研　究　生　教　材

国防科技大学研究生教材专项经费资助

# 应用泛函分析

吴　翊　屈田兴　编著

国防科技大学出版社

·长沙·

## 内 容 简 介

本书以工程应用为背景，系统介绍了泛函分析的基本理论与方法。第一章介绍有关基本概念，具有泛函分析初步知识的读者可以略去。第二、三章是线性泛函分析的核心内容。第四章介绍了非线性泛函的初步知识。第五章介绍了广义函数的相关理论与应用。全书力求从工程实际的背景引出泛函分析的概念，在论述问题时侧重于讲清思路，并注意充分利用例题和习题进行说明和内容补充。全书力求叙述清楚，可读性强，便于自学。可供工程专业硕士生、博士生作为公共课教材选用，也可作为数学专业学生的教材和教学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用泛函分析/吴翊，屈田兴编著. —长沙：国防科技大学出版社，2002.4
ISBN 7-81024-828-6

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①吴… ②屈… Ⅲ. 泛函分析 Ⅳ. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 020997 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640 邮政编码：410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑：潘 生 责任校对：唐卫威
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
787×960 1/16 印张：11.75 字数：217 千
2002 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1-3000 册
*
定价：18.00 元

# 前　言

泛函分析作为一门独立的数学分支是 20 世纪二三十年代的事．在短短的二三年内，这一领域得到了迅速的发展，到了五六十年代，它已在同时期的数学中占据了中心地位．今天，虽然从数学理论研究的角度看，泛函分析（特别是线性泛函分析）不如过去活跃，但这也正是它逐步走向成熟的表现．由于泛函分析的广泛应用，它的思想、概念、方法已渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理、现代工程技术等各领域中，逐渐成为广大科学研究、工程技术人员所必备的数学知识和素养，以至于在大学数学教育中有人提出要用包括泛函分析在内的“新三高”代替过去的“老三高”的说法．虽然这种说法未必十分准确，但也从一个侧面反映了泛函分析这门课程的重要地位．

回顾泛函分析发展的历史，不难看出，泛函分析是现代数学根本变革的辉煌体现，它在当时的重要性完全可以与 17 世纪将变量引入数学导致微分积分的诞生相媲美，它的出现给数学分析中各类问题的研究带来令人耳目一新的观念变化。原来对个别函数和与之相关的方程的研究已被对它们的整体——函数空间及其变换（算子）的研究所取代，而单个函数在研究问题中只是变量的一个具体“取值”．由于微分或积分算子已不只是被看做是对单个函数的应用，而被看做是对整个一类函数的应用，因而研究重点转到了诸如算子作用在一类函数上的一般结果及算子在这样或那样意义下的连续性等问题上．泛函分析的另一个重要特点是一般抽象地处理分析问题，将那些看来迥异的单个问题统一用同一模型来研究，像微分方程、积分方程、边值问题、矩问题等均可放在一起研究，这种从个别函数到函数空间的转变尽管可能一时不容易理解，但却是非常重要的，它能清晰地、形式化地表述问题并引导讨论它的研究，使得规律和联系显现出来，而不因个别问题的细微末节将事物的本质模糊．

为泛函分析诞生铺平道路的是若干经典数学领域的研究——变分法、积分方程、正交函数理论、Chebyshev 逼近论、矩问题等，这些领域提出的问题，促进了更高层次思维方式的出现，而新的思想理论又反过来促使了这些领域朝更高的水平的研究，特别是当泛函分析在量子力学方面得到重要应用以后，更显示了它在现代科学技术中的重要基础作用．我们今天学习泛函分析固然要学习其中的科学结论，但更重要的恐怕还要学习其中体现出来的整体思考的观念

和抽象思维的方法.

另一方面，泛函分析是有穷维空间的代数、几何问题向无穷维的推广. 我们在学习时，要尽量多比较分析，无穷维的问题哪些与有穷维是一致的或类似的，哪些是无穷维空间所特有的，掌握了这些要点，我们就能融会贯通过去的数学知识，在学习泛函分析的课程中取得事半功倍之效.

