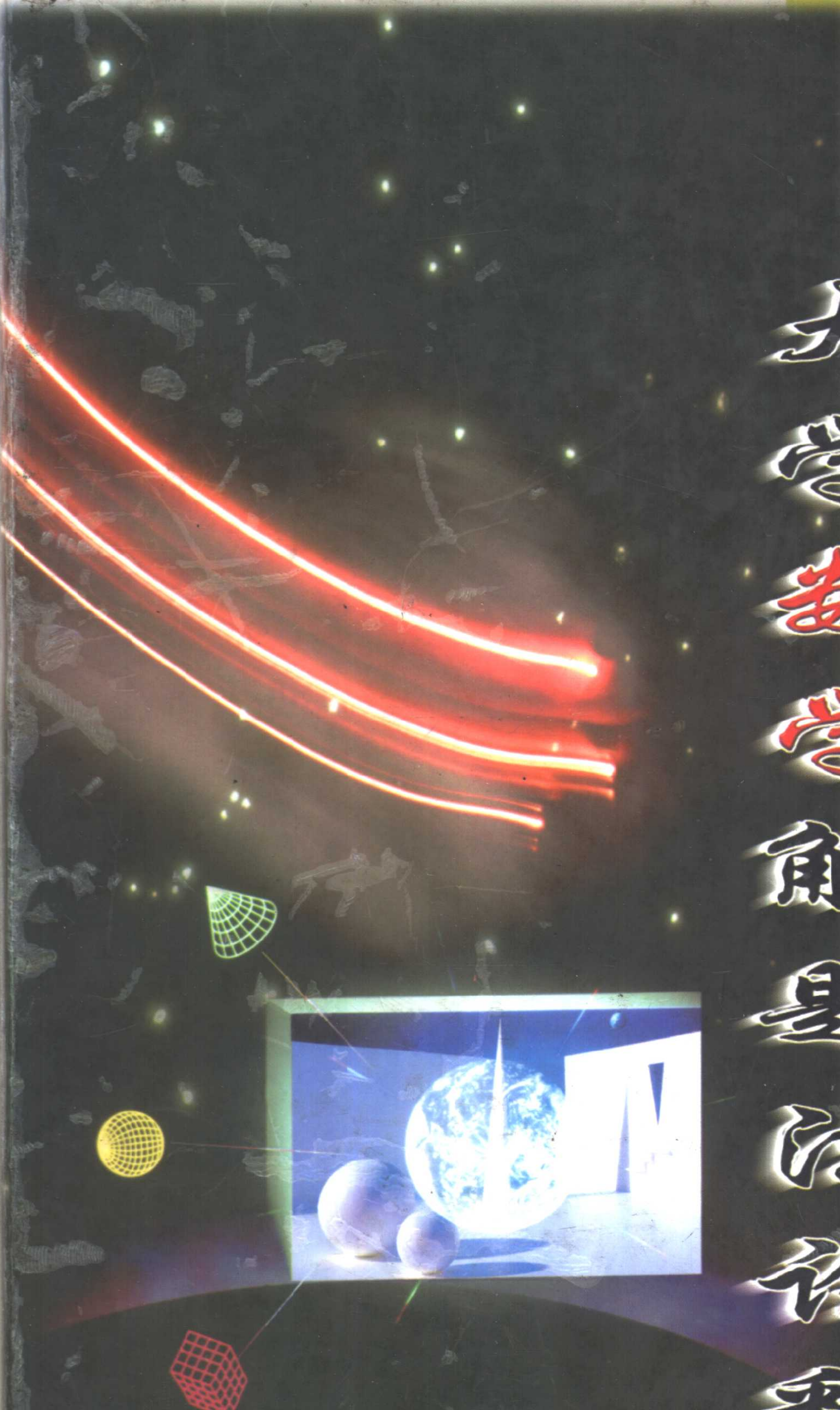
主　编　徐利治
副主编　冯克勤
　　　　方兆本
　　　　徐森林

大学数学解题法诠释



安徽教育出版社

大学数学解题法诠释

主　编　徐利治
副主编　冯克勤　方兆本　徐森林

安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学解题法诠释/徐利治等编. －合肥:安徽教育出版社, 1999.12

