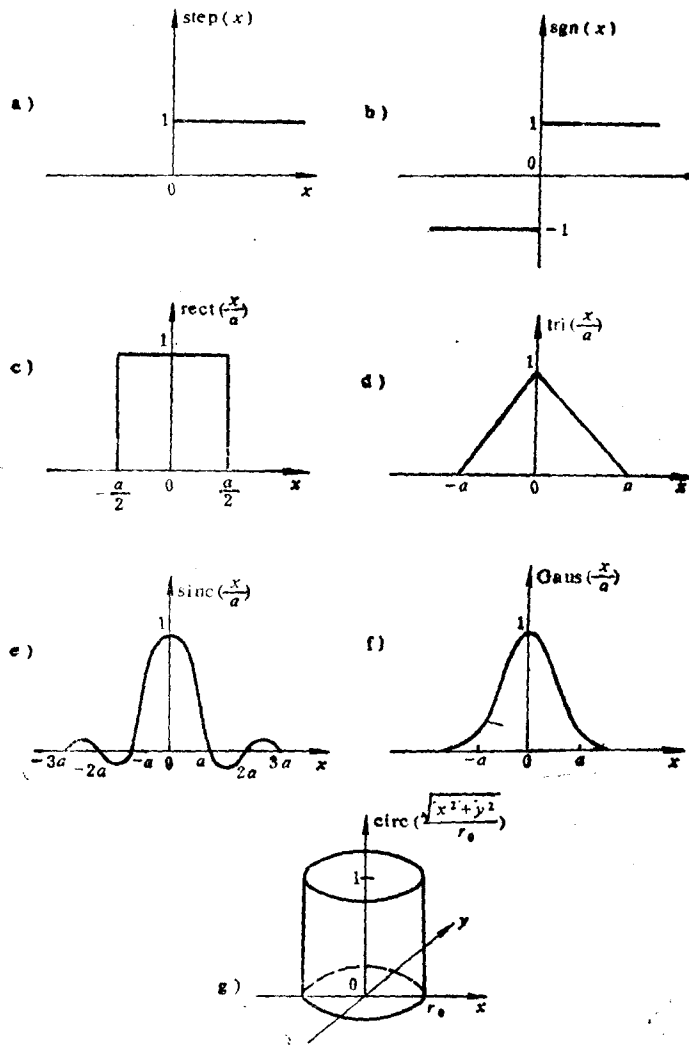


图1-1 常用函数

- a) 阶跃函数 b) 符号函数 c) 矩形函数 d) 三角形函数
e) sinc函数 f) 高斯函数 g) 圆域函数

七、圆域函数

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2+y^2} \leq r_0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1-11)$$

参见图 1-1 g, 函数呈圆柱形, 底半径为 r_0 , 高度为 1。在极坐标系中写作 $\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$ 。当 $r_0 = 1$, 圆域函数为 $\text{circ}(r)$ 。

圆域函数常用来表示圆孔的透过率。

§ 1-2 脉冲函数

一、 δ 函数的定义与性质

1930年狄拉克为了描述一些宽度极为窄小, 而幅度趋于无穷大的物理量而引入了 δ 函数, 即脉冲函数。由于它超出了普通函数的概念, 引起许多数学家的困惑和反对。但注重实效的物理学家却把它看作是有力的数学工具, 尽管当时还缺乏严格的证明。 δ 函数的严密理论是二十多年后才由施瓦兹 (L. Schwartz) 发展起来的。

二维空间 δ 函数的一般定义是

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= 0, \quad x \neq 0 \text{ 或 } y \neq 0 \\ \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy &= 1 \end{aligned} \quad (1-12)$$

定义式表明, 在原点以外脉冲函数的值恒为零, 而在原点附近无限小的范围内, 函数积分为 1。

常常用 δ 函数代表点质量、点电荷、点脉冲、点光源或者其它在某一坐标系中高度集中的物理量。对于实际物理量, 当然这只是一种理想化处理, 其目的在于使许多物理过程的研究更加方便。例如, 线性系统的性质可由其对脉冲输入的响应来决定。任意复杂的输入函数可分解为许多适当分布和加权的 δ 函数, 把它们分别作用于系统, 各脉冲产生响应的线性叠加就给出系统总的响应。