本教材名为“应用泛函分析”，在编写过程中，我们尽量从问题的背景着手，力求深入浅出，对于定理的证明，尽量交待清楚思路，并适当举出一些应用实例，以期对工程专业的学生有所裨益，但囿于作者水平，加之成书仓促，书中谬误难免. 不当之处，敬请批评.

编 者

2002 年 3 月

# 常用符号索引

| | |
|---|---|
| $\phi$ | 空集 |
| $\mathbf{N}$ | 全体自然数所成的集合 |
| $\mathbf{Z}$ | 全体整数所成的集合 |
| $\mathbf{R}$ | 全体实数所成的集合或实数域 |
| $\mathbf{Q}$ | 全体有理数所成的集合 |
| $\mathbf{C}$ | 全体复数所组成的集合或复数域 |
| $\mathbf{K}$ | 实数域或复数域 |
| $\mathbf{R}^n$ | 实 $n$ 维空间 |
| $\mathbf{C}^n$ | 复 $n$ 维空间 |
| $\triangleq$ | 记为或定义为 |
| $\Leftrightarrow$ | 当且仅当,等价于 |
| $\#$ | 证毕 |
| $m(G)$ | $G$ 的 Lebesgue 测度 |
| sup | 上确界 |
| inf | 下确界 |
| $\overline{\lim}$ | 上极限 |
| $\underline{\lim}$ | 下极限 |
| $(x_1,\cdots,x_n)^T$ | 行向量$(x_1,\cdots,x_n)$的转置 |
| span$A$ | $A$ 张成的子空间 |
| dim$E$ | $E$ 的维数 |
| $\mathcal{N}(T)$ | 算子 $T$ 的零空间 |
| ker $(f)$ | 泛函 $f$ 的零空间 |
| $\\|x\\|$ | $x$ 的范数 |
| $\langle x,y\rangle$ | $x$ 与 $y$ 的内积 |
| $B(x,r)$ | 以 $x$ 为心 $r$ 为半径的开球 |
| $\tilde{B}(x,r)$ | 以 $x$ 为心 $r$ 为半径的闭球 |

| | |
|---|---|
| $A^c$ | 集合 $A$ 的余集 |
| $\overline{A}$ | 集合 $A$ 的闭包 |
| $\\|T\\|$ | 算子 $T$ 的范数 |
| $T^\times$ | 赋范空间上有界线性算子 $T$ 的共轭算子 |
| $T^*$ | Hilbert 空间上有界线性算子 $T$ 的共轭算子 |
| $\mathscr{B}(E,E_1)$ | E 到 $E_1$ 的有界线性算子空间 |
| $E^*$ | 赋范空间 $E$ 的共轭空间 |
| $l^p(1\leqslant p<\infty)$ | $p$ 方可和的数列空间 |
| $l^\infty$ | 有界数列空间 |
| $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$ | [a,b] 上 $p$ 方可积函数空间 |
| $L^\infty[a,b]$ | $[a,b]$ 上本性有界函数空间 |
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ 上连续函数的函数空间 |
| $DA(x;h)$ | 算子 $A$ 在 $x$ 处沿 $h$ 方向的 Gâteaux 微分 |
| $A'(x)$ | 算子 $A$ 在 $x$ 处的 Frèchet 导数 |

# 目　　录

## 第四章 非线性泛函分析初步



## 第五章 广义函数



## 主要参考书目

# 第一章　赋范空间与 Banach 空间

无论是在理论上，还是在应用中，我们常常会遇到这样一类空间，在其上既有代数结构，又有收敛概念，如函数空间、序列空间等．因而需要把代数的线性结构与拓扑结构有机地结合起来，使两种结构相容，准确地说，即是要使其中的代数运算在规定收敛性意义下是连续的，由此就引出了赋范空间的概念．完备的赋范空间称为 Banach 空间．赋范空间的理论，尤其是 Banach 空间的理论以及定义在这类空间上的线性算子理论，是泛函分析中最为完善的理论．

