高师函授教材

高等代数

GAODENGDAISHUGAODENGDAISHU

高绪珏
迟志敏

（下）

吉林教育出版社

高师函授教材

高 等 代 数

（第二版）

（下　册）

迟志敏　高绪珏

吉林教育出版社

高师函授教材　**高等代数　下册**　　　高绪珏　迟志敏　编

责任编辑　王铁义　　　　　封面设计　郭春芳

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米32开本11.125印张2插页247,000字

发行：吉林省新华书店　1987年9月第1版　　1987年9月第1次印刷

印数：1—1,373册

印刷：长春科技印刷厂　统一书号：7375·567　　定价：1.95元

目　录

第七章　线性空间

在这一章里，我们来讨论高等代数一个最基本的概念——线性空间．将分以下四个问题来讨论：

1　线性空间的概念和空间中向量的线性关系；

2　基底与维数，坐标．基底变换和坐标变换；

3　子空间，子空间的交与和，直和；

4　线性空间的同构．

§1　线性空间的概念

一　线性空间的定义

迄今为止，线性空间的概念是我们碰到的第一个抽象的概念．为了便于理解它，我们先来看几个例子．

例 1　在第五章讨论线性方程组的理论中曾引入了n元向量的概念．现在考虑数域F上全体n元向量所构成的集合，即

$$F^{(n)}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in F\}$$

在$F^{(n)}$中已定义了一个加法，F与$F^{(n)}$之间已定义了数量乘法，即

$$\begin{aligned}&(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)+(b_1,\ b_2,\ \cdots,b_n)\\=&(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\\&k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)\end{aligned}$$

对于这两种运算已知满足下列八个条件：

1）加法满足交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2）加法满足结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3）$F^{(n)}$ 中有一个零向量 $0=(0,0,\cdots,0)$，对$F^{(n)}$ 中任一向量α，都有

$$\alpha+0=\alpha$$

4）对$F^{(n)}$ 中每个向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，在$F^{(n)}$ 中有向量$\alpha'=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$，使得

$$\alpha+\alpha'=0$$

5）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

6）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

7）$(kl)\alpha=k(l\alpha)$

8）$1\cdot\alpha=\alpha$

其中α,β,γ为$F^{(n)}$中任意向量，k,l 为F中任意数。

例 2 M_n 表示数域 F 上一切 n 阶矩阵构成的集合。M_n中已有一个加法，F与M_n之间有一个数量乘法，即

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$k(a_{ij})=(ka_{ij})$$

对于矩阵的加法，数乘矩阵也满足上述八个条件1）—8）

例 3 $F[x]$ 表示数域 F 上所有一元多项式构成的集合。在 $F[x]$ 中有一个加法，F与 $F[x]$ 之间有一个数量乘法，即

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+c_nx^n$$
$$(m\leqslant n)$$

$$k(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=ka_0+ka_1x+\cdots+ka_nx^n$$

对于多项式的加法，数乘多项式也满足例1中的八个条件

1）—8）。

概括起来，上面三个例子虽然对象不同，运算法则各异，但它们有着下列一些共同的本质属性：

1 都有一个集合（$F^{(n)}, M_n$，$F[x]$）和一个数域F；

2 都有两种运算，即集合（$F^{(n)}, M_n$，$F[x]$）内有一个加法，数域与集合之间有一个数量乘法；

3 对于两种运算都满足八个条件1）—8）。

适合以上三个方面条件的，除了$F^{(n)}$，M_n和$F[x]$之外，还有相当广泛的数学对象。为了对这类对象统一起来加以研究，我们引入线性空间的概念。

定义

1 设V是一个非空集合，F是一个数域。

2 在V中定义一个加法运算，即给出一个法则，按照这个法则对于V中任意两个元素α，β，都确定V中唯一一个元素γ，称为α与β的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$；在F与V之间定义一个数量乘法，即给出一个法则，按照这个法则对于F中任一数k和V中任一元素α，都确定V中唯一一个元素δ，称为k与α的纯量积，记作$\delta=k\alpha$。