把真实的物理脉冲理想化为 δ 函数, 不仅是为了便于分析, 还有物理上的考虑。例如, 一个光学成像系统对半径为 r 的圆孔成像。当 r 足够大, 像平面上可观察到圆孔的像。当 r 逐渐减小 (假定照明光强与圆孔面积的乘积保持为常数), 像逐渐变为透镜光瞳的夫琅和费衍射图样。当 r 小于某一数值 r_0 时, 像不再随之改

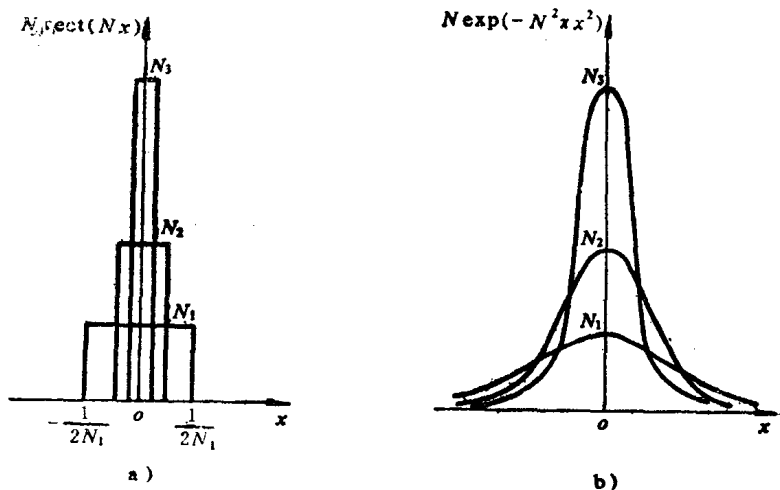


图 1-2

a) 矩形脉冲序列 b) 高斯脉冲序列

变。换句话说,对于我们研究的成像系统,凡 $r \leq r_0$ 的圆孔的像都是没有区别的。这时圆孔就可以看作 δ 函数(点物)。它说明由于检测仪器的有限分辨能力,并不能区分理想脉冲函数的响应和虽然窄小、但仍具有有限宽度的物理脉冲的响应。故采用 δ 函数来近似实际的物理脉冲,完全是允许的。

δ 函数的另一种定义方式是把它看作一些普通函数构成的序列的极限。图 1-2 给出一维矩形脉冲序列和高斯脉冲序列的例子。函数的宽度逐渐减小,幅度逐渐增大,面积保持为 1。 δ 函数定义为它们的极限:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{rect}(Nx) \quad (1-13)$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2) \quad (1-14)$$

二维空间 δ 函数可以表示为不同的形式:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{rect}(Nx) \text{rect}(Ny) \quad (1-15)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x^2 + y^2)] \quad (1-16)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{sinc}(Nx) \text{sinc}(Ny) \quad (1-17)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\pi} \text{circ}(N\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1-18)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{J_1(2\pi N\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1-19)$$

应用时选择哪一种形式,可视方便而定。例如在上述讨论圆孔成像的问题中,显然选择公式(1-18)是合适的。

δ 函数的运算要通过积分式作用于另一个函数才能得到定值,它是一种“广义函数”。把 δ 函数当作广义函数给出比较严格的定义:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) \phi(x, y) dx dy = \phi(0, 0) \quad (1-20)$$

式中 $\phi(x, y)$ 称为检验函数,它是连续的,在一个有限区间外为零,并具有所有阶的连续导数。公式(1-20)按通常的积分来说没有意义,但它是由于广义函数 $\delta(x, y)$ 赋予的数 $\phi(0, 0)$ 来定义的,这个数是赋予检验函数 $\phi(x, y)$ 的。这就好比是对于一个实际物理量,需要通过测试仪器的响应(或读数)来感知或表征它,即它赋予检验函数(或测试函数)某一数值。

图 1-3 给出 δ 函数的图示方法,它用带箭头的竖线表示,具有单位长度,相应于 δ 函数的体积。

下面列出 δ 函数的常用性质,这些性质都可由脉冲函数的定义直接导出,本书未予证明。

(1) 筛选性质

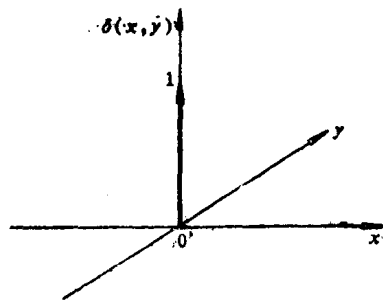


图1-3 空间 δ 函数的图示方法

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) \phi(x, y) dx dy = \phi(x_0, y_0) \quad (1-21)$$