本章将介绍有关赋范空间与 Banach 空间的基本概念，为学习后面各章奠定基础．

## §1　赋范空间与 Banach 空间

**定义 1**　设 $E$ 是数域 $\mathbf{K}(\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C})$ 上的线性空间，若函数 $\|\cdot\|:E\to\mathbf{R}$ 具有下述性质：

（ⅰ）正定性：对任何 $x\in E$，$\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$；

（ⅱ）绝对齐性：对任何 $\alpha\in\mathbf{K}$ 与 $x\in E$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

（ⅲ）三角不等式：对任何 $x,y\in E$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称 $\|\cdot\|$ 是 $E$ 上的一个范数，$(E,\|\cdot\|)$ 为赋范空间，$\|x\|$ 为 $x$ 的范数，$\|x-y\|$ 为 $x$ 与 $y$ 间的距离，有时也用 $d(x,y)$ 表示 $x$ 与 $y$ 间的距离，即 $d(x,y)=\|x-y\|$．

当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时，称 $(E,\|\cdot\|)$ 为实赋范空间；当 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 时，称 $(E,\|\cdot\|)$ 为复赋范空间．在不致引起混淆时，赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 简记为 $E$．

设 $M$ 是赋范空间 $E$ 的线性子空间，易验证 $M$ 按 $E$ 上的范数自身成为一个赋范空间，此时称 $M$ 是赋范空间 $E$ 的子空间．

**定义 2**　设 $E$ 是赋范空间，$\{x_k\}$ 是 $E$ 中的点列，若存在 $x\in E$ 使

$$\lim_{k\to+\infty}\|x_k-x\|=0,$$

则称 $\{x_k\}$ 依范数收敛于 $x$，称 $x$ 为 $\{x_k\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$ 或 $x_k\to x$，也可记为 $\{x_k\}\to x$．

若 $E$ 中的点列 $\{x_k\}$ 满足条件：$\lim\limits_{k,l\to+\infty}\|x_k-x_l\|=0$，则称 $\{x_k\}$ 是 $E$ 中的 Cauchy 列或基本列．

由范数的三角不等式易见：

1° 收敛点列的极限是唯一的；

2° 收敛点列必是 Cauchy 列，反之不真.

**定义 3** 若赋范空间 $E$ 中的任何 Cauchy 列都是 $E$ 中的收敛点列，则称 $E$ 是完备的. 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

**定理** 设 $E$ 是赋范空间，$x$、$y$、$x_k$、$y_k \in E$，$\alpha$、$\alpha_k \in \mathbf{K}$，$k=1,2,\cdots$，则

(i) 当 $x_k \to x$，$y_k \to y$ 时，$x_k + y_k \to x + y$，即 $E$ 中的加法是连续的；

(ii) 当 $\alpha_k \to \alpha$，$x_k \to x$ 时，$\alpha_k x_k \to \alpha x$，即 $E$ 中的数乘是连续的.

**证** (i) 由 $\|(x_k+y_k)-(x+y)\| \leqslant \|x_k - x\| + \|y_k - y\|$ 显见.

(ii) 由于收敛数列是有界的，所以 $\{\alpha_k\}$ 有界，于是

$$
\begin{aligned}
&\|\alpha_k x_k - \alpha x\| \\
\leqslant &\|\alpha_k x_k - \alpha_k x\| + \|\alpha_k x - \alpha x\| \\
= &|\alpha_k| \, \|x_k - x\| + |\alpha_k - \alpha| \, \|x\| \\
\to &0.
\end{aligned}
$$

\#

此定理实际上反映了 $E$ 上的线性结构与拓扑结构是相容的.

下面我们将给出一些最常见的赋范空间的例子.

**例 1(欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 与酉空间 $\mathbf{C}^n$)** 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)，令

$$\|x\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|,$$

则它们均是 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)上的范数，且不难验证 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)按上述范数均是 Banach 空间. 事实上，依上述范数收敛等价于每个坐标分量所成的数列在 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)分别收敛. 再由 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)的完备性即可证明 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)的完备性. 留作读者练习.