ISBN 7－5336－1774－6

Ⅰ.大... Ⅱ.徐... Ⅲ.高等数学－高等学校－解题

Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 00238 号

责任编辑:严云锦　　装帧设计:袁　泉

出版发行:安徽教育出版社(合肥市跃进路 1 号)

经　　销:新华书店

排　　版:安徽飞腾彩色制版有限责任公司

印　　刷:合肥远东印刷厂

开　　本:787×1092　1/16

印　　张:49.25

字　　数:1 600 000

版　　次:1999 年 12 月第 1 版　　2000 年 10 月第 2 次印刷

印　　数:501—1 500

定　　价:72.00 元

发现印装质量问题,影响阅读,请与我社发行部联系调换

电　话:(0551)2651321　　邮 编:230061

主　编：徐利治

副主编：冯克勤　方兆本　徐森林

编写者：

数学分析	徐森林　薛春华
解析几何与矢量代数	马传渔
线性代数	李炯生
抽象代数	冯克勤
线性规划	高旅端
复变函数	严镇军
实变函数	徐森林
泛函分析	叶怀安
微分方程	盛立人
离散数学	李炯生
概率论	胡太忠　方兆本
计算方法	林成森
数学模型	李尚志

审稿人：方兆本　徐森林　李炯生

序　言

大家知道，现今人类正处在从工业社会向信息社会转变的历史时期，国内外科技教育界人士已经在关心着高等数学教育的革新问题。首先考虑到的问题是，理工科大学的数学教育应该达到怎样的目标？关于这一问题，我很赞成外国知名数学家 A. Shoenfeld 在他 1991 年撰写的一篇文章中提出的一个观点。他认为帮助学生们学会“数学地思维”最为重要。这就是说，最重要的事是要让学生们获得数学地思维的习惯和能力，从而也就能数学地去观察世界，处理和解决问题。

当然，要帮助学生们获得上述数学素质，只靠传统的重演绎、轻归纳的教材和教法是不可能的。我认为最有效的办法，还是要鼓励并指导学生们自己主动去做数学、想数学、评数学或鉴赏数学。这样说来，以阐明优美的数学方法思想为主线的一部工具书——《大学数学解题法诠释》，对学习高等数学的大学生就成为十分必需的了。

记得 4 年前，我国《工科数学》杂志主编、已故数学教授卢树铭来找我讨论本书的编写计划时，就谈到了此书应该具备的特色和功能。经过一批学有专长且富有教学实践经验的数学专家们的共同努力，此书终于写成了，而且体现了卢树铭教授当初的愿望和设想。相信此书的出版将使早逝者含笑于九泉了。

显而易见，这本书至少具有如下三点特色。一是为了使全书以方法为主线而又不脱离数学的具体内容题材，故此书按题材内容分篇，而按方法分节，这样也就不必去追求数学知识内容的面面俱到。二是为了使读者便于理解方法、思想的来龙去脉，故对各种方法的思想背景、特点等均有简要的文字说明。三是为了帮助青年读者能切实掌握解题的方法和技巧，且能举一而反三，故此书都是结合具体例子来讲述方法的。每种方法都配有一定数量的具有典型性与普适性的例题。有些例题选自研究生入学试题或数学竞赛题，具有一定的深度和难度。

可以期望，只要青年读者们本着“做数学、想数学、评数学”的主动精神来使用这本书，则此书对培育“数学地思维”的能力和习惯应该会有所帮助的。这里我乐意就数学解题方法或一般数学方法的评价与鉴赏问题，提几点建议供读者们参考。