在 $\phi(x, y)$ 连续的各点上, 可通过位于 (x_0, y_0) 点的脉冲函数对 $\phi(x, y)$ 的作用, 筛选出 $\phi(x_0, y_0)$ 。

(2) 比例变化性质

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y) \quad (1-22)$$

(3) δ 函数与普通函数的乘积

$$h(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = h(x_0, y_0) \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (1-23)$$

假定 $h(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续。

二、梳函数

沿 x 轴分布, 间隔都等于 1 的无穷多脉冲函数, 可用梳函数表示

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \text{comb}(x) \quad (1-24)$$

式中, n 取整数。利用 δ 函数的比例变化性质, 可以把间隔为 τ 的等间距脉冲序列表示为梳函数形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{\tau} - n\right) = \frac{1}{\tau} \text{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) \quad (1-25)$$

梳函数与普通函数的乘积是

$$f(x) \cdot \frac{1}{\tau} \text{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \delta(x - n\tau) \quad (1-26)$$

显然, 可以利用梳函数对其它普通函数作等间距抽样。

在 x, y 方向间隔分别等于 a 和 b ($a > 0, b > 0$) 的二维脉冲阵列, 可以表示为

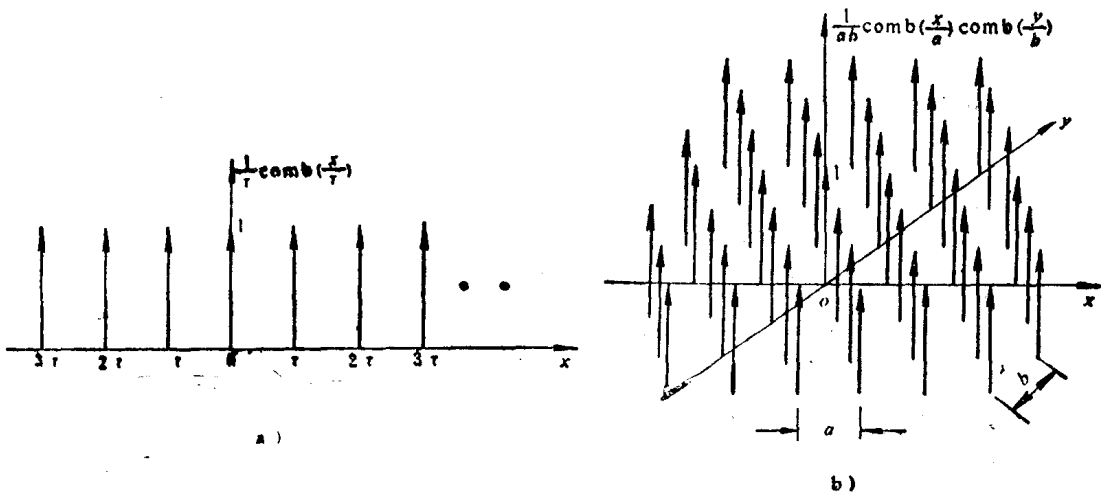


图1-4 梳函数

a) 一维情形 b) 二维情形

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-na, y-mb) = \frac{1}{ab} \text{comb}\left(\frac{x}{a}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (1-27)$$

当 $a = b = 1$, 则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-n, y-m) = \text{comb}(x) \text{comb}(y) \quad (1-28)$$

图 1-4 给出一维和二维梳函数的图示方法。光学上常用梳函数表示点光源的阵列, 或小孔阵列的透过率函数。

§ 1-3 卷 积

一、卷积的定义

两个复值函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的卷积定义为

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \\ &= f(x, y) * h(x, y) \end{aligned} \quad (1-29)$$

式中, * 号表示卷积运算。 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的变量改为 ξ 和 η , 作为积分变量。 x, y 表示函数之一在 ξ, η 平面上的位移量。采用图解分析有助于理解卷积运算的真实含义。见图 1-5 a 中两个一维函数卷积的例子。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$f(x)$ 和 $h(x)$ 的卷积为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x-\tau) d\tau \quad (1-30)$$

