桂壮红皮书

新课标精析巧练

义务教育同步系列——

根据义务教育课程标准实验教科书编写

丛书主编／陈桂壮

数学 北师大版

八年级（初二）·上

桂壮红皮书系列丛书 GUIZHUANGHONGPISHU

北京大学出版社

桂壮红皮书·义务教育系列丛书

新课标精析巧练

八年级（初二）数学

北师大版·上

丛书主编　陈桂壮

本册主编　南秀全

编　　委　肖一鸣　付东峰　南　山　刘正明

张胜海　李　可　肖易朋　张　静

北京大学出版社

内容提要

本书以教学部义务教育最新课程标准为依据、以北师大版八年级(初二年级)最新教材为蓝本进行编写,与2003年秋八年级(初二年级)教学完全同步。

全书的最大特色是遵循学生学习的心理特点,打破陈旧过时的学习方式,打破学科本位、结构单一的教辅形式;突出人文知识性、探究开放性和学习主动性。培养学生积极良好的情感和与时俱进的价值观。加强综合评价,促进教学与评价的统一、教学与学生的全面发展相结合。

在内容体例方面,与教材章节知识完全同步,分小节和单元两个方面编写 设置"课标要求"、"知能精华"、"典题精析"、"知能巧练"、"探究创新"、"课程资源开发"等栏目,做到知识讲解与过关训练相结合。所有试题全部新编,材料鲜活、典型规范,并配有准确的答案和较详细的解题提示。

图书在版编目(CIP)数据

新课标精析巧练.数学(上下).八年级(初二):北师大版/南秀全编.—北京:北京大学出版社,2003.5

ISBN 7-301-06286-9

Ⅰ.新… Ⅱ.南… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第032049号

书　　名:新课标精析巧练(八年级〈初二〉数学　北师大版·上)
著作责任者:南秀全
责任编辑:宋丽霞
标准书号:ISBN 7-301-06286-9/G·0861
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 51849702
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京科文恒信图书经销有限公司
印　刷　者:北京飞达印刷有限责任公司
经　销　者:新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　8.25印张　212千字
2003年6月第1版　2003年6月第1次印刷
总　定　价:18.00元(上、下册)
本册定价:9.00元

导读图示

本书是根据教育部新课标八年级和现行初二年级共同使用的北师大版数学新教材编写的，适用于 2003 年秋季全国所有八年级和初二学生学习使用。为了提高你的学习效率，请在使用本书之前先阅读下面图示：

课标要求　与义务教育八年级（初二）数学新课标新教材（北师大版）完全同步，分章节知识对新课标的学习要求进行提炼归纳。突出对知识重点、难点、能力迁移点的讲解。

⇓

知能精华　以单元为整体，明确重点、突破难点，侧重理解、释疑解惑，突出学科特点，突出探究性、开放性等综合能力的培养。

⇓

典题精析　精编典型例题。题型新颖、设问科学、解答巧妙，既有正确解答的思路分析和方法提炼，又有误入歧途的误区警示和错因诊断。

⇓

知能巧练　新编创新活题，分级能力测试，突出综合考查，全面最新题型。材料鲜活，题题典型。既深刻反映探究性学习，又充分体现开放性思考。

⇓

探究创新　重视学生主动参与、乐于探究、勤于动手的情感的培养；重视学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力的培养；重视发现过程与学习方法的培养。

⇓

课程资源开发　或材料，或问题。开拓学生思路、增加学生见闻、指导学生学习、培养学生兴趣，供学生阅读学习思考、实践。

⇓

成长记录卡　突出人文知识性、探究开放性和学习主动性，培养学生积极良好的情感和与时俱进的价值观，加强综合评价，实现教学与学生的全面发展相结合。

⇓

答案点击　答案准确，题题详解。重难点题有疑难思维点拨和易错分析。

目　录

第一章　勾股定理

课标要求

1. 掌握勾股定理，了解用拼图的方法验证勾股定理，并运用勾股定理解决简单的实际问题.

2. 掌握直角三角形的判别条件，并能应用这个条件解决实际问题.

3. 体验探索勾股定理及验证勾股定理的过程，发展合情推理的能力，体会数形结合思想.

