高等代数习题解

（修订版）

上册

杨子胥　编

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

高等代数习题解

（修订版）

上　　册

杨子胥　　编

山东科学技术出版社

高等代数习题解(修订版)
上册
杨子胥　编

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)2065109
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)2020432
印刷者:济南新华印刷厂
地址:济南市历山路 146 号
邮编:250014　电话:(0531)2962965

开本: 787mm × 1092mm 1/32
印张: 19.25
字数: 410 千
版次: 2003 年 3 月第 2 版第 7 次印刷
印数: 71001 - 76000

ISBN 7 - 5331 - 2923 - 7　　O·93
定价: 26.00 元

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题解．上册/杨子胥编．—修订版．—济南：山东科学技术出版社，2001.9(2003.3 重印)
ISBN 7-5331-2923-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．高等代数—高等学校—解题　Ⅳ．O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050191 号

内 容 提 要

本书从多项式、行列式、线性方程组、矩阵等方面，精选了 618 道典型性较强的习题，做了全面详细的解答，并注意了一题多解。每节习题之前都对本节主要定义、定理和重要结论作了简要的概述。内容丰富，重点突出，解答明确，尤其便于自学。可供高等院校师生、中学教师和广大数学爱好者以及有志报考研究生的人员学习参考。

修订版前言

自《高等代数习题解》出版以来，我不断收到来自全国各地的热情洋溢的信，其中也有提出意见和建议的信件，对此，我表示最真挚的感谢！

本习题解长期缺书，很多读者特别是一些考研究生的同学，纷纷给出版社和我本人写信查询此书，故现决定修订再版。这次修订版对原版做了较大的改动，主要有：

1. 去掉了有关置换、实根近似计算以及群、环、域基本概念（原版第十三章）等方面的全部题目；

2. 去掉了一些重复的题、个别错题以及一些证明冗长且无甚价值的题；另外，纠正了一些错误，并对大部分题目在符号、用语等方面都做了不同程度的修订；

3. 增补了一大部分题目，特别是行列式、线性方程组、矩阵以及矩阵的相似和对角化等方面的题目。因此，在原版基础上调整和新增加了以下诸节：向量组的极大无关组与秩、矩阵的秩初步、齐次线性方程组及其基础解系、矩阵的秩、简单矩阵方程、矩阵的特征根与特征向量、相似矩阵与矩阵的对角化以及实对称矩阵的正交相似等等；

4. 为了眉目清楚便于查找题目，每节分为两大部分：提要（主要给出本节所用到的基本定义和定理）；题解。

本书仍分上下两册，各包含六章，共 1 112 题。其中上册 618 题，下册 494 题。

本书可作为知识青年自学、中学教师进修、大专院校师生

学习和教学参考之用。特别，可作为有志考研究生的同学学习和参考。事实上，不少人反映，他们考研究生甚至博士生的高等代数、线性代数或矩阵论的课，都是只参考了本习题解。我相信，只要读者认真阅读和钻研，他们会从本习题解中获得他们所需要的有益的东西。

书中错误和疏漏之处恳请读者批评指正。

杨子胥

2001 年 6 月

目　　录

第一章　数域上的一元多项式

§1·1　数环和数域

提　　要

1° **定义**　如果非空数集 R 中任二数的和、差、积均仍属于 R,则称 R 是一个数环.

2° **定义**　设 F 是至少包含两个数的数集.如果 F 中任二数的和、差、积、商(除数不等于零)均仍属于 F,则称 F 是一个数域.

3° **定理**　任何数域都包含有理数域.

题　　解

【1】证明:若数环 $R\neq 0$,则 R 必为一个无限数集.

证　因为数环 $R\neq 0$,则 R 必含有不等于零的数 a.于是

$$2a=a+a,\quad 3a=a+2a,\quad \cdots$$

都属于 R,且互不相等.因若 $ma=na$,则由于 $a\neq 0$,故 $m=n$.从而 R 必含有无穷多个数.

【2】有没有不含非零整数的数环?如果有,举出实例;如果没有,加以证明.

解　有这样的数环.例如:

$$R=\{a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_n\pi^n \mid a_i\in Z,\ n\in N\}$$

其中 Z 为整数集, N 为正整数集, π 为圆周率.

R 显然作成一个数环, 而且 R 不包含不等于零的整数. 若不然, 设 R 含有非零整数 a, 则令

$$a = a_1\pi + \cdots + a_2\pi^2 + a_n\pi^n,$$

于是 π 为整系数方程

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x_2 + a_1 x - a = 0$$

的根, 这与 π 是超越数相矛盾. 故数环 R 不包含非零整数.

【3】设 F 是至少含有两个数的数集. 证明: 如果 F 中任二数的差与商(除数不为零)仍属于 F, 则 F 必为数域.

证 设 a, b 为 F 中任二数. 由于 F 中任二数的差与商仍属于 F, 故

$$a - a = 0 \in F,$$

且当 $b \neq 0$ 时,

$$\frac{b}{b} = 1 \in F, \quad \frac{1}{b} \in F.$$

于是

$$0 - b = -b, \quad a + b = a - (-b), \quad a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$$

都属于 F. 即 F 对加、乘也是封闭的, 从而 F 作成一个数域.