大家知道，数学中的解题方法多不胜数，方法有大有小，有难有易，当然还有优、中、劣之别。一般说来，好的数学方法或解题方法往往具有这样三个特点：(1) 思想的简单性；(2) 方法的普适性；(3) 技巧的针对性。事实上，每一种漂亮的解题方法，其基本思想都是十分简单而自然的。好的方法都有较广的应用范围，也即都具有相当的普适性（即普遍适用性）。但是，用普遍的方法去解决具体问题时，还必须针对问题的特殊性，利用问题提供的特殊条件，使方法采取合适的特殊形式才能使问题迎刃而解。而方法的恰当特殊化常常表现为技巧，所以一个方法是否能引出具有各种针对性的技巧，也是评价它的一个重要标准。

读者们可以注意到，在本书中凡已取得规范化名称的著名方法，如坐标法、参数法、分离变量法等等，无疑都是具备上述三特点的好方法，而且还是十分基本的方法。但尚未取得规范化名称的许多方法技巧中，也有不少是非常好的方法。相信读者们在“做数学”的实践中会逐步去掌握并将赞赏这些好方法。如果再进一步对它们作出扩充和发展，那就更好了。

最后，我还希望此书的使用者或读者如有任何反馈信息或见解，均请直接函告出版社的编辑同志为幸。

徐利治

1998 年 4 月 4 日

前言

人类即将步入知识经济的时代。创造知识和应用知识的能力与效率将成为影响一个国家综合国力和国际竞争能力的决定性因素。“一个没有创新能力的民族，难以屹立于世界先进之林”。高等学校如何能培养出具有创新意识和能力的年轻人材，关系到我国下一世纪的发展和命运。为了这个目的，学校的最重要工作是转变教育观念，在教育目标和教学方法上作根本性改革，鼓励和培养学生的主动性和创新意识。

4 年前，徐利治教授和已去世的卢树铭教授倡导编辑一本《大学数学解题法诠释》时，突出的思想是希望学生通过解题训练能加深对数学的理解和方法上的提高与创新，培养数学地思维习惯和能力。安徽教育出版社的编辑们通过艰苦细致的工作，积聚了一批在数学各学科有丰富教学经验的专家编写了此书。作者们精心挑选了习题。他们不仅在做题，而且在讲题。通过解题着重阐述了数学思想与方法，也体现了作者们对各门数学的认识与理解。我相信读者们在学习本书之后会有许多收益。同时，我也希望读者们不要看人家做题，而是自己先做，然后再与书中比较。这不仅是切实提高自己能力的好方法，而且更重要的是我相信读者们会有比本书更好的思想和方法，会有很多的创新。学生本应是超过老师的。

冯克勤

1998 年 8 月 24 日于北京

目　录

第1篇　数学分析 √

第2篇　解析几何与矢量代数 √

第 3 篇　线性代数 √

第 4 篇　抽象代数

第 5 篇　线性规划

第 6 篇　复变函数 √

第7篇 实变函数 √

第8篇 泛函分析

第9篇 微分方程 √

第10篇 离散数学 √

第11篇 概率论 √

第12篇　计算方法　√

第13篇　数学模型

第 1 篇　数学分析

§ 1.1　求数列极限的各种方法

极限是数学分析中最重要的基础之一，极限有数列极限和函数极限. 论证极限存在及求出极限是学好数学分析的第一步，数列极限的计算和论证的方法有：

(1) 应用数列极限的定义，即 ε-N 方法.

(2) 数列极限的 +、-、×、÷ 四则运算性质.

(3) 夹逼定理：设 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ 存在且相等，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

(4) 单调增(减)有上(下)界的数列收敛.

在证明了数列 x_n 收敛后，记极限为 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，往往在关于 x_n 的一个递推公式两边令 $n\to+\infty$，得到关于 x 的方程式，于是可解出极限值 x 来.

(5) 两个重要极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(6) 应用 Cauchy 收敛原理.

(7) 如果 x_n 的上极限和下极限相等，即

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n,$$

则 x_n 的极限存在且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$.