3 对于所定义的加法和数量乘法满足下列八个条件：

1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3）V中有一元素0，对于V中任一元素α，都有

$$\alpha+0=\alpha$$

具有这个性质的元素0称为V的零元素；

4）对V中每一个元素α，都有V中的元素β，使得

$$\alpha+\beta=0$$

称β为α的负元素；

5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

7) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

8) $1\cdot\alpha=\alpha$

则称V构成数域F上的线性空间，也说V是F上的线性空间，这时V中的元素叫做向量，零元素叫零向量，负元素叫负向量。其中α,β,γ是V中任意元素，k,l是F中任意数。

根据这个定义，前面所举的例1、例2、例3都是线性空间，分别称$F^{(n)}$为n元向量空间，称M_n为n阶矩阵空间，称$F[x]$为多项式空间。

下面再举几个例子：

例 4 在解析几何中，令$\boldsymbol{R}_2$，$\boldsymbol{R}_3$分别表示平面上和空间中从定点引出的一切向量构成的集合。对于向量的加法，实数与向量的乘法都构成实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间。

例 5 关于数的加法、数的乘法，复数集$\boldsymbol{C}$是实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间。

例 6 令$C[a,b]$表示定义在$[a,b]$上的一切连续函数所构成的集合。对于函数的加法，实数与函数的乘法，$C[a,b]$是实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间。

事实上，两个连续函数之和还是连续函数，实数与连续函数之积还是连续函数。条件1）—8）显然成立。

例 7 令$F_n[x]$表示数域F上一切次数小于n的多项式和零多项式构成的集合。对于多项式的加法，数与多项式的乘法，$F_n[x]$构成F上的线性空间。

如令$\overline{F_n[x]}$表示数域F上一切n次多项式构成的集合，则$\overline{F_n[x]}$关于多项式的加法，数与多项式的乘法不是F上的线性空间。

事实上，两个 n 次多项式之和不一定还是 n 次多项式。比如，

$$(x^n+3x^{n-1}+8)+(-x^n+2x^{n-1}+3x-6)$$
$$=5x^{n-1}+3x+2$$

二　线性空间的简单性质

设V是数域F上的线性空间．由线性空间V的定义，可直接推出如下一些简单而又基本的性质：

性质 1　由于V的加法满足结合律又满足交换律，所以在求V中 n 个元素之和时，可用任意加括号的方式，任意交换各项的次序算得的结果都相同。

性质 2　V 中的零向量是唯一的。

事实上，设$0_1, 0_2$是V的两个零向量．考察 0_1+0_2。一方面，由于0_1是零向量，所以

$$0_1+0_2=0_2$$

另一方面，由于 0_2 是零向量，所以

$$0_1+0_2=0_1$$

故有

$$0_1=0_1+0_2=0_2，\text{即}0_1=0_2，\text{证完}.$$

性质 3　V 中每个向量的负向量是唯一的。

事实上，设β_1, β_2都是α的负向量，考察 $\beta_1+\alpha+\beta_2$。一方面，

$$(\beta_1+\alpha)+\beta_2=0+\beta_2=\beta_2$$

另一方面，

$$\beta_1+(\alpha+\beta_2)=\beta_1+0=\beta_1$$

故有

$$\beta_1=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=(\beta_1+\alpha)+\beta_2=\beta_2$$

即

$$\beta_1=\beta_2，证完。$$

今后把向量α唯一的负向量记作$-\alpha$。定义V中的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

性质 4 在V中，

$$0\alpha=0,\quad k\cdot 0=0,\quad k(-\alpha)=-k\alpha=(-k)\alpha$$

事实上，$0\alpha+\alpha=0\alpha+1\cdot\alpha=(0+1)\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$。等式两端同时加上$-\alpha$，得

$$0\alpha=0$$

$k\cdot 0+k\cdot 0=k(0+0)=k\cdot 0$，等式两端同时加上$-k\cdot 0$，得

$$k\cdot 0=0$$

$k(-\alpha)+k\cdot\alpha=k(-\alpha+\alpha)=k\cdot 0=0$，据负元素的定义，得

$$k(-\alpha)=-k\alpha$$

$(-k)\alpha+k\alpha=(-k+k)\alpha=0\alpha=0$，据负元素的定义，得

$$(-k)\alpha=-k\alpha，证完。$$

这里可得一个特殊情况：当$k=1$时，

$$(-1)\alpha=-\alpha$$

性质 5 在V中，若$k\alpha=0$，则$k=0$或$\alpha=0$。

事实上，若$k\alpha=0$，当$k\neq 0$时，则一方面

$$\frac{1}{k}(k\alpha)=\frac{1}{k}\cdot 0=0$$

另一方面，

$$\frac{1}{k}(k\alpha)=\left(\frac{1}{k}\cdot k\right)\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$$