【4】设 F 是至少含有两个数的数集, 且 F 对加法与乘法封闭. 证明: 如果对 F 中任意数 a, $-a$ 也属于 F; 而且当 $a \neq 0$ 时, a^{-1} 也属于 F, 则 F 必为一个数域.

证 只需证 F 对减法与除法也封闭即可.

对于 $a, b \in F$, 由于 $-b \in F$, 则

$$a - b = a + (-b) \in F;$$

当 $a \neq 0$ 时,由于 $a^{-1} \in F$,而 F 对乘法封闭,故

$$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} \in F.$$

即 F 对减法与除法也封闭,故 F 作成数域 .

【5】下列各数集是否作成数环或数域?

1) $F_1 = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b$ 为任意有理数$\}$;

2) $F_2 = \{a + bi \mid a, b$ 为任意有理数$\}$;

3) $F_3 = \{a + bi \mid a$ 为任意有理数, b 为任意实数$\}$;

4) $F_4 = \{a + bi \mid a, b$ 为任意整数$\}$;

5) $F_5 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b$ 为任意有理数$\}$;

6) $F_6 = \{\frac{2n}{2n+1} \mid n$ 为任意整数$\}$;

7) $F_7 = \{a\sqrt{5} \mid a$ 为任意有理数$\}$;

8) $F_8 = \{$全体非负有理数$\}$.

解 1) F_1 作成数环,也作成数域:因为

首先,$0 \in F_1$, $1 \in F_1$.

其次,设

$$a + b\sqrt{3}i \in F_1, \quad c + b\sqrt{3}i \in F_1$$

为任意两个数,因为 a, b, c, d 都是有理数,所以对 a, b, c, d 进行加、减、乘、除(除数不为零)后仍为有理数,故

$$(a + b\sqrt{3}i) \pm (c + d\sqrt{3}i) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{3}i \in F_1,$$

$$(a + b\sqrt{3}i) \cdot (c + d\sqrt{3}i) = (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}i \in F_1,$$

当 $a + b\sqrt{3}i \neq 0$ 时,有

$$\frac{c + d\sqrt{3}i}{a + b\sqrt{3}i} = \frac{(c + d\sqrt{3}i) \cdot (a - b\sqrt{3}i)}{(a + b\sqrt{3}i) \cdot (a - b\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{ac+3bd}{a^2+3b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+3b^2}\sqrt{3}\,i \in F_1,$$

即 F_1 对加、减、乘、除是封闭的，所以 F_1 作成数环，也作成数域．

2）F_2 作成数环，也作成数域，验算同 1）．

3）F_3 既不作成数环，也不作成数域．因为 $0+1\cdot i$，$1+\sqrt{2}\,i \in F_3$，但是，由于$\sqrt{2}$是无理数，故

$$i\cdot(1+\sqrt{2}\,i) = -\sqrt{2}+1\cdot i = \notin F_3.$$

即 F_3 对乘法不封闭．

4）F_4 是数环，但不是数域．是数环的验算同 1）．又由于 $-1+3i$，$2i \in F_4$，但是

$$\frac{-1+3i}{2i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \notin F_4.$$

即 F_4 对除法不封闭，故不能作成数域．

5）F_5 既不作成数域，也不作成数环：因为对乘法不封闭．例如，$\sqrt[3]{2} \in F_5$，但是

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \notin F_5.$$

事实上，若$\sqrt[3]{4} \in F_5$，设

$$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}, \quad a,b \text{ 为有理数}.$$

则 a 与 b 都不能是零，且

$$a = \sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b) = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b)(\sqrt[3]{2}+b)}{\sqrt[3]{2}+b}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-b^2)}{\sqrt[3]{2}+b} = \frac{2-b^2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+b}.$$

或

$$2 - ab = (a+b^2)\sqrt[3]{2}. \tag{1}$$

但 $a+b^2\neq 0$,因若 $a+b^2=0$,则 $2-ab=0$. 由此可得

$$b=-\sqrt[3]{2}.$$

这与 b 是有理数相矛盾,故 $a+b^2\neq 0$. 于是由(1)得

$$\frac{2-ab}{a+b^2}=\sqrt[3]{2}.$$

即有理数等于无理数,这是矛盾的 . 故$\sqrt[3]{4}\notin F_5$.

6) F_6 既不作成数域,也不作成数环,因为对加法不封闭 .例如,

$\frac{2}{3},\frac{4}{5}\in F_6$,但是$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}\notin F_6$(因为分母减分子不等于 1).

7) F_7 既不作成数域,也不作成数环,因为对乘法不封闭 .例如,

$$\sqrt{5}\in F_7,\quad \text{但是},\sqrt{5}\sqrt{5}=5\notin F_7.$$

8) F_8 虽对加、乘、除三种运算都封闭,但对减法不封闭,故不能作成数环 .