本例表明，在同一线性空间上可引入不同的范数使之成为赋范空间. 但应注意，它们应视为不同的赋范空间.

**例 2** 设 $C[a,b]$ 是有限区间 $[a,b]$ 上的实值(或复值)连续函数的全体，对 $x \in C[a,b]$，令

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|, \tag{1}$$

则 $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，且依范数收敛等价于一致收敛.

**证** 容易验证 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$ 上的范数. 下证 $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 是完备

空间.

设 $\{x_k\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,即对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $k,l\geqslant N$ 时

$$\| x_k - x_l \| = \max_{t\in[a,b]} |x_k(t) - x_l(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

于是对每个固定的 $t\in[a,b]$,当 $k,l\geqslant N$ 时

$$|x_k(t) - x_l(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

上式表明,$\{x_k(t)\}$ 是 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$) 中的 Cauchy 列.由 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$) 的完备性知,$\lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$ 存在,记之为 $x(t)$.在(3)式中,令 $l\to+\infty$ 得

$$|x_k(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad k\geqslant N, t\in[a,b]. \tag{4}$$

注意到 $N$ 的取法不依赖 $[a,b]$ 中 $t$ 的选取,由上式知,函数列 $\{x_k(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$,从而 $x(t)$ 作为连续函数列的一致极限在 $[a,b]$ 上连续,故 $x\in C[a,b]$.因此(4)式即当 $k\geqslant N$ 时

$$\| x_k - x \| \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了 $x_k\to x$.综上所述,$(C[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. #

**例 3(不完备空间的例子)** 设 $P[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上多项式的全体,则 $P[0,1]$ 作为 $C[0,1]$ 的子空间是赋范空间,但它不是 Banach 空间.

**证** 只要说明 $P[0,1]$ 作为 $C[0,1]$ 的子空间不是完备的,为此令

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad t\in[0,1],\ n\in\mathbf{N},$$

则 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $x(t)=e^t$,即 $\{x_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中收敛于 $x$,故 $\{x_n\}$ 是 $P[0,1]$ 中的 Cauchy 列.很明显,$\{x_n\}$ 在 $P[0,1]$ 中不收敛;否则,存在 $y\in P[0,1]$,使 $\{x_n\}$ 在 $P[0,1]$ 中收敛于 $y$,则 $\{x_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中也收敛于 $y$.于是 $y=x$,即 $y(t)=e^t$,这与 $y\in P[0,1]$ 矛盾. #

**需要指出的是,虽然一些最常见的赋范空间都是完备的,但更多的赋范空间却是不完备的,**下面再给出几个 Banach 空间的例子.

**例 4** 设 $1\leqslant p<\infty$,$l^p$ 是由满足条件 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty$ 的实数列(或复数列) $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$ 的全体组成.为方便起见,将 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$ 简记为 $x=(\xi_k)$.对 $x=(\xi_k),y=(\eta_k)\in l^p$,实数(或复数) $\alpha$,定义

$$x+y=(\xi_k+\eta_k), \qquad \alpha x=(\alpha\xi_k), \tag{5}$$

则 $l^p$ 按上述运算成为线性空间.对 $x=(\xi_k)\in l^p$,令

$$\| x \| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right\}^{1/p}. \tag{6}$$

证明 $l^p$ 是 Banach 空间.

证　按(6)式定义的 $\|\cdot\|$ 显然满足正定性与绝对齐性,而三角不等式则是由 Minkowski 不等式

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

得到的.下证 $l^p$ 的完备性即可.

