高中数学

三合一

★ 新课标解读 ★

★ 研究性学习 ★

★ 奥赛起跑线 ★

函数

师大附中专题

湖南师范大学出版社

◆学科主编→王树国

◆本册主编→黄军华

师大附中

丛书编委会

（按姓氏笔划排序）

选择《师大附中专题》的理由

一、师大附中名师打造

全国各师范大学附中，多为国家示范重点学校. 集各师大附中名师，呈现先进的教育理念，科学的教学方法，名师伴读，事半功倍.

师大附中专题，示范中学实力.

二、三位一体知识呈现

师大附中专题在“知识呈现”上独具特色：

①重知识归纳（重点、基点、难点三点归纳）

②重方法导引（精讲、精导、精练三精导学）

③重高考点拨（专题知识高考考点与考向）

三、新课标理念闪亮抢滩

新课程标准将综合实践活动列为中学必修课程，可以预见，在高考及竞赛活动中都将得以体现. 专辟“综合应用与研究性学习”一篇，可谓一大亮点，重点探讨研究性学习与高考的关系，并精选各师大附中典型研究性学习案例，能充分满足教学与备考需要.

四、竞赛高考紧密连线

归纳专题竞赛热点，剖析典型赛题，点拨解题方法，精选示范赛题. 引导学生深化课堂知识结构，熟悉奥赛基本规则，从容应付高考提高题，也为尖子生的脱颖而出提供了“土壤”，可谓深化专题内容又一大特色.

《师大附中专题》丛书策划组

目 录

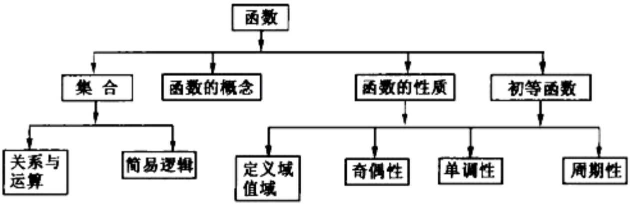
上篇 基础部分

中篇 综合应用与研究性学习

下篇　竞赛点津

上篇　基础部分

专题知识框架



高考考点与要求

(1)理解集合、子集、补集、交集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义；理解四种命题及相互关系；掌握充要条件的意义.

(3)了解映射的概念，在此基础上加深对函数概念的理解.

(4)了解函数的单调性与奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性和奇偶性方法，并能利用函数的性质简化函数图象的绘制过程.

(5)了解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系，会求一些简单函数的反函数.

(6)理解分数指数的概念，掌握有理指数幂的运算性质；掌握指数函数的概念、图象和性质.

(7)理解对数的概念，掌握对数的运算性质；掌握对数函数的概念、图象和性质.

(8)能够运用函数的性质、指数函数、对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

(9)实习作业以函数应用为内容,培养学生应用函数知识解决实际问题的能力.

本专题高考考向

有关函数的试题在每份试卷中都占较大的比例,代数函数在全国高考试题中每年占总分的 24%左右,远超过本单元在教学中所占课时的比例,这是因为函数知识是高中数学最重要的内容,它的应用广泛,贯穿整个高中数学中,并且又是学习高等数学的基础,而注重初等数学与高等数学相衔接的内容历来是高考数学命题的聚焦点,对函数知识与函数思想的考查,不会减弱,只会加强,并通常与不等式、数列、三角、解析几何知识结合起来进行综合考查.

(1)集合的概念和运算.难度不大,只要求概念清楚,会正确表示集合.

(2)函数的概念与函数的定义域、值域、函数解析式.近几年来多在应用问题中对函数解析式与定义域进行考查,要求考生概括题意建立数学模型,写出函数解析式,这种注重把实际问题转化为数学问题的能力是考查的重点方向.

(3)函数性质主要是单调性、奇偶性的考查,有时也涉及周期性.要求考生会利用单调性比较大小,求函数最值与解不等式,并要求会用定义证明函数的单调性.

(4)反函数.要求掌握反函数的求法,反函数的定义域、值域与原函数的定义域、值域的关系,它们的图象之间的关系.不作过高要求.

(5)指数函数和对数函数.要求熟练掌握它们的性质与图象,还要掌握图象的平移变换和对称变换.