(8) Stolz 公式(参阅[4]，22 页 ~ 26 页)：

($\dfrac{\infty}{\infty}$ Stolz 公式)：设 $\{x_n\}$ 严格增，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. 若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = \begin{cases} a\in\mathbf{R}(\text{实数集}), \\ +\infty, \\ -\infty. \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

($\dfrac{0}{0}$ Stolz 公式)：设当 $n\to+\infty$ 时，$y_n\to 0$，x_n 严格单调减趋于 0. 若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = \begin{cases} a\in\mathbf{R}, \\ +\infty, \\ -\infty. \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

(9) 将数列极限化为函数极限，然后应用求函数极限的方法(如等价代换、函数的连续性、L'Hospital 法则或 Taylor 展开等)求出极限，从而也得到相应的数列极限.

(10) 将数列极限化成 Riemann 积分的定义形式，然后求出积分值，即为所求的极限.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(11) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 收敛，所以也可用级数收敛的判别法和求和法来研究数列的收敛性和极限.

1.1.1　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\in\mathbf{R}$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$；

(2) 讨论 $a=+\infty, -\infty, \infty$ 时，(1) 中的结论；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} = a$，其中 $a_n>0, n=1,2,\cdots$；

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = a$，其中 $a_n>0, n=1,2,\cdots$.

证　(1) 用极限的定义证. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又因为 a_n 收敛，故 a_n 有界，从而 $|a_n-a|$ 有界. 设 $|a_n-a|\leqslant M, M>0, n=1,2,\cdots$. 固定 N_1，取 $N>\max\left\{N_1, \dfrac{2N_1M}{\varepsilon}\right\}$，当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| \\
&= \frac{|(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)|}{n} \\
&\leqslant \frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n} \\
&\quad + \frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n} \\
&\leqslant \frac{N_1M}{N}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$.

(2) 当 $a=+\infty$ 时，结论仍成立. 事实上，对 $\forall A$

>0,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$,所以存在 N_1,当 $n>N_1$ 时,$a_n>4A$,固定 N_1,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}=0$,故存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,$\dfrac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}>-A$,取 $N=\max\{2N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\\=&\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\\>&-A+\frac{n-N_1}{n}4A=-A+(1-\frac{N_1}{n})4A\\>&-A+(1-\frac{1}{2})4A=A.\end{aligned}$$

于是,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

同样可证当 $a=-\infty$ 时,结论也正确.

但若 $a=\infty$,则结论不必成立.例如 $a_n=(-1)^{n-1}n$,$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$,但

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_{2n}}{2n}\\=&\frac{1-2+3-4+\cdots+2n-1-2n}{2n}\\=&\frac{-n}{2n}=-\frac{1}{2}\longrightarrow-\frac{1}{2}(n\to+\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_{2n-1}}{2n-1}\\=&\frac{1-2+3-\cdots-(2n-2)+2n-1}{2n-1}\\=&\frac{n}{2n-1}\longrightarrow\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 不存在.

(3) 由于 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,则 $a\geqslant0$.

(ⅰ) 如果 $a>0$,就有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}>0$,应用(1)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a},$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$$

(ⅱ) 如果 $a=0$,由于 $a_n>0$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=+\infty$.应用(2)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=+\infty,$$

于是,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\\=&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=0=a.\end{aligned}$$

综合(ⅰ)(ⅱ),就有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$.

(4) 由于 $a_n>0,n=1,2,\cdots$,故由

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

以及(1)、(3),再应用夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a.$$

若 $a=0$,可以直接证,事实上,由

$$0<\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a=0=\lim\limits_{n\to+\infty}0$,再由夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=0=a.$$

注 在利用定义(即 ε-N 方法)证明数列 a_n 有极限时,通常有一条主线.它是应用初等数学的技巧将 $|a_n-a|$ 不断适当放大,直到能从其中解出自然数 N 来.本题(1)的主线就是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\\leqslant&\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}\\&+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\<&\frac{N_1M}{N}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

N 就是从 $\dfrac{N_1M}{N}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 中解出的.(2)中的主线应是缩小不等式.

下面的1.1.2~1.1.7中,请读者特别注意解题中的主线.