知能精华

1. 如果直角三角形两直角边分别为 a，b，斜边为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

2. 如果一个三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

1.1　探索勾股定理

典题精析

例　已知：一个直角三角形的两边长分别是 3 和 4，求第三边的长的平方.

分析　考虑第三条边是否是斜边，进行分类讨论.

解　(1)若已知的两边是直角边，则第三边是斜边.

根据勾股定理有斜边 $c^2=a^2+b^2=3^2+4^2=25$.

所以第三边(斜边)的长为 5，其平方为 25.

(2)若已知的两边是一条直角边和斜边，则较大的是斜边，第三边是另一条直角边.

根据勾股定理，有 $c^2=a^2+b^2$.

则 $b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7$.

所以第三边长的平方为 7.

说明　题意中没有直接说明已知的边是直角三角形的直角边还是斜边，所以待求的边应有两种情形，不能仅误把待求边当斜边.

知能巧练

1. 在由小方格组成的网格中，探索“直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方”，发现对________直角三角形，上述结论成立；通过拼图的方法，验证了上述结论，说明对________三角形，上述结论成立.

2. 在由小方格组成的网络中，用数格子的方法判断出给定的钝角三角形和锐角三角形三边不满足两边平方和等于第三边平方，由此可想到____________.

3. 在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，

(1)若 $a=5$，$b=12$，则 $c=$________；

(2)若 $a=15$，$c=25$，则 $b=$________；

(3)若 $c=61$，$b=60$，则 $a=$________；

(4)若 $a:b=3:4$，$c=10$，则 $a=$________，$b=$________；

(5)若 $c=8\frac{1}{2}$，$b=7\frac{1}{2}$，则 $a=$________.

4. 若线段 a，b，c 能构成直角三角形，则它们之比为(　　)

A. 2:3:4　　B. 3:4:6

C. 5:12:13　　D. 4:6:7

5. 已知 Rt△ABC，$\angle C=90^\circ$，若 $a+b=14$ cm，$c=10$ cm，则 Rt△ABC 的面积为(　　)

A. 24 cm²　B. 36 cm²　C. 48 cm²　D. 60 cm²

6. 直角三角形一直角边长为 11，另两边均为自然数，则其周长为(　　)

A. 121　　B. 120

C. 132　　D. 以上答案都不对

7. 等腰三角形底边上的高为 8，周长为 32，则三角形的面积是(　　)

A. 56　　B. 48　　C. 40　　D. 32

8. 放学以后，小红和小颖从学校分手，分别沿东南方向和西南方向回家，若小红和小颖行走的速度都是 40 米/分钟，小红用 15 分钟到家，小颖用 20 分钟到家，小红家和小颖家的距离为(　　)

A.600 米　　B.800 米

C.1 000 米　　D.不能确定

9.为迎接新年的到来,同学们做了许多拉花布置教室,准备召开新年晚会,大洋搬来一架高为 2.5 米的木梯,准备把拉花挂到 2.4 米的墙上,则梯脚与墙角的距离应为(　　)米

A.0.7　　B.0.8　　C.0.9　　D.1.0

10.八年级学生准备测量学校后边一段河水的深度,他们把一根竹竿插到离岸边 1 米远的水底,只见竹竿高出水面 1 尺,把竹竿的顶端拉向岸边,竿顶和岸边的水面刚好相齐,则河水的深度和竹竿的长度分别为(　　)

A.5 米,4 米　　B.4 尺,5 尺

C.1 尺,2 尺　　D.1 米,2 米

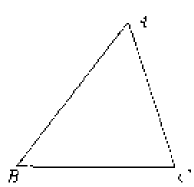
11.直角三角形两条直角边长分别为 5,12,则它斜边上的高是(　　)

A.6　　B.8.5　　C.$\frac{30}{13}$　　D.$\frac{60}{13}$

12.直角三角形中,斜边长为 5 米,周长为 12 米,则它的面积是(　　)

A.12 米^2　　B.6 米^2　　C.8 米^2　　D.9 米^2

13.已知,如图,△ABC 中,$AB=15$,$BC=14$,$AC=13$,求 $S_{\triangle ABC}$.