(6)指数方程和对数方程.除了应掌握一般常见指数方程、对数方程的解法,还应重视含参数的指、对数方程的求解,以及用数形结合的方法判断方程解的问题.用数形结合的思想与用分类讨论的思想解题在高考中出现的频率很高,要求考生对这些思想要真正理解,并能灵活运用一次函数和二次函数.这些函数中的基础知识,在高考试卷中经常以综合试题形式出现,应予以重视.树立函数与方程的观点是对每个中学生的基本要求,缺乏函数意识,在高考中是绝无成功希望的.在学习函数时,必须学会如何用函数思想分析和解决问题,努力提高运用函数思想的自觉性.

第一讲
集合与简易逻辑

三点归纳

◆基点　集合与命题的基本概念.
◆重点　集合之间的关系及运算.
◆难点　命题的四种形式及充要条件.

三精导学

◆精讲

1. 集合的元素具有的三种特性

(1)确定性:任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素.

(2)互异性:同一集合中任何两个不同的元素都是不同的对象,相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:集合只与元素本身有关,而与元素出现的位置无关.

2. 集合的表示法

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内的表示集合的方法.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内的表示集合的方法.

描述法的语言形式有:文字语言、符号语言、图形语言.

3. 一些特定的数集符号或表示法

整数集 **Z**,有理数集 **Q**,实数集 **R**,复数集 **C**,自然数集 **N**,正整数集 $\mathbf{N}^+$.

4. 集合的运算

(1)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.

(2)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的并

集,记为 $A\cup B$.

(3)补集:在全集 I 中去掉集合 A 的全部元素,所有剩下元素组成的集合称为 A 的补集,记为 $\complement_I A$.

5. 命题

可以判断真假的语句叫做命题.命题可分为简单命题与复合命题两种.不含逻辑联结词的命题叫做简单命题;由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.复合命题的基本形式是:p 或 q;p 且 q;非 p.

6. 命题有假命题和真命题.对于简单命题,则较易判断其真假;对于复合命题的真假的判断可概括为:

(1)"非 p"形式的复合命题的真假与 p 的真假相反;

(2)"p 且 q"形式的复合命题,当 p 与 q 同为真时为真,其他情况时为假;

(3)"p 或 q"形式复合命题,当 p 与 q 同为假时为假,其他情况为真.

7. 关于逆命题、否命题与逆否命题,也可以如下表述:

(1)交换原命题的条件和结论,所得的命题是逆命题;

(2)同时否定原命题的条件和结论,所得的命题是否命题;

(3)交换原命题的条件和结论,并且同时否定,所得的命题是逆否命题.

8. 用$\neg p$和$\neg q$分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

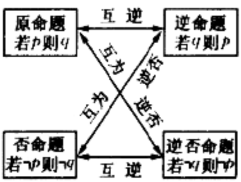
原命题:若 p 则 q;

逆命题:若 q 则 p;

否命题:若$\neg p$ 则$\neg q$;

逆否命题:若$\neg q$ 则$\neg p$.

9. 四种命题之间的相互关系,如下表:



一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三条关系:

(1)原命题为真,它的逆命题不一定为真;

(2)原命题为真,它的否命题不一定为真;

(3)两个互逆的命题同真同假.

10. 反证法是证明数学问题的一种重要方法,对于结论是否定形式的命题,或题中涉及到"至多"、"至少"、"惟一"等时,可以考虑采用反证法给出其证明.反证法证题的基本步骤是:

第一步：假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

第二步：从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

第三步：由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

11. 几个符号的理解与认识：

"$\Rightarrow$"叫做推断符号，"$p\Rightarrow q$"表示"若 p 则 q"，"$p\Rightarrow q$"也可以写为"$q\Leftarrow p$"；"$p\nRightarrow q$"表示由 p 推不出 q；"$\Leftrightarrow$"叫做等价符号，"$p\Leftrightarrow q$"表示 p 等价于 q，它包含着"$p\Rightarrow q$"且"$q\Rightarrow p$".

12. 充要条件的判断是一个重点，同时也是一个难点，充要条件的判断与判断"若 p 则 q"形式命题的真假相关.

"$p\Rightarrow q$"，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

"$p\Leftrightarrow q$"，p 是 q 的充要条件.