1.1.2 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,又当 $m,n\in\mathbf{N},t_{mn}\geqslant0$,$\sum\limits_{n=1}^{m}t_{mn}=1$,$\lim\limits_{m\to+\infty}t_{mn}=0$ 时,试证

$$\lim_{n\to+\infty}(t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\cdots+t_{nn}a_n)=a.$$

证 因为 a_n 收敛于 a,故 a_n 有界,设 $|a_n-a|<M,M>0,n=1,2,\cdots$.

对 $\forall \varepsilon>0, \exists N_1 \in \mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.固定 N_1,由于 $\lim\limits_{m\to+\infty} t_{mn}=0$,所以存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,$|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2MN_1}, k=1,2,\cdots,N_1$,取 $N=\max(N_1,N_2)$,当 $n>N$ 时,由 $\sum\limits_{n=1}^{m} t_{mn}=1$,有

$$\begin{aligned}
&|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-a| \\
&=|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-(t_{n1}+\cdots+t_{nn})a| \\
&=|t_{n1}(a_1-a)+\cdots+t_{nn}(a_n-a)| \\
&\leqslant t_{n1}|a_1-a|+\cdots+t_{nN_1}|a_{N_1}-a| \\
&\quad +t_{nN_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+t_{nn}|a_n-a| \\
&<M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn}) \\
&\leqslant M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2MN_1}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a$.

1.1.3 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$.试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

证法 1 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$ 知 $\{a_n\},\{b_n\}$ 有界,即存在 $M>0$,使 $|a_n|<M,|b_n|<M,|a|<M$,且对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M},\ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

固定 N_1,取 $N>\max\{N_1,\frac{2M}{\varepsilon}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|]\}$,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}-ab\right| \\
&=\left|\frac{1}{n}[(a_0b_n-ab)+(a_1b_{n-1}-ab)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+(a_{n-1}b_1-ab)+(a_nb_0-ab)]+\frac{ab}{n}\right| \\
&=\left|\frac{1}{n}[b_n(a_0-a)+a(b_n-b)+b_{n-1}(a_1-a)\right. \\
&\quad +a(b_{n-1}-b)+\cdots+b_0(a_n-a)+a(b_0-b)] \\
&\quad \left.+\frac{ab}{n}\right| \\
&\leqslant\frac{M}{n}[|a_0-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_0-b|+\cdots \\
&\quad +|b_n-b|+|b|] \\
&\leqslant\frac{M}{N}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a| \\
&\quad +|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|] \\
&\quad +\frac{M}{n}[|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a| \\
&\quad +|b_{N_1+1}-b|+\cdots+|b_n-b|] \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n}(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

证法 2 令 $\alpha_n=a_n-a,\beta_n=b_n-b$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to+\infty}(a_n-a)=0,\ \lim_{n\to+\infty}\beta_n=0.$$

根据 Cauchy 不等式和题 1.1.1(1),有

$$0\leqslant\left(\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}\right)^2\leqslant\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n},$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n} \\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n+1}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&=0\cdot0\cdot1=0=\lim_{n\to+\infty}0.
\end{aligned}$$

再应用夹逼定理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}\right)^2=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}=0.$$

因此,由题 1.1.1(1),有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n} \\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[(\alpha_0+a)(\beta_n+b)+\cdots \\
&\quad +(\alpha_n+a)(\beta_0+b)] \\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\alpha_0\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}+b\frac{\alpha_0+\cdots+\alpha_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right. \\
&\quad \left.+a\cdot\frac{\beta_0+\cdots+\beta_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}ab\right] \\
&=0+b\cdot0\cdot1+a\cdot0\cdot1+1\cdot ab=ab.
\end{aligned}$$

1.1.4 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$,试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