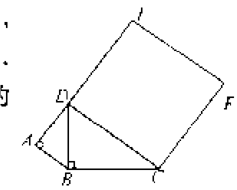


第 13 题图

探究创新

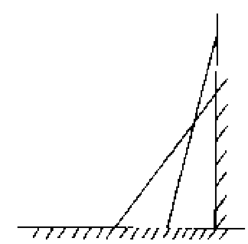
14.小明的叔叔家承包了一个矩形养鱼池,已知其面积为 48 m^2,其对角线长为 10 m,为建起栅栏,要计算这个矩形养鱼池的周长,你能帮助小明算一算吗?

15.如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=90°$,$\angle CBD=90°$,$AD=4$,$AB=3$,$BC=12$,求正方形 $DCEF$ 的面积.



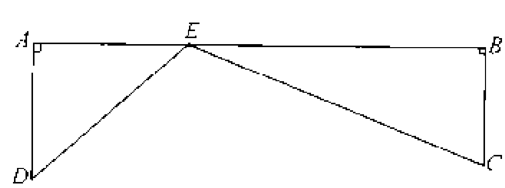
第 15 题图

16.如图,一架长 2.5 m 的梯子,斜靠在一面竖直的墙上,这时梯子底端离墙 0.7 m,为了安装壁灯,梯子顶端需离地面 2 m,请你计算一下,此时梯子底端应再向远离墙的方向拉多远?



第 16 题图

17.如图,铁路上 A,B 两点相距 25 km,C,D 为两村庄,$DA\perp AB$ 于 A,$CB\perp AB$ 于 B,已知 $DA=15$ km,$CB=10$ km,现在要在铁路 AB 上建一个土特产品收购站 E,使得 C、D 两村到 E 站的距离相等,则 E 站应建在离 A 站多少千米处?



第 17 题图

1.2　能得到直角三角形吗

典题精析

例　正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，点 F 在 DC 上且 $DF=\frac{1}{4}DC$. 试判断 BE 与 EF 的关系，并作出说明.

分析　观察图形，会给我们 BE 与 EF 的直观形象，再加上合理的估测，不难发现 BE 与 EF 的关系.

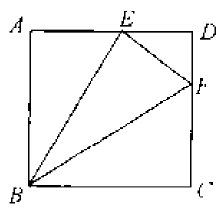


图 1 - 1

解　$BE\perp EF$.

设正方形的边长为 4，则 $AE=ED=2$，$DF=1$，$FC=3$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE^2=AB^2+AE^2=4^2+2^2=20$，

在 $Rt\triangle DEF$ 中，$EF^2=ED^2+DF^2=2^2+1^2=5$，

在 $Rt\triangle CFB$ 中，$FB^2=FC^2+CB^2=3^2+4^2=25$，

在 $\triangle BEF$ 中，因为 $BE^2+EF^2=20+5=25=FB^2$，

所以 $\angle BEF$ 是直角，$BE\perp EF$.

说明　利用三边的数量关系来判定 $Rt\triangle$ 是一个推证两线垂直的一个新思路.

知能巧练

1. 三角形各边(从小到大)长度的平方比如下列各组，其中不是直角三角形的是(　　).

　A. 1:1:2　　B. 1:3:4

　C. 9:25:26　　D. 25:144:169

2. 下列各组数中，以 a,b,c 为边长的三角形不是直角三角形的是(　　)

　A. $a=1.5,b=2,c=3$

　B. $a=7,b=24,c=25$

　C. $a=6,b=8,c=10$

　D. $a=3,b=4,c=5$

3. 给出下列几组数：(1)6，7，8；(2)8，15，6；(3)$n^2-1,2n,n^2+1$；(4)$m^2-n^2,2mn,m^2+n^2$. 其中能作为直角三角形的三条边长的是(　　)

　A. (1)(3)　　B. (2)(4)

　C. (1)(2)　　D. (3)(4)

4. 一个三角形三边的长分别是 15 cm，20cm，25cm，这个三角形最长边上的高是(　　)