1.1 集合的概念

题型1 对集合的理解性问题

◆精导

例1 已知 $P=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　　).

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $[1,+\infty)$

分析 此题容易误选为A，认为 $P\cap Q$ 是求抛物线与直线的交点. 事实上，P、Q 中的元素代表是 y，y 是由 x^2+1 $(x\in\mathbf{R})$ 及 $x+1$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值构成，P、Q 实际上分别是函数 $y=x^2+1$ $(x\in\mathbf{R})$ 与函数 $y=x+1$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域.

解 $\because$ $P=\{y|y\geqslant 1\}$，$Q=\{y|y\in\mathbf{R}\}$，

$\therefore$ $P\cap Q=P$，因此选D.

例2 设集合 $A=\{y|y=x^2+ax+2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=x^2+ax+2,x\in\mathbf{R}\}$，试求出 $a=-2$ 时的集合 A 与 B.

分析 代表元素是决定一个集合的完全标志，尽管 A 与 B 都是由表达式 $y=x^2+ax+2$ 刻画的，但由于代表元素不同，所以它们是不同的集合. 集合 A 表示二次函数 $y=x^2+ax+2$ 的值域，B 表示抛物线 $y=x^2+ax+2$ 上的点集.

解 当 $a=-2$ 时，

$\because$ $y=x^2+ax+2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geqslant 1$，

$\therefore$ $A=\{y|y\geqslant 1\}$.

$\because$ $B=\{(x,y)|y=x^2-2x+2,y\geqslant 1\}$，

又由 $x^2-2x+2-y=0$，得

$x=1\pm\sqrt{y-1}$.

$\therefore\ B=\{(1+\sqrt{y-1},y)\mid y\geqslant 1\}\cup\{(1-\sqrt{y-1},y)\mid y\geqslant 1\}$.

例　设 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant a\}$，如果 $\{y\mid y=x+1,x\in A\}=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$，求 a 的值.

分析　易知 $\{y\mid y=x+1,x\in A\}=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1+a\}$，对于集合 $\{y\mid y=x^2,x\in A\}$，由于 $y=x^2$ 的单调区间由 a 确定，故要对 a 进行讨论.

解　令 $M=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$，

当 $-1<a<0$ 时，$M=[a^2,1]$；

当 $0\leqslant a<1$ 时，$M=[0,1]$；

当 $a\geqslant 1$ 时，$M=[0,a^2]$.

由此，可得　$a=0$ 或 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题型　集合元素的互异性

例　设集合 $A=\{k^2-k,2k\}$，求实数 k 的取值范围.

解　根据集合中元素的互异性，有 $k^2-k\neq 2k$，解得 $k\neq 0,k\neq 3$.

$\therefore$　实数 k 的取值范围是 $\{k\mid k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq 0,k\neq 3\}$.

例　已知集合 $M=\{a,ab,\lg(ab)\}$，$N=\{0,|a|,b\}$，且 $M=N$，求 a,b 的值.

分析　由 $M=N$，可以推出 M 中必有一个元素是"0"，在 $a,ab,\lg(ab)$ 中可以判断出 $\lg(ab)=0$，于是 $ab=1$，从而再求 a,b 的值.

解　因 $M=N$，$N=\{0,|a|,b\}$，则 M 中必有一个元素是"0".

若 $a=0$，则 $ab=0$，$\lg(ab)$ 无意义，于是 $a\neq 0$.

同样，可以推出　$ab\neq 0$.

从而，只能是　$\lg(ab)=0$，即　$ab=1$.

在 N 中，若 $b=1$，又 $ab=1$，则 $a=1$，$|a|=1$. 这与集合中元素的互异性矛盾，故 $b\neq 1$.

若 $|a|=1$，则 $a=\pm 1$，由上知 $a\neq 1$，则 $a=-1$. 当 $a=-1$ 时，由 $ab=1$，得 $b=-1$，$|a|=1$. 这时 $N=\{0,1,-1\}$，$M=\{-1,1,0\}$，满足 $M=N$.

因此，$a=-1$，$b=-1$.

点评　[illegible]

例　已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，求

$(x+\dfrac{1}{y})+(x^2+\dfrac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2003}+\dfrac{1}{y^{2003}})$ 的值.