故$\alpha=0$，证完。

本节末了再举三个例子

例 8 设集合$V=\{a\}$，F为数域．规定

$$a+a=a,\quad k\cdot a=a \quad 任意k\in F$$

则V构成F上的线性空间．

事实上，明显看出所规定的法则“$+$”是V的加法运算；法则“$\cdot$”是F与V之间的数量乘法．容易验证满足1）—8），故V是F上的线性空间．

【注】 这个线性空间V只含一个向量a，显然a又是V的零向量，故V是只含一个零向量的线性空间，我们称它为零空间．

从这个例子我们看出，存在只含一个向量的线性空间．那么，有没有只含两个向量的线性空间呢？有没有只含有限个向量的线性空间呢？这作为思考题留给读者．

例 9 设$\boldsymbol{R}^+$为正实数集，$\boldsymbol{R}$为实数域．在$\boldsymbol{R}^+$中和$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{R}^+$之间给出法则如下：

$$\alpha\oplus\beta=\alpha\beta \text{（即}\alpha\text{与}\beta\text{之积）}$$

$$k\odot\alpha=\alpha^k$$

这里α，β是$\boldsymbol{R}^+$中任意正实数，k为$\boldsymbol{R}$中任一数．则$\boldsymbol{R}^+$构成$\boldsymbol{R}$上的线性空间．

证明 首先，由于$\boldsymbol{R}^+$中任二正实数之积仍是正实数，所以法则“$\oplus$”是$\boldsymbol{R}^+$的一个加法运算．当α为$\boldsymbol{R}^+$中任一正实数，则α^k也是正实数（不管k是$\boldsymbol{R}$中哪个实数），所以法则“$\odot$”是$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{R}^+$之间的数量乘法．

其次，验证八个条件：

1）$\alpha\oplus\beta=\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha=\beta\oplus\alpha$

2）$(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=(\alpha\beta)\oplus\gamma=(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha(\beta\oplus\gamma)$
$=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$

3）因$1\in\boldsymbol{R}^+$，对每个$\alpha\in\boldsymbol{R}^+$，都有

$$\alpha \oplus 1 = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

即 1 为零元素；

4) 对每个$\alpha \in \boldsymbol{R}^+$，有$\dfrac{1}{\alpha} \in \boldsymbol{R}^+$，使得

$$\alpha \oplus \frac{1}{\alpha} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

即$\dfrac{1}{\alpha}$为 α 的负元素；

5) $k \odot (\alpha \oplus \beta) = k \odot (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^k = \alpha^k \beta^k$

$= \alpha^k \oplus \beta^k = (k \odot \alpha) \oplus (k \odot \beta)$

6) $(k + l) \odot \alpha = \alpha^{k+l} = \alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^k \oplus \alpha^l$

$= (k \odot \alpha) \oplus (l \odot \alpha)$

7) $(kl) \odot \alpha = \alpha^{kl} = (\alpha^l)^k = (l \odot \alpha)^k = k \odot (l \odot \alpha)$

8) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$

于是，$\boldsymbol{R}^+$是$\boldsymbol{R}$上的线性空间．

【注】 1）通过该例的学习，要求读者进一步领会线性空间定义中的两个运算的含意．

2）在验证有零元时，怎么会想到零元可能是 1 呢？验证 α 的负元时，怎么想到了$\dfrac{1}{\alpha}$呢？此事可以这样来考虑：

若$\alpha \oplus x = \alpha$，则$\alpha x = \alpha$，于是$x = 1$．这说明，如果$\boldsymbol{R}^+$中有零元素的话，那必是 1．

若$\alpha \oplus y = 1$，则 $\alpha y = 1$，于是 $y = \dfrac{1}{\alpha}$．这说明，如果 α 有负元素的话，那必是$\dfrac{1}{\alpha}$．