　A. 12 cm　　B. 10 cm

　C. $12\frac{1}{2}$ cm　　D. $10\frac{1}{2}$ cm

5. 三角形的三边长为 a,b,c 满足等式 $(a+b)^2-c^2=2ab$，则此三角形是(　　)

　A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

　C. 钝角三角形　　D. 等边三角形

6. 若等腰三角形的腰长为 4，腰上的高为 2，则此三角形的顶角为(　　)

　A. 30°　　B. 150°

　C. 30°或 150°　　D. 120°

7. 下列三角形中，不一定是直角三角形的是(　　)

　A. 三角形中有一边的中线等于这边的一半

　B. 三角形三内角之比为 1:2:3

　C. 三角形一内角是 30°，且有一边是另一边的一半

　D. 三角形三边长分别是 $m^2-n^2,2mn$ 和 m^2+n^2 $(m>n>0)$

8. 适合下列条件的 $\triangle ABC$ 中，直角三角形的个数为(　　)

(1)$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{5}$；(2)$a=b,\angle A=45°$；(3)$\angle A=32°,\angle B=58°$；(4)$a=7,b=24,c=25$；(5)$a=2.5,b=2,c=3$.

　A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

9. 已知一个三角形的三边分别为 $3k,4k,5k$(k 为自然数)，则这个三角形为______，理由是______.

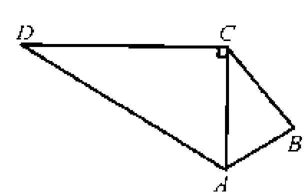
10. 有一个三角形两边长为 4 和 5，要使三角形为直角三角形，则第三边为________________.

11. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$BC=6$，BC 边上的高为 7，若 $AC=5$，则 AC 边上的高为________________.

12. 若一个三角形的一个角等于其他两个角的差，那么这个三角形是______三角形.

13. 若一个三角形的三边长为 $m+1,m+2,m+3$，当 m ______时，此三角形是直角三角形.

14. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp DC$，$\triangle ADC$ 的面积为 30 cm^2，$DC=12$ cm，$AB=3$ cm，$BC=4$ cm. 求 $\triangle ABC$ 的面积.



第 14 题图

15.试判断:三边长分别为 $2n^2+2n, 2n+1, 2n^2+2n+1(n>0)$ 的三角形是否是直角三角形.

探究创新

16.初春时分,两组同学到村外平坦的田野中采集植物标本,分手后,他们向不同的两个方向前进,第一组的速度是30米/分,第二组的速度是40米/分,半小时后两组同学同时停下来,而此时两组同学相距1500米.

(1)两组同学行走的方向是否成直角?

(2)如果接下来两组同学以原来的速度相向而行,多长时间后能相遇?

1.3　蚂蚁怎样走最近

典题精析

例　在一棵树的10 m高处有两只猴子,其中一只猴子爬下树走到离树20 m处的池塘 A 处,另一只爬到树顶后直接跃向池塘的 A 处,距离以直线计算,如果两只猴子所经过的距离相等,试问这棵树有多高?

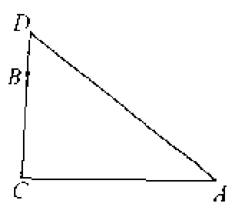


图1-2

分析　其中一只猴子从 $B\to C\to A$ 共30 m,另一只猴子 $B\to D\to A$ 也共走30 m,并且树垂直于地面,于是这个问题可化归到直角三角形解决.

解　如图,设 $BD=x$ m,由题意知 $BC+CA=BD+DA$,所以 $DA=30-x$.

Rt△ADC中,$(30-x)^2=(10+x)^2+20^2$,

所以 $x=5, x+10=15$.

答:这棵树高15 m.

说明　本题的关键是依题意正确画出图形,在此基础上,运用勾股定理及方程的思想,使问题得以解决.

