《理论力学习题选集》题解

北方交通大学理论力学教研室

地 震 出 版 社

《理论力学习题选集》题解

北方交通大学理论力学教研室

地 震 出 版 社

1 9 8 1

《理论力学习题选集》题解
北方交通大学理论力学教研室

北京出版社 出版
北京复兴路63号
1201工厂印刷装订
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

850×1168 1/32 13印张 330千字
1981年4月第1版 1981年4月第1次印刷
印数0001——70,000
统一书号：13180·109 定价：1.35元

前　言

本题解系根据哈尔滨工业大学、清华大学等六院校合编的《理论力学习题选集》（王铎主编），由北方交通大学理论力学教研室的同志们解算。为了便于读者使用，将原题题文印在题解之前。

本题解由彭天义主持编写。参加解算的有：俞良家（1、附录1），朱金荣（2、附录2），陈长盛（3—5），唐大泽（6、8、10），董书琴（7、9），彭天义（11—14），王之权（15—17），易紫（18—20）。铁月兰、王之权、俞良家承担了本题解的绘图工作。

与其它各类题解一样，本题解的编写目的主要是供读者参考。题解中所应用的方法，不一定都是最简便的。如能起到举一反三的作用，编者至感荣幸。

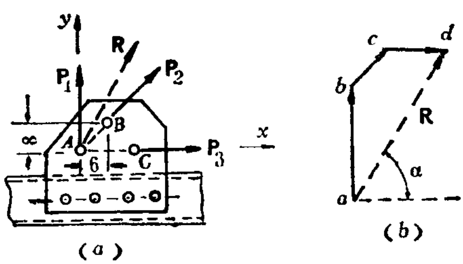
编　者　一九八〇年七月

目　　录

Ⅰ. 静 力 学

1. 平面汇交力系

〔1〕铆接薄板在孔心 A、B 和 C 处受三力作用，如图所示。已知：$P_1=10$ 公斤，沿铅垂方向；$P_2=5$ 公斤，沿 AB 方向；$P_3=5$ 公斤，沿水平方向。AB 在水平和铅垂方向的投影分别为 6 厘米和 8 厘米。求力系的合力。



〔1〕 图

解：(一)分析法

由题给条件，得$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10\text{cm}$。取直角坐标系 Axy，如图(a)所示。P_1、P_2 及 P_3 分别在 x,y 轴上投影的代数和为

$$\Sigma F_x=P_2\times\frac{6}{10}+P_3=5\times\frac{6}{10}+5=8\text{kg},$$

$$\Sigma F_y=P_1+P_2\times\frac{8}{10}=10+5\times\frac{8}{10}=14\text{kg},$$

所以合力 R 的大小：

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}$$
$$=\sqrt{8^2+14^2}=16.12\text{kg}.$$

合力 R 的方向：

$$\alpha=\angle(R,x)=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

$$=\operatorname{tg}^{-1}\frac{14}{8}=60^\circ 15'.$$

合力 R 的作用点：力系汇交点 A。

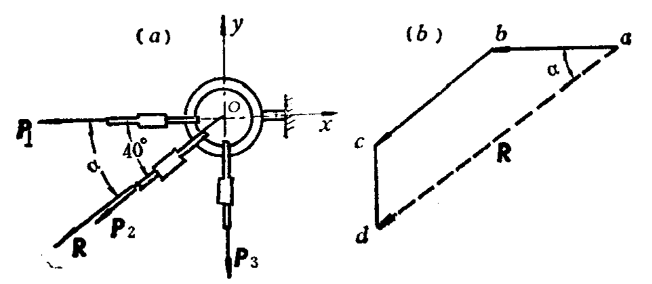
(二)图解法

取 1cm 等于 5kg 的比例尺，作 $ab \perp\!\!\!\perp P_1$，$bc \perp\!\!\!\perp P_2$，$cd \perp\!\!\!\perp P_3$，得力多边形 $abcd$，如图(b)所示。此力多边形不闭合，故有合力。由封闭边 ad 量得合力 R 的矢量长 3.2cm，所以合力 R 的大小为

$$R=3.2\times 5=16\text{kg}.$$

用量角器量得合力 R 与水平方向的夹角$\alpha=60^\circ$，合力 R 的指向，由始点 a 指向终点 d。最后将合力 R 平行地移至 P_1、P_2、P_3 的汇交点 A。