分析　$\because$　$xy>0$，$\therefore$　$\lg xy=0$. $\therefore$　$xy=1$. 从而可求出 x,y.

解　$\because$　$A=B$ 且 $xy>0$，$\therefore$　$\lg(xy)=0$，$\therefore$　$xy=1$.

$\therefore$　$|x|=1$ 或 $y=1$.

而 $y=1$ 时，A 中有两个相同元素，故只能是 $|x|=1$.

而 $x=1$ 时，$y=1$，A 中同样有相同元素，故只能是 $x=-1,y=-1$.

$\therefore\ A=\{-1,0,1\}$.

$\therefore\ (x+\frac{1}{y})+(x^2-\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}})=-2$.

题型 3　元素与集合的从属关系

例 7　设 a,b 是整数，集合 $E=\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但点 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，求 a,b 的值.

分析　$(2,1)\in E$，$(2,1)$ 是不等式 $(x-a)^2+3b\leqslant 6y$ 的解；而点 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，易知 $(1,0)$，$(3,2)$ 是不等式 $(x-a)^2+3b>6y$ 的解.

解　$\because\ (2,1)\in E$，$\therefore\ (2-a)^2+3b\leqslant 6$.　①

又 $\because\ (1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，

$\therefore\ (1-a)^2+3b>0$，　②

$(3-a)^2+3b>12$.　③

由①、②，得　$6-(2-a)^2>-(1-a)^2\Rightarrow 2a+3>0$，

$\therefore\ a>-\frac{3}{2}$.

类似地，由①、③，得　$a<-\frac{1}{2}$.

又 $\because\ a,b$ 为整数，

$\therefore\ a=-1$，代入①、②，得　$-4\leqslant 3b\leqslant -3\Rightarrow b=-1$.

综上所述，$a=-1,b=-1$.

例 8　用列举法表示下列集合：

(1)$A=\{x\mid x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|},a、b$ 为非零实数$\}$；

(2)$A=\{x\mid \frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{N}^*\}$.

分析　(1)注意到 $\frac{|a|}{a}$ 与 $\frac{|b|}{b}$ 只能为 1 或 -1 这两个值；(2)由于 $3-x$ 是 6 的约数，故 $3-x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\Rightarrow x=2,4,1,5,6,0,-3,9$. 由 $x\in\mathbf{N}^*$，这样可得出 x.

解　(1)$A=\{-2,0,2\}$；

(2)$A=\{1,2,4,5,6,9\}$.

◆**精练**

双基训练

一、选择题

1. 下列各式中正确的是(　　).

A. $0=\varnothing$　　B. $\varnothing\subseteq\{0\}$　　C. $\varnothing=\{0\}$　　D. $0\in\varnothing$

2. 集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，又 $a\in A$，$b\in B$，则有(　　).

A. $a+b\in A$　　B. $a+b\in B$

C. $a+b\in C$　　D. $a+b$ 不属于 A、B、C 中任何一个

3. 已知集合 $M=\{x\mid x=2a+a^2+1,a\in\mathbf{R}\}$；$N=\{y\mid y=b^2-4b+6,b\in\mathbf{R}\}$，则集合 M、N 之间的关系是(　　).

A. $M\subset N$　　B. $M\supset N$　　C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

4. 同时满足(i)$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，(ii)满足 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有(　　).

A. 16 个　　B. 15 个　　C. 7 个　　D. 6 个

二、填空题

5. $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\notin Q\}$，下列实数：$-\frac{1}{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，π，$-0.101010\cdots$，$3^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{-2}$，$\cos 60^\circ$中，集合 A 中的元素是________.

6. 设$\frac{1}{2}\in\{x\mid x^2-ax-\frac{5}{2}=0\}$，则集合$\{x\mid x^2-\frac{19}{2}x-a=0\}$中所有元素的积为________.

7. 已知 $A=\{x,xy,\lg xy\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，则 x^2+y^2 之值为________.

8. 设 x、y、z 都是非零实数，试用列举法把 $M=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的可能取值所组成的集合表示出来是________.

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素；

(2)若 A 至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

10. 设 $A=\{x\mid x=a+b\sqrt{3},a,b\in\mathbf{Z}\}$，若 $x=7+b\sqrt{3}\in A$，且$\frac{1}{x}\in A$，求 b.