从这里看到，当不易知道零元素及 α 的负元素是什么时，可用解方程的办法来找．

例10 举例说明线性空间中两个运算所适合的八个条件中的第 8）条不能由前七条推出来，因而是独立的．

【注】 解此题需举出一个实例，除了运算不满足第 8）条外，其余所有条件都被满足．

解 设$F^{(2)}$为数域F上一切2元向量构成的集合。给出法则如下：

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, 0)$$

首先，明显可知两个法则分别是$F^{(2)}$的加法和F与$F^{(2)}$之间的数量乘法。

其次，八个条件中的前四条1）—4）显然成立。而因

$$k[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = k(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$= (k(a_1 + b_1), 0) = (ka_1 + kb_1, 0)$$
$$k(a_1, a_2) + k(b_1, b_2) = (ka_1, 0) + (kb_1, 0)$$
$$= (ka_1 + kb_1, 0)$$

有

$$k[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = k(a_1, a_2) + k(b_1, b_2)$$

故5）成立。因

$$(k+l)(a_1, a_2) = ((k+l)a_1, 0) = (ka_1 + la_1, 0)$$
$$k(a_1, a_2) + l(a_1, a_2) = (ka_1, 0) + (la_1, 0)$$
$$= (ka_1 + la_1, 0)$$

有

$$(k+l)(a_1, a_2) = k(a_1, a_2) + l(a_1, a_2)$$

故6）成立。因

$$(kl)(a_1, a_2) = ((kl)a_1, 0) = (k(la_1), 0)$$
$$k(l(a_1, a_2)) = k(la_1, 0) = (k(la_1), 0)$$

有

$$(kl)(a_1, a_2) = k(l(a_1, a_2))$$

故7）成立。但

$$1\cdot(2, 2) = (2, 0) \neq (2, 2)$$

故8）不成立。因此8）确不能由其他条件推出。

练 习 一

1 按矩阵的加法和数乘矩阵，下列集合是否是实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间？

1) 实数域上n阶对称阵的全体构成的集合。

2) 实数域上n阶反对称阵的全体构成的集合。

3) 实数域上n阶可逆矩阵的全体构成的集合。

2 设

$$V=\{ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2 \mid a,b,c\in F\}$$

试问关于多项式的加法、数与多项式的乘法V是否是数域F上的线性空间？

3 按数的加法和乘法，下列集合是否是实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间？

1) 整数集$\boldsymbol{Z}$。

2) 有理数集$\boldsymbol{Q}$。

3) 实数集$\boldsymbol{R}$。

4 有没有只含两个向量的线性空间？有没有只含有限个向量的线性空间？为什么？

5 在数域F上的线性空间V中，证明

$$k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$$

其中α，$\beta\in V$，$k\in F$。

6 证明：数域F上的线性空间V的定义的八个条件中3)，4)两条可换为方程

$$x+\alpha=\beta$$

在V中有解，这里任意$\alpha,\beta\in V$。

§2 向量的线性关系

在第五章我们已经看到，n元向量的线性关系对解决线性方程组的理论起着重要作用。同样，在一般线性空间中，向量的线性关系对解决线性空间的理论也将起着重要作用。一般线性空间中，向量的线性关系的定义及其基本性质，是n元向量的线性关系的定义及其基本性质的推广。并且在叙述上，论证方法上都是完全一致的。在这里只叙述，举例，不作证明。

一 线性表出

设V是数域F上任一线性空间。

定义 1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是$V$中一组向量，$\beta$是$V$中的向量。如果有$F$中的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

则称β是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的线性组合，或说$\beta$可被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出。

定义 2 设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \qquad (1)$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \qquad (2)$$

是V中两组向量。如果组(1)中每个向量都可被组(2)线性表出，则称组(1)可被组(2)线性表出。如果组(1)可被组(2)线性表出，组(2)也可被组(1)线性表出，则称组(1)与组(2)等价。

于是，可得到V中向量组线性表出的传递性。

命题 1 设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \tag{3}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \tag{4}$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l \tag{5}$$

是V中三组向量．如果组（3）可被组（4）线性表出，组（4）可被组（5）线性表出，则组（3）可被组（5）线性表出．

例 1 在M_2中，向量$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$能否被向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$线性表出？能否被向量组$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$线性表出？

解 假如

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 \tag{6}$$

看是否有k_1, k_2, k_3, k_4存在．如果有，那么γ就可被$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，否则$\gamma$就不能被$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出．

事实上，将题设的$\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$代入（6），得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ k_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} k_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$