〔2〕一固定在墙壁上的圆环受三条绳的拉力作用。P_1 沿水平方向，P_2 与水平线成 40° 角，P_3 沿铅垂方向。三力的大小分别为：$P_1=200$公斤；$P_2=250$ 公斤；$P_3=150$ 公斤。求三力的合力。



〔2〕 图

解：(一)分析法

取直角坐标系 Oxy，如图(a)所示。P_1、P_2 及 P_3 分别在x、y 轴上投影的代数和为

$$\Sigma F_x=-P_1-P_2\cos 40^\circ=-200-250\cos 40^\circ=-391.5\text{kg},$$

$$\Sigma F_y=-P_2\sin 40^\circ-P_3=-250\sin 40^\circ-150=-310.7\text{kg},$$

所以合力 R 的大小：

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}$$
$$=\sqrt{(-391.5)^2+(-310.7)^2}=500\text{kg}.$$

合力 R 的方向：$\alpha=\angle(R,x)=\text{tg}^{-1}\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

$$=\text{tg}^{-1}\frac{-310.7}{-391.5}=38^\circ 26'.$$

合力 R 的作用点：三力汇交点 O。

（二）图解法

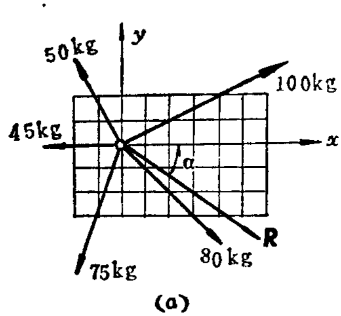
取 1cm 等于 100 kg 的比例尺，作 $ab \perp\!\!\!\!=\, P_1$，$bc \perp\!\!\!\!=\, P_2$，$cd \perp\!\!\!\!=\, P_3$，得力多边形 $abcd$，如图(b)所示。此力多边形不闭合，故有合力。由封闭边 ad 量得合力 R 的矢量长 5cm，所以合力 R 的大小

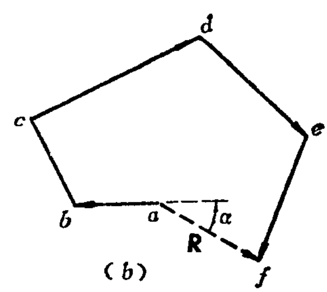
$$R=5\times 100=500\text{kg}.$$

用量角器量得合力 R 与水平方向的夹角 $\alpha=38^\circ 30'$。合力 R 的指向由始点 a 指向终点 d，最后将合力 R 平行移至三力汇交点 O。

〔3〕 五力作用于一点。图中坐标的单位为厘米。求力系的合力。

解：（一）分析法





〔3〕 图

取直角坐标系 Oxy，诸力分别在 x，y 轴上投影的代数和为

$$\Sigma F_x = 100\times\frac{4}{\sqrt{20}} + 80\times\frac{3}{\sqrt{18}} - 75\times\frac{1}{\sqrt{10}} - 45 - 50\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 54.93\text{kg},$$
$$\Sigma F_y = 100\times\frac{2}{\sqrt{20}} - 80\times\frac{3}{\sqrt{18}} - 75\times\frac{3}{\sqrt{10}} + 50\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= -38.28\text{kg},$$

所以合力 R 的大小：

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(54.93)^2 + (-38.28)^2}$$
$$= 66.9\text{kg}.$$

合力 R 的方向：

$$\alpha = \angle(R, x) = \text{tg}^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \text{tg}^{-1}\frac{-38.28}{54.93} = -34°52'.$$

合力 R 的作用点为力系的汇交点 O。

(二)图解法

取 1cm 等于 100/3 kg 的比例尺，并按 45kg，50kg，100kg，80kg，75kg 的顺序画出力多边形 $abcdef$。此力多边形不闭合，故有合力。由封闭边 fa 量得合力 R 的矢量长 1.95cm，所以合力 R 的大小

$$R = 1.95\times\frac{100}{3} = 65\text{kg}.$$

用量角器量得合力 R 与水平方向的夹角 $\alpha = 33°$，合力R的指向由始点a 指向终点 f。最后将合力 R 平行移至力系汇交点 O。

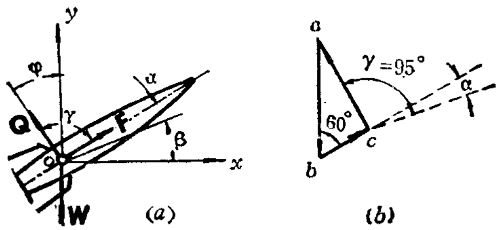
本题用图解法所得结果与分析法所得结果比较，合力 R 相差 2.84%，方向 α 相差5.35%。这是作图及量测上的误差所致。