答案与提示

一、选择题

1. B　2. B　3. A　4. C

二、填空题

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$，π，$3^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{-2}$

6. $-\frac{9}{2}$　7. 2　8. $\{-3,-1,1,5\}$

三、解答题

9.(1)为使方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根，须 $a=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$；或 $a\neq 0$ 时，$\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，解得 $x=-1$.

(2)A 中只有一个元素时，已求得 $a=0$ 或 $a=1$；A 中没有元素时，$a\neq 0$，由 $\Delta<0$，得 $a>1$，故所求 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant 1\}\cup\{0\}$.

10. 解：$\frac{1}{x}=\frac{7}{49-3b^2}+\frac{-b}{49-3b^2}\sqrt{3}$

$\because$ $x\in A$，$\frac{1}{x}\in A$，必有 $\frac{7}{49-3b^2}$，$\frac{-b^2}{49-3b^2}$ 与 b 都为整数，因 7 为质数，必须 $49-3b^2=\pm 1$ 或 ± 7，在这四个方程中，当且仅当 $49-3b^2=1$ 时，方程有整数解 $b=\pm 4$.

当 $b=\pm 4$ 时，$x=7\pm 4\sqrt{3}$，$\frac{1}{x}=7\mp 4\sqrt{3}$，均为 A 的元素，故 $b=\pm 4$ 为所求.

1.2 集合的运算

题型1 集合与集合之间的包含关系问题

◆精导

例1 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\supset N$　　C. $M\subset N$　　D. $M\not\subset N$

解 分别令 $k=-1,0,1,2,3,\cdots$ 得

$M=\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\}$，

$N=\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\}$.

不难得知 $M\subset N$. 选 C.

点评 事实上，M 中的元素是由首项为 $\frac{\pi}{4}$，公差分别为 $\frac{\pi}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{2}$ 的两串等差数列所组成，而 N 中的元素是由首项为 $\frac{\pi}{2}$，公差分别为 $\frac{\pi}{4}$ 与 $-\frac{\pi}{4}$ 的两串等差数列组成，由此也能得 $M\subset N$.

例2 设全集 $I=R$，集合 $A=\{x|(x-1)(x-3)\leqslant 0\}$，$B=\{x|(x-1)(x-a)<0\}$，且 $A\supseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解 解不等式 $(x-1)(x-3)\leqslant 0$，得 $1\leqslant x\leqslant 3$，故 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$. 当 $a<1$ 时，$B=\{x|a<x<1\}$，不可能满足 $A\supseteq B$；当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$，满足 $A\supseteq B$；当 $a>1$ 时，$B=\{x|1<x<a\}$，若满足 $A\supseteq B$，则 $1<a\leqslant 3$. 综上所述，$1\leqslant a\leqslant 3$.

点评 这类问题最好画数轴进行分析.

例3 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}^*\}$，试确定 A、B 之间的包含关系.

分析 理解集合 A 与 B 的含义：A 是由所有正整数平方加 1 构成的集合；又 $b=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$，这表明 B 也是由整数的平方加 1 构成的集合，只是 $(k-2)^2$ 可以是非负整数的平方.

解 $\because\ b=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$，

$\therefore\ B=\{b\mid b=k^2-4k+5, k\in\mathbf{N}^*\}$

$\quad=\{b\mid b=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$.

$\therefore\ A\subseteq B$. 并注意到 $1\in B$ 但 $1\notin A$，$\therefore\ A\subsetneqq B$.

例 已知不等式 $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ 的解集为 A，不等式 $x^2-2x-a^4+1\geqslant0$ 的解集为 B，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解 由 $\log_x(5x^2-8x+3)>2$，得

$$\begin{cases}x>1\\5x^2-8x+3>x^2\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}0<x<1\\0<5x^2-8x+3<x^2\end{cases}\Rightarrow x>\frac{3}{2}\text{ 或 }\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5},$$

$\therefore\ A=\{x\mid x>\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}\}$.

由 $x^2-2x-a^4+1\geqslant0$，解得 $x\leqslant1-a^2$ 或 $x\geqslant1+a^2$.

$\therefore\ B=\{x\mid x\leqslant1-a^2$ 或 $x\geqslant1+a^2\}$.