证法 1 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ 收敛,所以 a_n 有界,因而 $|a_n-a|$ 有界,设 $|a_n-a|\leqslant M, M>0, n=1,2,\cdots$;对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3}$.固定 $N_1,\exists N_2$,当 $n>N_2$ 时,$\frac{N_1}{n}M<\frac{\varepsilon}{3},\frac{|a|}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$,取 $N=\max(N_1,N_2)$,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right| \\
&=\left|\frac{1}{n^2}[(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+n(a_n-a)+\frac{n(n+1)}{2}a]-\frac{a}{2}\right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{1}{n^2}[(a_1 - a) + \cdots + n(a_n - a)] + \frac{a}{2n} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}[|a_1 - a| + \cdots + N_1 |a_{N_1} - a| + (N_1 + 1)|a_{N_1+1} - a| + \cdots + n|a_n - a|] + \frac{|a|}{2n}$$

$$< \frac{M \cdot \frac{N_1(N_1+1)}{2}}{n^2} + \frac{(N_1+1) + \cdots + n}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|a|}{n}$$

$$< \frac{N_1 M}{n} + \frac{n(n+1) - N_1(N_1+1)}{2n^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

证法 2　先证 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} = a.$

造一新数列：

$b_1 = a_1, b_2 = b_3 = a_2, b_4 = b_5 = b_6 = a_3, \cdots, b_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \cdots = b_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = a_{n+1}, \cdots$. 显然，$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. 事实上，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbf{N}$，当 $k > K$ 时，$|a_k - a| < \varepsilon$. 令 $N = \dfrac{K(K+1)}{2}$，当 $n > N$ 时，$n > \dfrac{K(K+1)}{2}$，$|b_n - a| = |a_k - a| < \varepsilon \ (k > K)$.

由题 1.1.1(1) 知

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = a,$$

$\dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}}$ 是 $\dfrac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$ 的一子列，因此，也有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}} = a.$$

下证 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$. 事实上，

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2n}$$

$$= a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

证法 3　应用 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式，有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{na_n}{2n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{a}{2}.$$

注　证法 2 中，构造一个新数列 b_n，化为题 1.1.1(1).

1.1.5　已知 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a, |q| < 1$，求证

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证　因为 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$，所以 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - a) = 0$，存在 $M > 0$，使 $|a_n - a| < M, n \in \mathbf{N}$.

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \dfrac{1 - |q|}{3(1-q)}\varepsilon$. 又因 $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ 和 $\lim\limits_{n \to +\infty} aq^n = 0$，故存在 $N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，$|q|^n < \dfrac{\varepsilon}{3N_1 M |1-q|}$，$|aq^n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是，当 $n > N = N_1 + N_2 + 1$ 时，有

$$|(1-q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - a|$$

$$= |(1-q)[(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_{N_1+1} - a)q^{n-N_1-1} + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}] - aq^n|$$

$$< |1-q| \left[\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3(1-q)} \cdot \frac{1 - |q|^{n-N_1}}{1-|q|} + N_1 M \cdot \frac{\varepsilon}{3N_1 M |1-q|}\right] + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n \to +\infty} (1-q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = a,$$

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

1.1.6　设 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a, b_n \geqslant 0, \lim\limits_{n \to +\infty} (b_1 + \cdots + b_n) = S$. 试证 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证　设 $S_n = b_1 + \cdots + b_n$，由 $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ 得到 $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. 又因为 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - a) = a - a = 0$，所以 $|a_n - a| < A, \forall n \in \mathbf{N}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$，所以存在 $N_1 \in \mathbf{N}$，

当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3(S+1)}$. 固定 N_1，又因 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，故存在 $N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，有 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{3AN_1}$，$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)}$. 于是，当 $n > N = N_1 + N_2$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|a_nb_1 + \cdots + a_1b_n - aS| \\
&= |(a_n - a)b_1 + \cdots + (a_1 - a)b_n - a(S - S_n)| \\
&\leqslant |a_n - a||b_1| + \cdots + |a_{N_1+1} - a||b_{n-N_1}| \\
&\quad + |a_{N_1} - a||b_{n-N_1+1}| + \cdots \\
&\quad + |a_1 - a||b_n| + |a||S - S_n| \\
&< \frac{\varepsilon}{3(S+1)}S + A \cdot N_1 \frac{\varepsilon}{3AN_1} \\
&\quad + |a| \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_1 + \cdots + a_1b_n) = aS.$$