〔4〕 火箭沿与水平面成 $\beta = 25°$ 角方向作匀速直线运动。火箭的推力 $F = 10$ 吨，与运动方向成 $\alpha = 5°$ 角。如火箭重 20 吨，求空气动力 Q 和它与飞行方向的交角 γ。

解：题设火箭作匀速直线飞行，故应按平衡问题来处理。

(一)分析法

取直角坐标系Oxy，设 Q 力与 y 轴的夹角为 φ，如图 (a) 所



〔4〕 图

示。由平面汇交力系平衡方程：

$$\Sigma F_x=0,\quad -Q\sin\varphi+F\cos(\alpha+\beta)=0,$$

∴ $$Q\sin\varphi=10\cos30^\circ=5\sqrt{3}\ . \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=0,\quad Q\cos\varphi-W+F\sin(\alpha+\beta)=0,$$

∴ $$Q\cos\varphi=20-10\sin30^\circ=15\ . \qquad (2)$$

由 (2) 式除(1)式： $\mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{5\sqrt{3}}{15}$,

∴ $$\varphi=30^\circ.$$

所以空气动力 Q 与飞行方向的夹角为

$$\gamma=(90^\circ+\varphi)-\beta=95^\circ.$$

由(1)式得 $$Q=\frac{5\sqrt{3}}{\sin\varphi}=17.32\,\mathrm{T}.$$

(二)几何法

作 $ab \perp W$，从 b 点作 $bc \perp F$，联接 ca，得力三角形 abc。由余弦定理

$$(ca)^2=Q^2=(ab)^2+(bc)^2-2(ab)\times(bc)\cos60^\circ,$$

所以 $$Q=\sqrt{20^2+10^2-2\times20\times10\times\cos60^\circ}=17.32\mathrm{T}$$

由正弦定理： $\dfrac{ab}{\sin\angle acb}=\dfrac{ac}{\sin60^\circ}$,

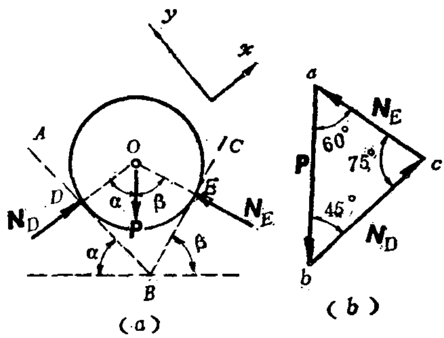
或 $$\sin\angle acb=ab\times\sin60^\circ/ac=\frac{20\times\sin60^\circ}{17.32}=1,$$

∴ $$\angle acb=90^\circ.$$

从而得 $$\gamma=180^\circ-\angle acb+\alpha=95^\circ.$$

〔5〕 一均质球重 $P=100$ 公斤，放在两个相交的光滑斜面之间。如斜面 AB 的倾角为 $\alpha=45^\circ$，而斜面 BC 的倾角为 $\beta=60^\circ$。求两斜面的反力 N_D 和 N_E 的大小。

解：取球 O 为研究对象，画它的受力图，如图(a)所示。作用于球 O 上的力有：重力 P、斜面 AB、BC 分别给球的反力 N_D 及 N_E。



〔5〕 图

（一）分析法

取 x 轴平行于 N_D，y 轴平行于 AB。由平面汇交力系平衡方程：

$$\Sigma F_y=0,\quad N_E\sin(180-\alpha-\beta)-P\sin\alpha=0,$$

∴ $$N_E=\frac{P\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=73.2\text{kg}.$$

$$\Sigma F_x=0,\quad N_D-N_E\cos 75^\circ-P\cos 45^\circ=0,$$

∴ $$N_D=73.2\cos 75^\circ+100\cos 45^\circ=89.6\text{kg}.$$

（二）几何法

作 $ab\perp\!\!\!\!\!\perp P$，从 b 点作 $bc//N_D$，从 a 点作 $ac//N_E$，bc 与 ac 相交于 c 点，得力三角形 abc，由正弦定理：

$$\frac{N_E}{\sin 45^\circ}=\frac{N_D}{\sin 60^\circ}=\frac{P}{\sin 75^\circ},$$

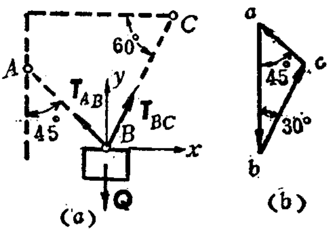
所以 $$N_E=\frac{P}{\sin 75^\circ}\sin 45^\circ=73.2\text{kg},$$