设 $\{x^{(k)}\}$ 是 $l^p$ 中的 Cauchy 列,记 $x^{(k)}=(\xi_i^{(k)})$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $k_0\in\mathbf{N}$,使

$$\|x^{(k)}-x^{(l)}\|\leqslant\varepsilon, \qquad k,l\geqslant k_0, \tag{7}$$

即

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(l)}|^p\leqslant\varepsilon^p, \qquad k,l\geqslant k_0.$$

于是对每个固定的 $i\in\mathbf{N}$,当 $k,l\geqslant k_0$ 时,$|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(l)}|\leqslant\varepsilon$,这表明数列 $\{\xi_i^{(1)},\xi_i^{(2)},\cdots,\xi_i^{(k)},\cdots\}$ 是 Cauchy 列,从而存在数 $\xi_i$ 使

$$\lim_{k\to+\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i. \tag{8}$$

任意固定 $j\in\mathbf{N}$,由(7)式得 $\sum\limits_{i=1}^{j}|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(l)}|^p\leqslant\varepsilon^p\quad(k,l\geqslant k_0)$. 令 $l\to+\infty$,并注意到(8)式得,$\sum\limits_{i=1}^{j}|\xi_i^{(k)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p\quad(k\geqslant k_0)$. 再令 $j\to+\infty$ 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(k)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p, \quad k\geqslant k_0. \tag{9}$$

故 $(\xi_i^{(k_0)}-\xi_i)\in l^p$,进而 $x=(\xi_i)=(\xi_i^{k_0})-(\xi_i^{(k_0)}-\xi_i)\in l^p$. 于是(9)式可写成 $\|x^{(k)}-x\|\leqslant\varepsilon\quad(k\geqslant k_0)$. 这表明 $\lim\limits_{k\to+\infty}x^{(k)}=x$. 因而 $l^p$ 是完备空间.

#

**例 5**　令 $l^\infty=\{x\,|\,x=(\xi_k)$是 $\mathbf{K}$ 中的有界数列$\}$,则 $l^\infty$ 按(5)式定义的线性运算是线性空间.再令

$$\|x\|=\sup_{k\in\mathbf{N}}|\xi_k|, \quad x=(\xi_k)\in l^\infty,$$

则不难证明 $l^\infty$ 是 Banach 空间.

下面两个例子的证明由于涉及到较多的实变函数知识,特别是 Lebesgue 积分理论,在这里就不予证明.

**例 6**　设 $1\leqslant p<\infty$,若 $f$ 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可测函数,且满足

$$\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t<\infty,$$

则称 $f$ 在 $[a,b]$ 上 $p$ 方可积.记 $L^p[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上 $p$ 方可积函数的全体,并

令

$$\| f \| = \left\{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p[a,b],$$

则可以证明 $L^p[a,b]$ 是 Banach 空间.

**例 7** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可测函数,且存在 $[a,b]$ 的某一零测子集 $e_0$,使 $f$ 在$[a,b]\setminus e_0$ 上有界,即

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus e_0} |f(t)| < \infty,$$

则称 $f$ 是$[a,b]$ 上的本性有界函数. 记 $L^\infty[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的本性有界函数的全体,并令

$$\| f \| = \inf_{\substack{e\subset[a,b]\\ me=0}} \sup_{[a,b]\setminus e} |f(t)|,$$

则 $L^\infty[a,b]$ 是 Banach 空间.

要说明的是,对 $1 \leqslant p < \infty$, $L^p[a,b]$ 与 $l^p$ 有类似的性质,这是由于积分实际上是某种和式的极限,而和式则是自然数集 $\mathbf{N}$ 上计数测度的积分,因而我们常对 $l^p$ 的性质加以证明,而对 $L^p[a,b]$ 只给出相应的结论. 同样地, $L^\infty[a,b]$ 和 $l^\infty$ 的性质是类似的. 另外,今后将 $l^1$ 与 $L^1[a,b]$ 分别简记为 $l$ 与$L[a,b]$.

## 习　题

1. 证明例 1 的结论.

2. 设 $E$ 是赋范空间,证明 $E$ 上的范数是连续函数,即当 $x_k \to x$ 时, $\| x_k \| \to \| x \|$.

3. 设 $\{x_k\}$ 是赋范空间 $E$ 中的 Cauchy 列,证明 $\{x_k\}$ 有界,即 $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} \| x_k \| < \infty$.