根据定义, 卷积的具体过程是: 把自变量改为 τ , 画出 $f(\tau)$ 和 $h(-\tau)$ (见图 1-5 b)。只要将 $h(\tau)$ 相对纵轴折叠便得到其镜像 $h(-\tau)$ 。再把它沿横轴平移 $x = x_0$, 就得到了 $h(x_0 - \tau)$ [见图 1-5 c]。当 $x > 0$ 时, $h(-\tau)$ 右移; 当 $x < 0$ 时, $h(-\tau)$ 左移。

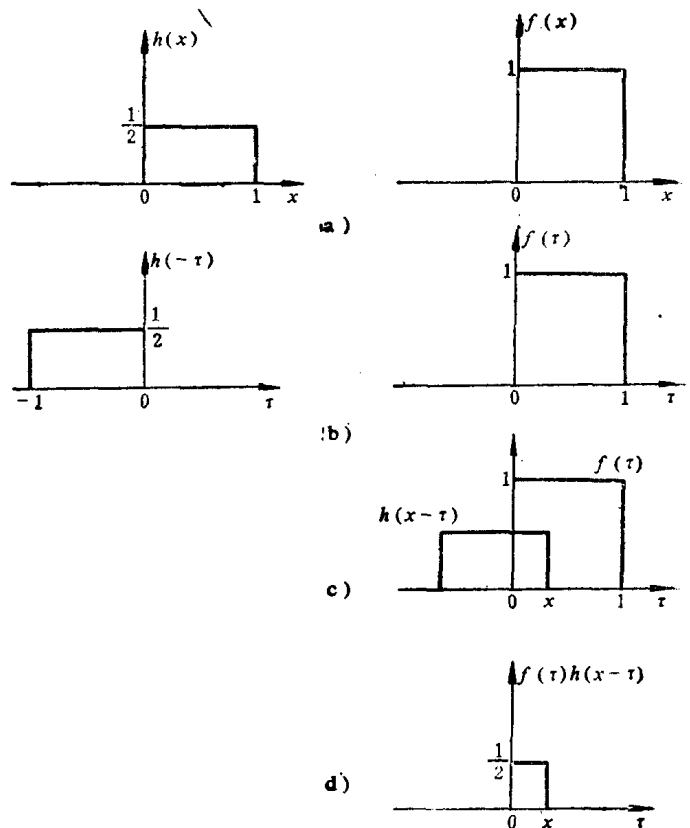


图1-5 卷积的几个过程

a) 函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ b) 折叠 c) 位移 d) 相乘

为计算卷积, 需对 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的每一个 x 值, 都有一个 $h(x-\tau)$, 使它和 $f(\tau)$ 相乘 [见图 1-5 d]。计算出 $f(\tau)h(x-\tau)$ 乘积曲线下的面积, 就得到了与位移量 x_0 相应的卷积值 $g(x_0)$:

$$g(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x_0 - \tau)d\tau$$

在图 1-6 中, 我们选取 $x = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$, 分别算出 $f(\tau)h(x-\tau)$ 乘积曲线下的面积, 并利用这些结果画出 $g(x)$ 的完整曲线。