$$N_D=\frac{P}{\sin 75^\circ}\sin 60^\circ=89.6\text{kg}.$$

N_E 及 N_D 的指向由力三角形的矢序规则定出，如图(b)所示。

〔6〕重1吨的物体，用两根钢索悬挂，如图所示。设钢索重量不计，求钢索中的张力。

解：取 B 点为研究对象，画它的受力图，如图(a)所示。作用于 B 点的力有：物重 $Q=1$ T，钢索的张力 T_{AB} 及 T_{BC}。



〔6〕图

(一)分析法

取直角坐标系 Bxy，令 y 轴平行于 Q，由平面汇交力系平衡方程：

$$\Sigma F_x=0,\quad T_{BC}\cos 60^\circ - T_{AB}\cos 45^\circ=0,$$

∴
$$T_{BC}=\frac{T_{AB}\cos 45^\circ}{\cos 60^\circ}. \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=0,\quad T_{AB}\sin 45^\circ + T_{BC}\sin 60^\circ - Q=0,$$

即
$$T_{AB}\sin 45^\circ + T_{AB}\frac{\cos 45^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 60^\circ - Q=0,$$

∴
$$T_{AB}=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 105^\circ}=0.52\text{T}. \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式得$T_{BC}=0.52\times\dfrac{\cos 45^\circ}{\cos 60^\circ}=0.73\text{T}.$

(二)几何法

作 $ab \perp Q$，从 b 点作 $bc // T_{BC}$，从 a 点作 $ac // T_{AB}$，ac 与 bc 相交于 c 点。得力三角形 abc，由正弦定理：

$$\frac{ab}{\sin 105^\circ}=\frac{ac}{\sin 30^\circ}=\frac{bc}{\sin 45^\circ},$$

所以
$$ac=T_{AB}=\frac{ab}{\sin 105^\circ}\times\sin 30^\circ=0.52\text{T},$$

$$bc=T_{BC}=\frac{ab}{\sin 105^\circ}\times\sin 45^\circ=0.73\text{T}.$$

T_{AB}，T_{BC} 的指向由力三角形的矢序规则定出，如图(b)所示。

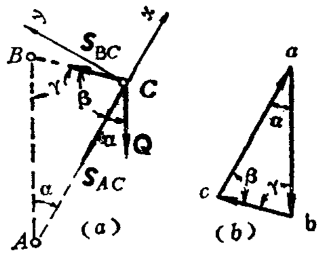
〔7〕AC 和 BC 两杆用铰链 C 联接，两杆的另一端分别固定地铰支在墙上。在 C 点悬挂重 1 吨的物体。已知 $AB=AC=2$ 米；$BC=1$ 米。如不计杆重，求两杆的内力。

解：AC，BC 两杆自重不计，两端又用铰链联接，故均为二力杆。

取 C 点为研究对象，画受力图，S_{AC}，S_{BC} 为 AC，BC 杆对 C 点的作用力，Q 为物重。

（一）分析法

取直角坐标系 Cxy，如图 (a) 所示，令 x 轴与 AC 重合。已知 $\triangle ABC$ 三边之长，可计算出 α,β,γ 角，由余弦定理：



〔7〕图

$$(BC)^2=(AC)^2+(AB)^2-$$
$$-2\cdot(AC)\cdot(AB)\cdot\cos\alpha,$$

所以
$$\cos\alpha=\frac{2^2+2^2-1}{2\times2\times2}=\frac{7}{8},$$
$$\alpha=\cos^{-1}\frac{7}{8}=28.95°.$$

因为 $AB=AC$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，所以
$$\beta=\gamma=\frac{1}{2}(180°-28.95°)=75.525°.$$

由平面汇交力系平衡方程：
$$\Sigma F_y=0,\quad S_{BC}\sin\beta-Q\sin\alpha=0,$$
$$\therefore\quad S_{BC}=\frac{1\times\sin28.95°}{\sin75.525°}=0.5\text{T}.$$
$$\Sigma F_x=0,\quad -S_{AC}-S_{BC}\cos\beta-Q\cos\alpha=0,$$
$$\therefore\quad S_{AC}=-0.5\cos75.525°-1\times\cos28.95°=-1\text{T}.$$