于是，要使 $A\subseteq B$，必须 $\begin{cases}1-a^2\geqslant\frac{3}{5},\\1+a^2\leqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$ （用数轴分析）

解之，得 $-\frac{\sqrt{10}}{5}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}}{5}$.

题型二 集合之间的交、并、补运算

例 满足 $X\cup Y=\{1,2\}$ 的集合 X,Y 的所有可能的解有多少组？

解 $\begin{cases}X=\varnothing,\\Y=\{1,2\};\end{cases}$ $\begin{cases}X=\{1\},\\Y=\{2\}\text{ 或 }\{1,2\};\end{cases}$

$\begin{cases}X=\{2\},\\Y=\{1\}\text{ 或 }\{1,2\};\end{cases}$ $\begin{cases}X=\{1,2\},\\Y=\varnothing\text{ 或 }\{1\},\text{ 或 }\{2\},\text{ 或 }\{1,2\}.\end{cases}$

故所有可能的解有 9 组.

例 已知集合 $A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

分析 由于空集是任何集合的子集，我们应对 B 是否为空集分别讨论.

解 由 $A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant0\}$，得

$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant5\}$.

对 $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，$B\subseteq A$ 可进行如下分类：

(1) 若 $B\neq\varnothing$，则 $m+1\leqslant 2m-1\Rightarrow m\geqslant2$.

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant m\leqslant 3.$$

(2)若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1\Leftrightarrow m<2$.

故所求 m 的取值范围是 $\{m|m\leqslant 3\}$.

例7 已知 $A=\{x||x-1|<c\}$,$B=\{x||x-3|>4\}$,且 $A\cap B=\varnothing$,求 c 的取值范围.

分析 易知 $B=\{x|x>7$ 或 $x<-1\}$,现在是要将 A 用 c 表达为一个更明了的集合形式,为此应对 c 讨论.

解 当 $c\leqslant 0$ 时,$A=\varnothing$,此时,当然有 $A\cap B=\varnothing$.

当 $c>0$ 时,$A=\{x|1-c<x<1+c\}$,

$$\therefore\quad A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}1-c\geqslant -1\\ 1+c\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow 0<c\leqslant 2.$$

综上,可得 c 的取值范围为 $\{c|c\leqslant 2\}$.

例8 已知集合 $A=\{x|x^2+px+q=0\}$,$B=\{x|qx^2+px+1=0\}$,同时满足① $A\cap B\neq\varnothing$,② $A\cap \complement_I B=\{-2\}$($p,q$ 均为不等于 0 的实数),求 p、q 之值.

分析 易知 -2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根,且注意到 $x^2+px+q=0$ 与 $qx^2+px+1=0$ 的系数是倒序的,故根互为倒数.

解 设 $x_0\in A$,则有 $x_0^2+px_0+q=0$,两边同除以 x_0^2,得 $1+p\cdot\frac{1}{x_0}+q\cdot\frac{1}{x_0^2}=0$. 知 $\frac{1}{x_0}\in B$. $\therefore$ 集合 A、B 中元素互为倒数. 由 $A\cap B\neq\varnothing$,知一定有 $x_0\in A$,使得 $\frac{1}{x_0}\in B$,且 $x_0=\frac{1}{x_0}$,$\therefore$ $x_0=\pm 1$. 又 $A\cap\complement_I B=\{-2\}$,$\therefore$ $-2\in A$,$\therefore$ $A=\{1,-2\}$ 或 $A=\{-1,-2\}$. 由此,得 $B=\{1,-\frac{1}{2}\}$ 或 $B=\{-1,-\frac{1}{2}\}$. 根据韦达定理,

$$\begin{cases}1+(-2)=-p,\\ 1\times(-2)=q;\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}-1+(-2)=-p,\\ (-1)\times(-2)=q.\end{cases}$$

$$得\quad\begin{cases}p=1,\\ q=-2;\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}p=3,\\ q=2.\end{cases}$$

例9 设 A 是数集,满足 $a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in A$ 且 $1\notin A$.

(1)若 $2\in A$,求 A;

(2)若 A 是一元集合,求 A;

(3)证明:若 $a\in A$,则 $1-\frac{1}{a}\in A$.

解 (1)$2\in A\Rightarrow\frac{1}{1-2}=-1\in A\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.