【 6 】 证明:一切形如$\frac{m}{2^n}$的有理数作成的集合 R(其中 m 为任意整数, n 为任意非负整数)是一个数环 . 问: R 是否作成数域?

证 任取 $a,b\in R$,且令

$$a=\frac{m}{2^n},\quad b=\frac{s}{2^t}.$$

不妨设 $n\geqslant t$,则

$$a\pm b=\frac{m}{2^n}\pm\frac{s}{2^t}=\frac{m\pm 2^{n-1}s}{2^n}\in R,$$

$$ab=\frac{m}{2^n}\cdot\frac{s}{2^t}\cdot\frac{ms}{2^{n-1}}\in R.$$

故 R 作成数环 .

但 R 不作成数域，例如

$$\frac{3}{2},\frac{5}{2}\in R,\quad 但\frac{3}{2}\div\frac{5}{2}=\frac{3}{5}\notin R,$$

也就是说$\frac{3}{5}$不能表示成$\frac{m}{2^n}$的形状，即 R 对除法不封闭 .

【7】设 m 是任意给定的正有理数 . 证明:

1）一切形如 $x+y\sqrt{m}$（x,y 为任意有理数）的数构成的集合 F 作成一个数域；

2）F 是有理数域的充分与必要条件是，m 为一个有理数的完全平方 .

证 1）F 对加、减、乘三种运算封闭是显然的 . 下面证明对除法也封闭 .

在 F 中任取 $\alpha=a+b\sqrt{m}\neq0$. 若 $b=0$，则 $\alpha=a\neq0$，于是 $\alpha^{-1}=a^{-1}\in F$；若 $b\neq0$，则当 $a-b\sqrt{m}=0$ 时，有

$$\sqrt{m}=\frac{a}{b}.$$

从而一切形如 $x+y\sqrt{m}=x+y\cdot\frac{a}{b}$ 的数就是全体有理数，即此时 F 为有理数域 .

当 $a-b\sqrt{m}\neq0$ 时，有

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{a-b\sqrt{m}}{(a+b\sqrt{m})(a-b\sqrt{m})}=\frac{a-b\sqrt{m}}{a^2-b^2m}\in F,$$

故可知 F 对除法封闭，F 作成数域 .

2）由于$\sqrt{m}\in F$，因此，若 F 是有理数域，则$\sqrt{m}$为有理

数．从而 m 为有理数的一个完全平方数．

反之，若 m 是有理数的一个完全平方数，则 $\sqrt{m}$ 是一个有理数，从而 F 为有理数域．

【8】设 $F=\left\{a+b\sqrt{m}\mid a,b,\text{为有理数},\ m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$．证明：$F$ 作成一个数域．

证　证法Ⅰ：

F 对加、减法封闭是显然的，下面证明对乘、除法也封闭．

首先，有

$$\sqrt{m}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1=m-1.$$

即 $m=1+\sqrt{m}$．于是

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{m})\cdot(c+d\sqrt{m})\\=&ac+bdm+(ad+bc)\sqrt{m}\\=&ac+bd(1+\sqrt{m})+(ad+bc)\sqrt{m}\\=&(ac+bd)+(ad+bc+bd)\sqrt{m}\in F,\end{aligned}$$

即 F 对乘法封闭．

设 $c+d\sqrt{m}\neq 0$，即 c,d 是不全为零的有理数．若有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}}=x+y\sqrt{m},\quad x,y\text{ 为有理数}.\tag{1}$$

则根据 $m=1+\sqrt{m}$ 可得

$$\begin{aligned}1&=(c+d\sqrt{m})(x+y\sqrt{m})\\&=(c-d)x-cy+(dx+cy+dy)m,\end{aligned}$$

从而 $(d-c)x+cy+1=[dx+(c+d)y]m$．但 m 是无理

数，故

$$\begin{cases} dx+(c+d)y=0 \\ (d-c)x+cy=-1. \end{cases}$$

但

$$D=\begin{vmatrix} d & c+d \\ d-c & c \end{vmatrix}=cd+c^2-d^2\neq 0,$$

因若 $D=0$，则由一元二次方程求根公式知，

$$c=\frac{-d\pm d\sqrt{5}}{2},$$

这与 c,d 是不全为零的有理数矛盾．于是得

$$x=\frac{c+d}{D},\quad y=\frac{-d}{D}.$$

将其代入(1)，并经验算有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}}=\frac{c+d}{D}-\frac{d}{D}\sqrt{m}\in F.$$

由此可知 F 对除法也封闭，故 F 作成数域．

证法Ⅱ：

由 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 可得 $\sqrt{m}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，从而

$$a+b\sqrt{m}=a+b\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\left(a+\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}\sqrt{5}.$$

令 $a+\dfrac{b}{2}=c$，$\dfrac{b}{2}=d$，则 c,d 为有理数．

反之，如果 c,d 为任意有理数，则 a,b 也是有理数．于是

$$\begin{aligned} F&=\{a+b\sqrt{m}\mid a,b\text{为有理数}\}\\ &=\{c+d\sqrt{5}\mid c,d\text{为有理数}\}, \end{aligned}$$