负号表示 AC 杆受压力。

（二）几何法

作 $ab\perp$Q，从 b 点作 $bc//S_{BC}$，从 a 点作 $ac//S_{AC}$，得力三

角形 abc，如图(b)所示，由正弦定理：

$$\frac{bc}{\sin\alpha}=\frac{ab}{\sin\beta}=\frac{ac}{\sin\gamma},$$

所以 $$ac=S_{AC}=\frac{ab}{\sin\beta}\sin\gamma=1\text{T},$$

$$bc=S_{BC}=\frac{ab}{\sin\beta}\sin\alpha=0.5\text{T}.$$

S_{AC}，S_{BC} 的指向由矢序规则定出。S_{AC} 为压力，S_{BC} 为拉力。

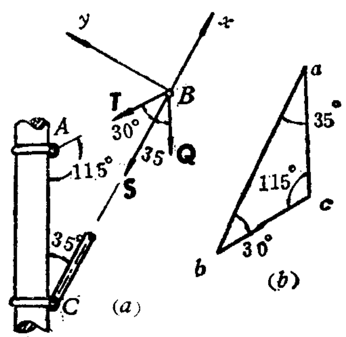
〔8〕 起重机由臂 BC 和链索 AB 所构成。臂的一端用铰链固定在柱的 C 点，另一端用绳 BD 悬挂重物 $Q=500$ 公斤。如 $\angle BAC=115°$，$\angle BCA=35°$，且不计臂的重量，求链索的张力 T 和臂的内力 S。

解：臂 BC 自重不计，两端又是铰链联接，故为二力杆。取 B 点为研究对象，画出它的受力图，如图(a)所示。

(一)分析法

取直角坐标系 Bxy，令 x 轴与 BC 轴重合。$\angle ABC=180°-115°-35°=30°$，由平面汇交力系平衡方程：

$$\Sigma F_y=0,\ T\sin 30°-Q\sin 35°=0,$$



〔8〕 图

$$\therefore\quad T=\frac{Q\sin 35°}{\sin 30°}=574\text{kg}.$$

$$\Sigma F_x=0,\ -S-T\cos 30°-Q\cos 35°=0,$$

$$\therefore\quad S=-574\cos 30°-500\cos 35°=-906\text{kg},$$

负号表示臂 BC 受压力。

(二)几何法

作 $ac\perp\!\!\!\perp Q$，从 c 点作 $cb//T$，从 a 点作 $ab//S$，cb 与 ab 相交于 b 点，得力三角形 acb，由正弦定理：

$$\frac{ab}{\sin 115°}=\frac{bc}{\sin 35°}=\frac{ac}{\sin 30°}.$$

所以 $$ab=S=\frac{ac}{\sin 30°}\times\sin 115°=906\text{kg},$$

$$bc=T=\frac{ac}{\sin 30°}\times\sin 35°=574\text{kg}.$$

由矢序规则定出：T 为拉力，S 为压力。

〔9〕 起重机借跨过滑车 D 的链条吊起重物 $P=2$ 吨。滑车 D 固定在墙上，$\angle CAD=30°$。起重机各杆间的交角为：$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=30°$。求杆 AC 和 AB 的内力 S_{AC} 与 S_{AB}。

解：取滑轮 A 为研究对象，滑轮 A 尺寸不计，其受力图如图(a)所示，S_{AB} 及 S_{AC} 为二力杆 AB 及 AC 的内力，绳索内的拉力 $T=P$。

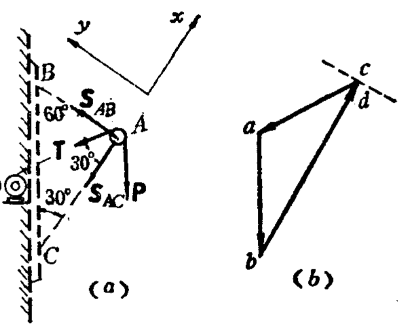
(一)分析法

取 x 轴平行于 S_{AC}，y 轴平行于 S_{AB}。由平面汇交力系平衡方程：

$\Sigma F_y=0, S_{AB}+T\sin 30°-P\sin 30°=0,$

$\therefore \quad S_{AB}=0.$

$\Sigma F_x=0,\ -S_{AC}-T\cos 30°-P\cos 30°=0,$



〔9〕 图

$$\therefore \quad S_{AC}=-2P\cos 30°=-3.46\text{T},$$

负号表示 AC 杆受压力。

(二)图解法

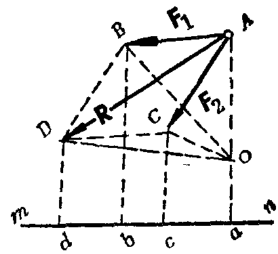
取 1cm 等于 1T 的比例尺，作 $ab \underline{\#} P$，从 b 点作 $bc // S_{AC}$，从 a 点作 $ad // T$，从 d 点作 $cd // S_{AB}$，平面汇交力系平衡的图解条件是力多边形封闭，故 bc 与 cd 应相交于 d 点，c，d 点重合。由图(b)量得：$cd=0$，$bc=3.5\text{cm}$，所以