4. 证明例 5 中的赋范空间 $l^\infty$ 是完备空间.

5. 设 $x \in C[0,1]$, 令

$$\| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| \mathrm{d}t,$$

证明 $(C[0,1] \| \cdot \|_1)$ 是赋范空间,但不是完备空间,即 $C[0,1]$ 作为 $L[0,1]$ 的子空间不是 Banach 空间.

6. 设 $E$ 是 Banach 空间, $E$ 中的点列 $\{x_k\}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \| < \infty$ (此时称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛),证明存在 $x \in E$,使 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ (此时记 $x$ 为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$,即

$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$).

7.(**赋范空间的积**) 设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 与 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 均是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间，在 $E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ 上定义

$$(x_1, y_2) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

其中 $x_1$、$x_2$、$x \in E_1$, $y_1$、$y_2$、$y \in E_2$, $\alpha \in \mathbf{K}$, 则 $E_1 \times E_2$ 按上述运算是线性空间. 对 $(x, y) \in E_1 \times E_2$, 定义

$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2.$$

证明 $(E_1 \times E_2, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，且当 $E_1, E_2$ 均是 Banach 空间时，$E_1 \times E_2$ 也是 Banach 空间.

下面的习题是关于线性空间的几个基本概念与基本结果，后面的内容将会涉及.

8.(**张成子空间**) 设 $A$ 是线性空间 $E$ 的非空子集，称由 $A$ 中元素的有限线性组合的全体所组成的集为由 $A$ 张成的子空间或 $A$ 的线性包，记为 $\mathrm{span}A$, 即 $\mathrm{span}A$ 中的元素形如

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbf{K}, x_k \in A, 1 \leqslant k \leqslant n, n \in \mathbf{N}.$$

证明 spanA 是 $E$ 中包含 $A$ 的最小线性子空间.

9.(**Hamel 基**) 设 $A$ 是线性空间 $E$ 的非空子集，若 $A$ 中任意有限多个元素都是线性无关的，则称 $A$ 是线性无关的. 若 $A$ 是线性无关的，且 $\mathrm{span}A = E$, 则称 $A$ 是 $E$ 的一个 Hamel 基. 此时若 $A$ 是无限集，则称 $E$ 是无穷维的；若 $A$ 是有限集，则称 $E$ 是有限维的，并定义 $E$ 的维数为 $A$ 中所含有的元素个数. 通常用 dimE 表示 $E$ 的维数，并约定当 $E = \{0\}$ 时，$\dim E = 0$. 可以证明任何线性空间都存在 Hamel 基. 证明酉空间 $\mathbf{C}^n$ 的维数是 $n$, 并问当视 $\mathbf{C}^n$ 为实线性空间时，其维数是多少？

10. 证明 $\dim C[a, b] = \infty$, 这里 $a < b$.

11. (**凸集**) 设 $D$ 是线性空间 $E$ 的非空子集，若对任何 $x$、$y \in D$, $\lambda \in [0, 1]$, 恒有

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in D,$$

则称 $D$ 是凸集. 若记

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in [0, 1]\},$$
$$(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in (0, 1)\}.$$

证明：( i ) $D$ 是凸集的充要条件为：对任何 $x$、$y \in D$, $[x, y] \subset D$ (或 $(x, y) \subset$

$D$);

(ⅱ) $D$ 是凸集的充要条件为：$D$ 中任意有限个元素的凸组合都属于 $D$，即对 $D$ 中任意有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \cdots, \lambda_n \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$，恒有 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in D$.

12. (**凸包**) 设 $A$ 是线性空间 $E$ 的非空子集，记 $A$ 中元素的凸组合的全体所成的集合为 $\mathrm{co}(A)$，称之为 $A$ 的凸包. 证明 $\mathrm{co}(A)$ 是包含 $A$ 的最小凸集.