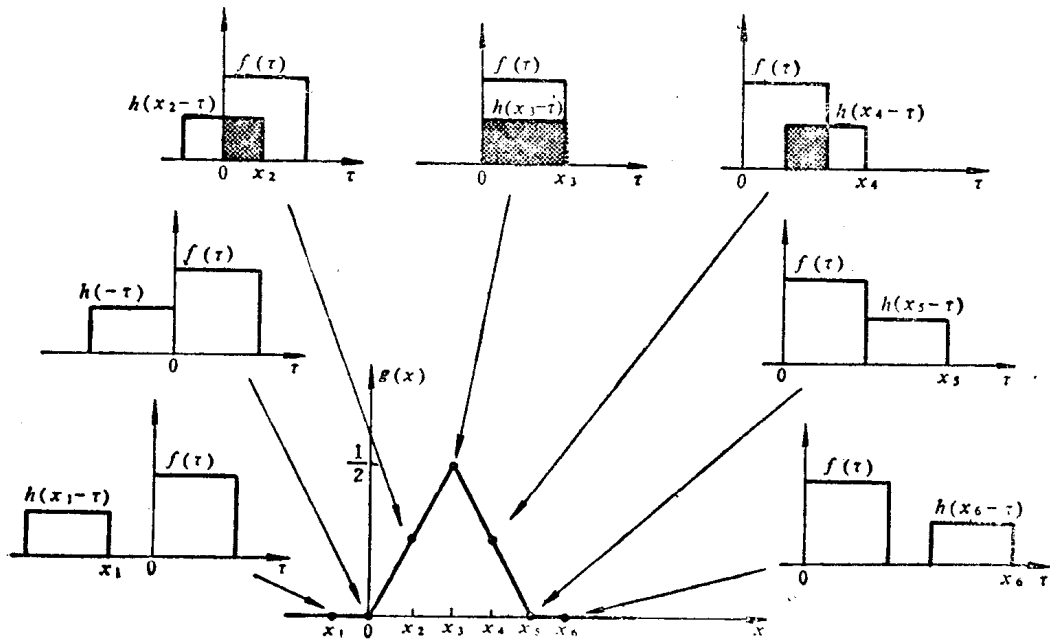


图1-6 两个矩形函数卷积的图例

上述卷积的图解方法, 概括起来有四个步骤: 折叠、位移、相乘、积分。图解方法在系统分析中是很有用的, 它使我们能直观理解许多抽象的关系。在直接计算卷积积分时, 图解方法也有助于确定积分限。再看图 1-7 所示的例子, 作卷积运算的函数是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $x \leq 0$, 乘积 $f(\tau)h(x-\tau)$ 为零, 结果使 $g(x) = 0$ 。

当 $x > 0$, 计算 $f(\tau)h(x-\tau)$ 乘积曲线下的面积

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)d\tau = \int_0^x 1 \cdot e^{-(x-\tau)}d\tau$$

$$= e^{-x}(e^x - 1) = 1 - e^{-x}$$

应当注意卷积运算的两个效应:

(1) 展宽 假如函数只在一个有限区间内不为零, 这个区间可称为函数的宽度。一般说来, 卷积的宽度等于被卷函数的宽度之和。例如图 1-6 中卷积得到的三角形函数宽度就等于两个参与卷积的矩形函数宽度之和。

(2) 平滑化 被卷积的函数经过卷积运算, 其细微结构在一定程度上被消除, 函数本身的起伏振荡变得平缓圆滑。当然, 平滑化的程度取决于被卷函数的结构。举一个实例说明这点: 用矩形函数表示狭缝的透过率 $h(x)$, 对光强的空间分布 $f(x)$ 扫描, 在狭缝后面用光电探测器记录光强分布 $g(x)$ 。这一扫描记录的物理过程包含了平移、相乘、积分几个环节, $h(x)$ 是偶函数, 折叠不发生变化。因而这是个卷积运算过程。当狭缝很窄, $g(x)$ 接近于 $f(x)$ 。当狭缝愈宽, 平滑化愈严重, $g(x)$ 中已失去 $f(x)$ 的细节。(见图 1-8)。