知能巧练

1.底边为16 cm,底边上的高为6 cm的等腰三角形的腰长为(　　)

A.8 cm　　B.9 cm　　C.10 cm　　D.13 cm

2.下列三角形中,是直角三角形的是(　　)

A.三边满足关系 $a+b=c$

B.三边之比为4:5:6

C.其中一边等于另一边的一半

D.三边为9,40,41

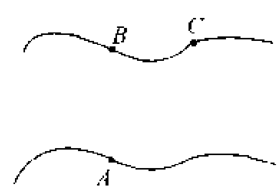
3.若△ABC的三边 a,b,c 满足条件 $a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$,则此三角形为(　　)

A.锐角三角形　　B.等边三角形

C.直角三角形　　D.以上都不对

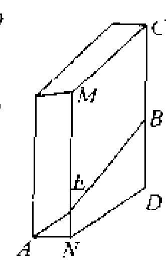
4.要登上12米高的建筑物,为了安全需要,需使梯子底端离建筑物5米,至少需要多长的梯子?

5.如图,某人欲横渡一条河,由于水流的影响,实际上岸地点 C 偏离欲到达点 B 200米,结果他在水中实际游了520米,求该河流的宽度.



第5题图

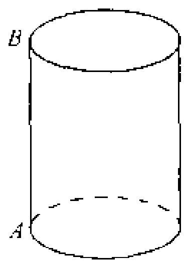
6.如图,一块砖宽 $AN=5$ cm,长 $ND=10$ cm,CD 上的点 B 距地面的高 $BD=8$ cm.地面上 A 处的一只蚂蚁到 B 处吃食,要爬行的最短路线是多少?



第6题图

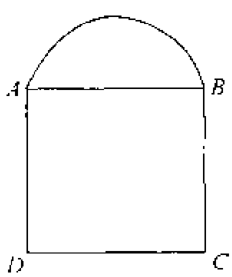
探究创新

7. 有一圆柱形油罐，如图所示，要以 A 点环绕油罐建梯子，正好到 A 点的正上方 B 点，问梯子最短要多少米？（已知油罐周长是 12 米，高 AB 是 5 米）



第 7 题图

8. 某工厂的大门如图所示，其中四边形 $ABCD$ 是长方形，上部是以 AB 为直径的半圆，其中 $AD=2.3$ 米，$AB=2$ 米，现有一辆装满货物的长车，高 2.5 米，宽 1.6 米，问这辆长车能否通过厂门？说明理由.



第 8 题图

第一章达标检测

（时间：100 分钟 满分：100 分）

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 下列说法中，不正确的是(　　)

A. 三个角的度数之比为 1:3:4 的三角形是直角三角形

B. 三个角的度数之比为 3:4:5 的三角形是直角三角形

C. 三边长度之比为 3:4:5 的三角形是直角三角形

D. 三边长度之比为 5:12:13 的三角形是直角三角形

2. 若三角形中相等的两边长为 10 cm，第三边长为 16 cm，那么第三边上的高为(　　)

A. 12 cm　　B. 10 cm　　C. 8 cm　　D. 6 cm

3. △ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c．下列说法中，错误的是(　　)

A. 如果∠C - ∠B = ∠A，那么∠C = 90°

B. 如果∠C = 90°，则 $c^2 - b^2 = a^2$

C. 如果 $(a+b)(a-b)=c^2$，那么∠C = 90°

D. 如果∠A = 30°，∠B = 60°，那么 $AB = 2BC$

4. 在△ABC 中，若 $AC = 15$，$BC = 13$，AB 边上的高 $CD = 12$，则△ABC 的周长为(　　)

A. 32　　B. 42　　C. 32 或 42　　D. 以上都不对

5. 一个三角形三边之比为 3:4:5，则这个三角形三边上的高之比为(　　)

A. 3:4:5　B. 5:4:3　C. 20:15:12　D. 10:8:2

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

6. 若三角形三边长为 39，36，15，则此三角形是________．

7. 在△ABC 中，若 $AC^2 + AB^2 = BC^2$，则∠B + ∠C = ________．

8. △ABC 的两边分别为 5，12，另一边 c 为奇数，且 $a+b+c$ 是 3 的倍数，则 c 应为________．

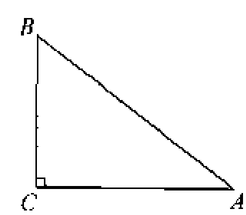
9. 在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，若 $a = 40$，$b = 9$，则 c = ________；若 $c = 25$，$b = 15$，则 a = ________．