## §2 开集与闭集

我们从上节已经看出，赋范空间中范数的作用与 $\mathbf{R}$ 中绝对值的作用类似. 其实 $\mathbf{R}$ 中由绝对值引出的一系列概念在赋范空间中都可以加以推广，并且赋范空间中许多相关问题的证明实际上是 $\mathbf{R}$ 中相应问题证明的翻版，只不过将绝对值用范数代替而已.

本节首先将赋范空间 $E$ 中的点按 $E$ 中给定的集进行分类，从而引出了内点、外点、极限点等概念，并讨论它们的基本性质. 在此基础上，我们介绍开集，闭集的概念，然后着重研究开集与闭集的性质. 最后我们将介绍稠密子集与可分空间的概念.

以下总设 $E$ 是赋范空间.

### 一、内点、接触点与极限点

对 $x \in E, r > 0$，称 $B(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}$ 为以 $x$ 为心、$r$ 为半径的开球，也称之为 $x$ 的邻域(邻域不一定都是开球)；称 $\widetilde{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leqslant r\}$ 为以 $x$ 为心、$r$ 为半径的闭球，也称之为 $x$ 的闭邻域；称 $S(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| = r\}$ 为以 $x$ 为心、$r$ 为半径的球面. 通常分别称 $B(0,1), \widetilde{B}(0,1), S(0,1)$ 为单位开球、单位闭球与单位球面.

**定义 1** 设 $A$ 是 $E$ 的子集，$x \in E$.

(ⅰ) 若存在 $\varepsilon > 0$，使 $B(x,\varepsilon) \subset A$，即存在 $x$ 的一个邻域含于 $A$，则称 $x$ 是 $A$ 的内点. $A$ 的内点的全体称为 $A$ 的内部，记为 $\mathrm{int}A$ . 显然 $\mathrm{int}A \subset A$ .

(ⅱ) 若对于任意 $\varepsilon > 0$，恒有 $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi$，即 $x$ 的任意邻域内都有 $A$ 中的点，则称 $x$ 是 $A$ 的接触点. $A$ 的接触点的全体称为 $A$ 的闭包，记为 $\overline{A}$ . 显然 $A \subset \overline{A}$.

(ⅲ) 若对于任意 $\varepsilon > 0$，恒有 $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$，即 $x$ 的任意邻域

内都含有 $A$ 中异于 $x$ 的点，则称 $x$ 是 $A$ 的极限点或聚点. $A$ 的极限点的全体称为 $A$ 的导集，记为 $A'$. 显然 $A' \subset \overline{A}$.

(iv) 若 $x \in A \setminus A'$，即存在 $\varepsilon > 0$，使 $B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$，则称 $x$ 是 $A$ 的孤立点.

(v) 若存在 $\epsilon > 0$，使 $B(x,\varepsilon) \cap A = \phi$，则称 $x$ 是 $A$ 的外点. 显然 $x$ 是 $A$ 的外点等价于 $x$ 是 $A^c$ 的内点.

关于上述概念的直观意义，可借助图 1.1 理解，图 1 中集合由阴影区域与单点集 $\{a\}$ 组成.

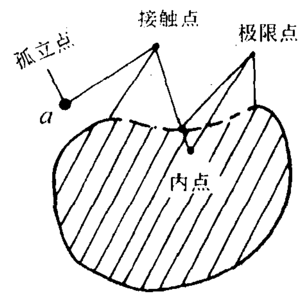


图1.1

由定义 1 易知，若 $A$、$B$ 是 $E$ 的子集，且 $A \subset B$，则

$$\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B, \qquad \overline{A} \subset \overline{B}, \qquad A' \subset B'.$$

**例 1** 在 $\mathbf{R}$ 中，$\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$，$[0,1)' = [0,1]$，$\overline{[0,1)} = [0,1]$，$\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbf{N}\}' = \{0\}$.

**例 2** 在 $\mathbf{R}^2$ 中，取

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x > 0\} \cup \{(2,0)\}$$

则

$$\mathrm{int}A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\},$$
$$\overline{A} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\} \cup \{(2,0)\},$$
$$A' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\},$$

$(0,2)$ 是 $A$ 的孤立点.