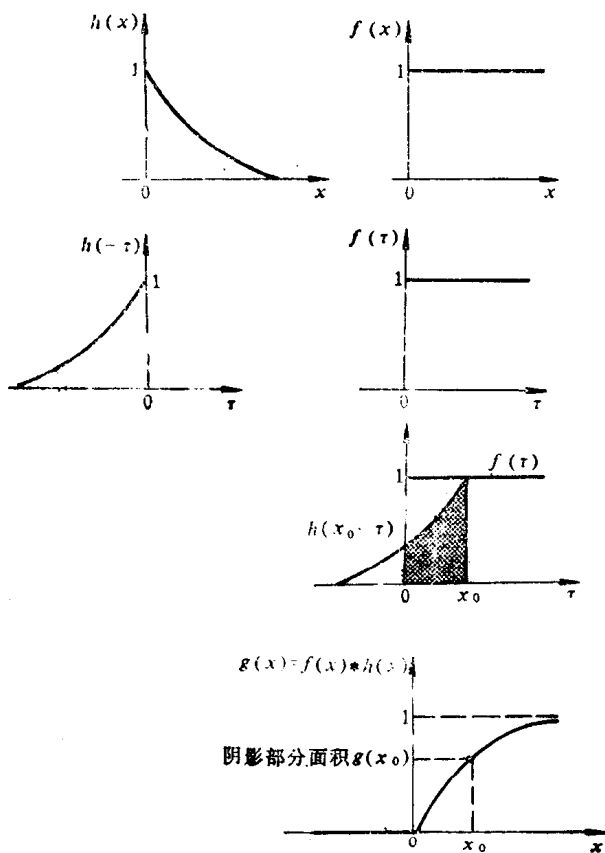


图1-7 阶跃函数与负指数函数的卷积

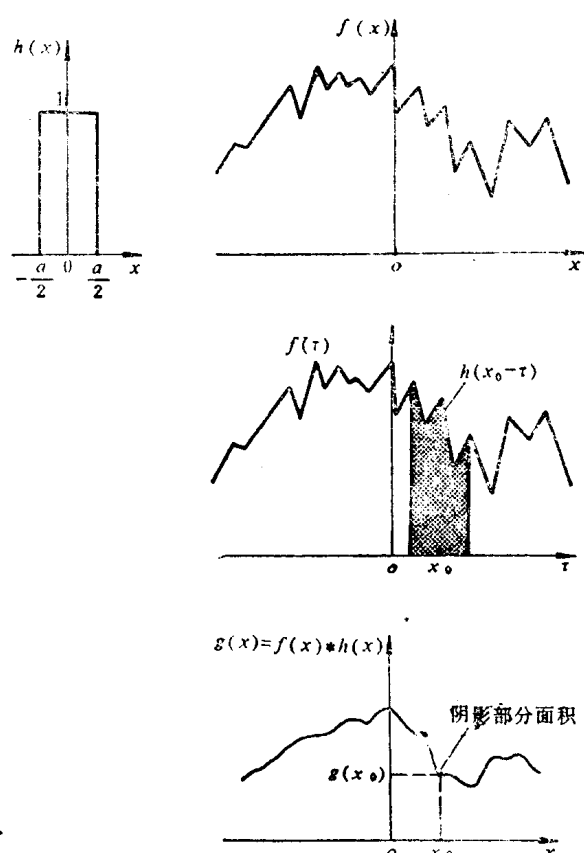


图1-8 卷积的平滑化

二、卷积运算定律

(1) 交换律

$$f(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad (1-31)$$

(2) 分配律

$$[v(x, y) + w(x, y)] * h(x, y) = v(x, y) * h(x, y) + w(x, y) * h(x, y) \quad (1-32)$$

(3) 结合律

$$[v(x, y) * w(x, y)] * h(x, y) = v(x, y) * [w(x, y) * h(x, y)] \quad (1-33)$$

三、包含脉冲函数的卷积

任意函数 $f(x, y)$ 与 δ 函数卷积

$$f(x, y) * \delta(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

注意 δ 函数是偶函数，并利用其筛选性质得到

$$\begin{aligned} f(x, y) * \delta(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta \\ &= f(x, y) \end{aligned} \quad (1-34)$$

即任意函数 $f(x, y)$ 与 δ 函数卷积，得出函数 $f(x, y)$ 本身。将上式作简单推广得到

$$f(x, y) * \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x - x_0, y - y_0) \quad (1-35)$$

卷积的结果是把函数 $f(x, y)$ 平移到脉冲所在的空间位置。以 1:1 的成像系统为例，假定 $h(x, y)$ 表示轴上点源经系统所成的像。点源平移时，像斑分布也不发生变化，同样平移。那末物平面上两个点源将在对应位置得到两个像斑（见图 1-9），这一成像过程可用两个输入脉冲与 $h(x, y)$ 的卷积来描述。

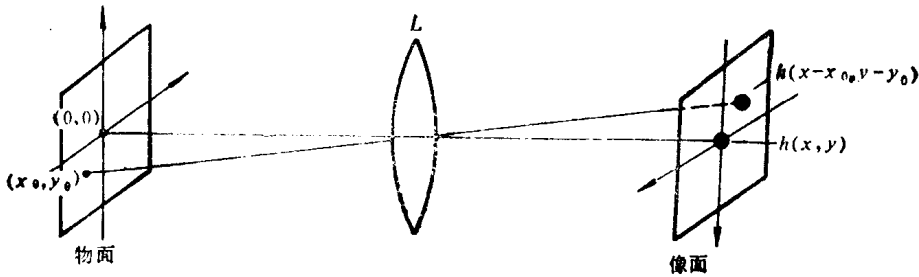


图 1-9 两个点源所成的像

$f(x, y)$ 与多个脉冲函数卷积，可在每个脉冲所在位置产生 $f(x, y)$ 的波形。这一性质有助于我们描述各种重复性的结构，例如双缝、多缝、光栅等衍射屏的透过率函数。