1.1.7 设 $f(0) = 0$，$f'(0)$ 存在有限，令

$$x_n = f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\frac{n}{n^2}),$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解 由条件 $f(0) = 0$，$f'(0)$ 存在有限知

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}.$$

于是，对 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < x < \delta$ 时，

$$f'(0) - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < f'(0) + \varepsilon,$$

$$(f'(0) - \varepsilon)x < f(x) < x(f'(0) + \varepsilon),$$

取 $N \in \mathbf{N}$，使 $\frac{1}{N} < \delta$，则当 $n > N$ 时，有 $0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta(1 \leqslant k \leqslant n)$，因此

$$[f'(0) - \varepsilon]\frac{k}{n^2} < f(\frac{k}{n^2}) < [f'(0) + \varepsilon]\frac{k}{n^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[f'(0) - \varepsilon](1 + \frac{1}{n}) \\
&= [f'(0) - \varepsilon]\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) \\
&< [f'(0) + \varepsilon]\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}[f'(0) + \varepsilon](1 + \frac{1}{n})
\end{aligned}$$

又因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[f'(0) - \varepsilon](1 + \frac{1}{n}) = \frac{f'(0)}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[f'(0) + \varepsilon](1 + \frac{1}{n}) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$，故存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，

$$\frac{f'(0)}{2} - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) < \frac{f'(0)}{2} + \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) = \frac{f'(0)}{2}$.

注 解题时，注意给出的条件是很重要的，本题中，由 $f'(0)$ 的存在有限性，了解 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 与 $f'(0)$ 有关联，从而由 $f'(0)$ 的定义下手，问题能很快得以解决.

1.1.8 设 $a > 0$，$x_0 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$，$n = 0,1,2,\cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解 因为

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \leqslant \frac{1}{2}(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}) = x_n,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减有下界 $\sqrt{a}$，从而 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \geqslant \sqrt{a} > 0$，由此得

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \\
&= \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}),
\end{aligned}$$

$$2x = x + \frac{a}{x},$$

$$x^2 = a.$$

$x = \sqrt{a}$（$-\sqrt{a} < 0$，不可能为 x_n 的极限），即有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注 从此题起，是一系列单调数列的极限题，解这类问题时，一般先用初等的方法或数学归纳法证明所给数列的单调性和有界性，然后利用数列前后项的关系，等式两边同取极限，得到关于极限值的方程，就可以解得极限值了.

1.1.9 设 $x_1 = a > 0$，$y_1 = b > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$，$n = 1,2,\cdots$. 试证：$x_n$ 和 y_n 收敛于 a 和 b 之间的同一数，此数称为 a 和 b 的"算术 - 几何平均数".

证 显然 $x_n, y_n > 0$，$n = 1,2,\cdots$，且有

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \geqslant \sqrt{x_ny_n} = x_{n+1}, n = 1,2,\cdots$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n} \geqslant \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n, n = 1,2,\cdots$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \leqslant \frac{1}{2}(y_n + y_n) = y_n.$$

即 x_n 单调增有上界 $\max\{a,b\}$，y_n 单调减有下界 $\min\{a,b\}$，所以 x_n, y_n 都收敛，记 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，$y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. 对 $x_n, y_n, x_{x+1}, y_{n+1}$ 的关系式两边求极限得

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(x_n + y_n) \\
&= \frac{1}{2}(x + y),
\end{aligned}$$

$$x = y,$$

且 $\max\{a,b\} \geqslant x = y \geqslant \min\{a,b\}$.