$$S_{AB}=0,$$

$$S_{AC}=3.5\times 1=3.5\text{T}.$$

由矢序规则定出 S_{AC} 为压力。

〔10〕 应用力对点之矩的几何表示法，即力矩的大小等于矩心与力矢量所组成三角形面积的二倍，证明平面中两汇交力对任意点力矩的代数和等于其合力对该点的矩(合力之矩定理)。



〔10〕 图

证：设 F_1，F_2 两力相交于 A 点，其合力 $R=F_1+F_2$。在图中任取一点 O 作为矩心，则 R、F_1、F_2 对 O 点之矩分别为

$$M_O(R)=2\triangle OAD\text{面积},$$

$$M_O(F_1)=2\triangle OAB\text{面积},$$

$$M_O(F_2)=2\triangle OAC\text{面积},$$

今在平面内任作一直线 mn 垂直于此三个三角形的公共底边 OA，垂足为 a，并从 C、B、D 三点分别向直线 mn 作垂线 Cc，Bb，Dd，则 ca，ba，da 分别为$\triangle OAC$，$\triangle OAB$，$\triangle OAD$ 的高。由于 $AC//BD$，所以 $bd=ac$。于是有 $da=db+bc+ca=ba+ca$。$\triangle OAD$ 的面积可表为

$$\triangle OAD=\frac{1}{2}OA\times da=\frac{1}{2}OA\times(ba+ca)$$

$$=\frac{1}{2}OA\cdot ba+\frac{1}{2}OA\cdot ca,$$

但 $\quad \frac{1}{2}OA\cdot ba=\triangle OAB,\qquad \frac{1}{2}OA\cdot ca=\triangle OAC,$

所以
$$\triangle OAD=\triangle OAB+\triangle OAC.$$

两边同乘以2，得

$$2\triangle OAD=2\triangle OAB+2\triangle OAC,$$

亦即
$$M_O(R)=M_O(F_1)+M_O(F_2).$$

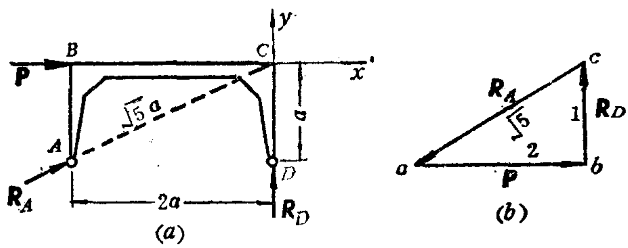
若有 n 个力汇交于 A 点，依次两两相加，可得 n 个力对 O 点之矩为

$$M_O(R)=\sum_{i=1}^{n}M_O(F_i).$$

此即合力矩定理。

〔11〕 求图示的刚架由于作用在 B 点的水平力 P 所引起的支座反力 R_A 和 R_D。刚架重量略去不计。

解：刚架 D 处的约束为可动铰链支座，因此，其支反力 R_D 的方向已知(铅直向上)，R_D 与 P 两力的作用线相交于 C 点。由于刚架仅在 A、B、D 三处受力，根据平面三力平衡定理，固定铰链支座 A 处的支反力 R_A 的作用线必通过 C 点。取 $ABCD$ 刚架为研究对象。画出它的受力图，如图(a)所示。



〔11〕 图

(一)分析法

取直角坐标系 Cxy，令 x 轴平行于 P，y 轴平行于 R_D。由平面汇交力系平衡方程：

$$\Sigma F_x=0,\quad P+R_A\cos\angle BCA=0,$$

$$\therefore\qquad R_A=-\frac{P}{2/\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}P.$$

$$\Sigma F_y=0,\quad R_D+R_A\sin\angle BCA=0,$$

$$\therefore\qquad R_D=-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}P\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}P.$$

(二)几何法

取 $ab \perp\!\!\!\!= P$，从 a 点作 $ac // R_A$，从 b 点作 $bc // R_D$，ac 与 bc 相交于 c 点，得力三角形 abc。由正弦定理：