§ 1-4 相 关

一、互相关

两个复函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的互相关定义为

$$\begin{aligned} r_{fg}(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta \\ &= f(x, y) \star g(x, y) \end{aligned} \quad (1-36)$$

式中， g^* 是函数 g 的复共轭， \star 号表示相关运算。若令 $\xi - x = \xi'$ ， $\eta - y = \eta'$ ，可以得到互相关定义的另一种形式：

$$r_{fg}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi' + x, \eta' + y) g^*(\xi', \eta') d\xi' d\eta'$$

$$= f(x, y) \star g(x, y) \quad (1-37)$$

若 f 和 g 是一维函数，互相关定义为

$$r_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g^*(\xi - x) d\xi = f(x) \star g(x) \quad (1-38)$$

与卷积相比较差别仅在于：相关运算中函数 g 应取复共轭，但不需要折叠。而位移、相乘、积分的三个步骤是同样的。图 1-10 对两个实函数（阶跃函数和负指数函数）的互相关给出图解分析，与图 1-7 相比较，相关与卷积的结果完全不同。

互相关也可用卷积符号表示，即

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g^*(\xi - x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g^*\left(\frac{x - \xi}{-1}\right) d\xi$$

$$= f(x) * g^*(-x) \quad (1-39)$$

显然，只有当 g 为实的偶函数，才有 $f(x) \star g(x) = f(x) * g(x)$ 。

互相关运算不满足交换律。若 $r_{fg}(x, y) = f(x, y) \star g(x, y)$ ， $r_{gf}(x, y) = g(x, y) \star f(x, y)$ ，则

$$r_{fg}(x, y) \neq r_{gf}(x, y)$$

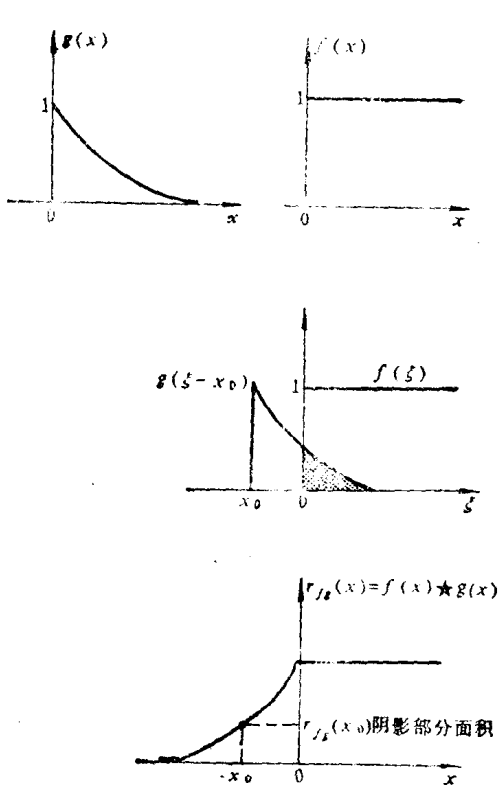


图1-10 相关的图解方法

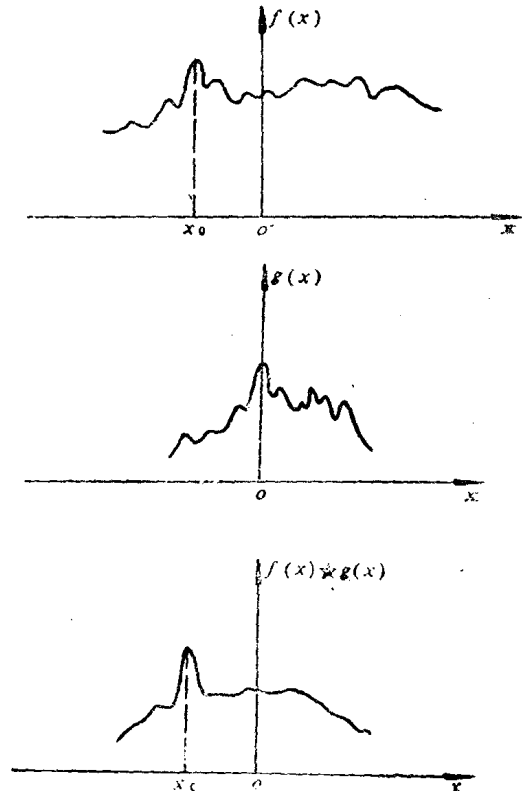


图1-11 两个函数相似时存在相关峰值