1.1.10　设 $0 < a_n < 1$，且 $a_{n+1}(1-a_n) \geqslant \frac{1}{4}$，$n \in \mathbf{N}$.求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

解　由 $0<a_n<1$ 知 $0<1-a_n<1$，又因 $a_{n+1}(1-a_n) \geqslant \frac{1}{4}$，故

$$a_{n+1}-a_n \geqslant \frac{1}{4(1-a_n)} - a_n = \frac{(1-2a_n)^2}{4(1-a_n)} \geqslant 0,$$
$$a_{n+1} \geqslant a_n,$$

即 a_n 单调增有上界 1，从而 a_n 收敛.记 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$，于是

$$\frac{1}{4} \leqslant \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}(1-a_n) = a(1-a),$$
$$(a-\frac{1}{2})^2 \leqslant 0, a = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a = \frac{1}{2}.$$

1.1.11　设 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$，$n \in \mathbf{N}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

解法 1　由 $a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{5}{9}$，应用数学归纳法易知 a_{2k-1} 单调减和 a_{2k} 单调增，且 $0 < a_n < 4$，所以 a_{2k-1} 和 a_{2k} 均收敛.设

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = a, \lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = b\ (k\in\mathbf{N}),$$

于是由

$$a_{2k} = \frac{1}{1+a_{2k-1}} \text{ 和 } a_{2k+1} = \frac{1}{1+a_{2k}}$$

取极限得

$$a = \lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \frac{1}{1+\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k-1}} = \frac{1}{1+b},$$
$$b = \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{1+\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k}} = \frac{1}{1+a},$$

即

$$\begin{cases} a+ab = 1, \\ b+ab = 1. \end{cases}$$

解得 $a = b$.进一步再由

$$a + a\cdot a = 1$$

得到

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

方程有两个根 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，但因 $a_n > 0$，故 $a \geqslant 0$，于是得　$a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解法 2　如果 a_n 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \frac{1}{1+a},$$
$$a^2 - a + 1 = 0.$$
$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\text{由 } a_n > 0, \text{故 } a \geqslant 0).$$

下面证明 a_n 收敛.

对 $\forall\varepsilon > 0$，取自然数 $N > 1 + \frac{|a_1-a|}{\varepsilon a}$，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left|\frac{1}{1+a_{n-1}} - \frac{1}{1+a}\right| \\
&= \frac{|a_{n-1}-a|}{(1+a_{n-1})(1+a)} \\
&\leqslant \frac{|a_{n-1}-a|}{1+a} \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1} |a_1 - a| \\
&= \frac{1}{(1+a)^{n-1}} |a_1 - a| \\
&\leqslant \frac{1}{(n-1)a} |a_1 - a| < \frac{1}{N-1}\frac{|a_1-a|}{a} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以　$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注　上题的两种解法很典型.(1) 有时，一个数列本身并不单调，但其奇子列和偶子列各自有单调有界性，因此它们各自收敛.然后，根据关系式，证明它的奇子列、偶子列极限相等，因而数列收敛.(2) 先假设数列有极限，利用关系式，求出极限值，然后再用定义(ε-N 方法) 证明其正确性.在用此方法时，最后的验证是必不可少的.

1.1.12　设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解法 1　若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在有限，记 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，则

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} \\
&= \frac{3(1+x)}{3+x},
\end{aligned}$$
$$3x + x^2 = 3 + 3x, x^2 = 3.$$
$$x = \sqrt{3}\ (x_n > 0, \text{故 } x \geqslant 0).$$

下面就证明 $x = \sqrt{3}$ 确为 x_n 的极限，显然 $x_n > 0$.

对 $\forall\varepsilon > 0$，取 $N > \log_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \frac{\varepsilon}{|x_1-\sqrt{3}|+1}$，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - \sqrt{3}| &= \left|\frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - \sqrt{3}\right| \\
&= \left|\frac{3+3x_n-3\sqrt{3}-\sqrt{3}x_n}{3+x_n}\right| \\
&= \frac{(3-\sqrt{3})|x_n-\sqrt{3}|}{3+x_n} \\
&\leqslant \frac{3-\sqrt{3}}{3} |x_n - \sqrt{3}| \\
&\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^n |x_1 - \sqrt{3}|
\end{aligned}$$