由上述两个例子可见，$A$ 与 $A'$ 无必然的包含关系.

**定理 1** **(闭包的性质)**

(i) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ 存在 $\{x_k\} \subset A$，使 $x_k \to x$；

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

(iii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

**证** (i) 设 $x \in \overline{A}$，则对任何 $k \in \mathbf{N}$，$B(x, \frac{1}{k}) \cap A \neq \phi$. 取 $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$，则 $\{x_k\} \subset A$，且 $x_k \to x$. 反之，若存在 $\{x_k\} \subset A$，使 $x_k \to x$，则由接触点的定义可知 $x \in \overline{A}$.

(ii) 由 $A \subset A \cup B$ 知，$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. 同样，$\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$，故

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

另一方面，若 $x \in \overline{A \cup B}$，则存在 $\{x_k\} \subset A \cup B$，使 $x_k \to x$. 显然，$\{x_k\}$

中或有无穷多项含于 $A$，或有无穷多项含于 $B$. 若 $\{x_k\}$ 中有无穷多项含于 $A$，即存在 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_l}\}\subset A$，则由 $\lim\limits_{l\to\infty}x_{k_l}=\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ 知，$x\in\overline{A}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 同理，若 $\{x_k\}$ 中有无穷多项含于 $B$，则 $x\in\overline{B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 总之有 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. 因此

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}.$$

综上述得 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$.

（ⅲ）结论是显然的. #

**注意**：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 一般不成立，如 $\overline{\mathbf{Q}\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})}=\overline{\phi}=\phi$，然而

$$\overline{\mathbf{Q}}\cap\overline{(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})}=\mathbf{R}\cap\mathbf{R}=\mathbf{R}.$$

**定理 2** 设 $A$ 是 $E$ 的子集，$x\in E$，则下述条件等价：

（ⅰ）$x$ 是 $A$ 的极限点；

（ⅱ）存在 $\{x_k\}\subset A$，$x_k\neq x(k\in\mathbf{N})$，使 $x_k\to x$（这就是称 $x$ 为 $A$ 的极限点的缘故）；

（ⅲ）$x$ 的任意邻域内都有 $A$ 中无穷多个点（故称 $x$ 为 $A$ 的聚点）.

**证** （ⅰ）⇒（ⅱ）取 $x_k\in B(x,\frac{1}{k})\cap(A\setminus\{x\})$ 则可.

（ⅱ）⇒（ⅲ）设（ⅱ）成立，则 $\{x_k\}$ 中必有无穷多项互异（否则 $\{x_k\}$ 中只有有限多项互异，于是 $\{x_k\}$ 中必有无穷多项取同一个值，记之为 $\{x_{k_l}\}$，由此得到 $x_{k_1}=\lim\limits_{l\to+\infty}x_{k_l}=\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，与条件 $x_{k_1}\neq x$ 矛盾)，记它们为 $\{x_{k_l}\}$，则对任何 $\varepsilon>0$，由 $x_{k_l}\to x$ 知，存在 $l_0\in\mathbf{N}$，当 $l\geqslant l_0$ 时，$\|x_{k_l}-x\|<\varepsilon$，表明 $B(x,\varepsilon)$ 中含有 $A$ 中无穷多个点 $\{x_{k_l}\mid l\geqslant l_0\}$.

（ⅲ）⇒（ⅰ）由极限点的定义显然. #

## 二、开集与闭集

**定义 2** 设 $A$ 是 $E$ 的非空子集，若 $A$ 中每一个点都是 $A$ 的内点，即 $\mathrm{int}A=A$，则称 $A$ 是开集，并约定 $\phi$ 是开集. 若 $A$ 的接触点都属于 $A$，即 $\overline{A}=A$，则称 $A$ 是闭集.

由开集的定义容易验证下述结果.

**定理 3（开集公理）**

（ⅰ）$\phi$ 与 $E$ 均是开集；

（ⅱ）任意多个开集的并是开集；

（ⅲ）有限多个开集的交是开集.