10. 一艘轮船以 16 km/h 的速度离开港口向东北方向航行，另一艘轮船同时离开港口以 12 km/h 的速度向东南方向航行，它们离开港口半小时后相距________ km．

三、解答题(每题 12 分，共 60 分)

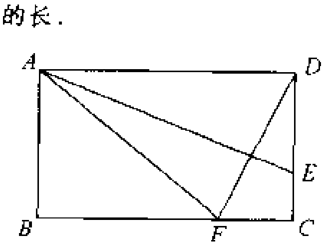
11. 小明想知道学校旗杆的高，他发现旗杆上的绳子垂到地面还多 1 m，当他把绳子的下端拉开 5 m 后，发现下端刚好接触地面，你能帮他把旗杆的高求出来吗？

12. 如图，在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，$AB = 5$，△ABC 的周长为 12，求△ABC 的面积．



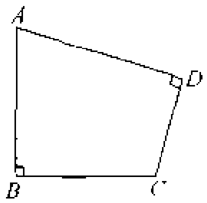
第 12 题图

13. 如图，沿折痕 AE 折叠长方形 $ABCD$ 的一边，使点 D 落在 BC 边上点 F 处，若 $AB = 8$，且△ABF 的面积为 24．求 EC 的长．



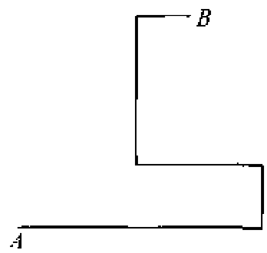
第 13 题图

14. 如图，一块四边形的草地 $ABCD$，其中 $\angle B=\angle D=90^\circ$，$AB=20$ m，$BC=12$ m，$CD=10$ m．求这块草地的面积．



第 14 题图

15. 如图所示，假期中，王强和同学到某海岛上玩探宝旅游，按照探宝图，他们登陆后先往东走 8 km，又往北走 2 km，遇到障碍后又往西走 3 km，再折向北走到 6 km 处往东一拐，仅走 1 km 就找到宝藏．问登陆点 A 到宝藏埋藏点 B 的直线距离是多少千米？



第 15 题图

课程资源开发

千古第一定理——勾股定理

我们已学过勾股定理，即若直角三角形的三条边长分别为 a,b,c，则 $a^2+b^2=c^2$．反过来，若三角形的三条边 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$，则它是个直角三角形．

在古代，许多民族都发现了这个事实，我国的算书《周髀算经》中，就有关于勾股定理的记载，为了纪念我国古人的伟大成就，就把这个定理定名为"勾股定理"．在西方，这个定理被称为毕达哥拉斯定理．之所以被称为毕达哥拉斯定理，是因为现代的数学和科学来源于西方，而西方的数学及科学又来源于古希腊，古希腊流传下来的最古老的著作是欧几里得的《几何原本》，而其中许多定理再往前追溯，就落在毕达哥拉斯的头上．

不管怎么说，勾股定理是数学中一个伟大的定理，它的重要性怎么说也不为过：

(1)勾股定理是联系数学中最基本也是最原始的两个对象——数与形的第一定理；

(2)勾股定理导致无理数的发现，这就是所谓第一次数学危机；

(3)勾股定理开始把数学由计算与测量的技术转变为证明与推理的科学；

(4)勾股定理中的公式是第一个不定方程，有许许多多组数满足这个方程，也是最早得出完整解答的不定方程，它一方面引导出各式各样的不定方程，包括著名的费马大定理，另一方面也为不定方程的解题程序树立了一个范式．

成长记录卡

评估内容	基础失分	巧练失分	探究失分	情感态度	增强能力	学习表现	备　注
分　值							
原因分析							
	A 审题不清　B 思路不清　C 记忆错误　D 知识点模糊　E 粗心　F 交流合作差　H 其他原因						
改良方法							
学习心得							
小组评价							
教师评价							
家长评价							

第二章　实　数

课标要求

1. 让同学们经历数系扩张,探求实数性质及其运算规律的过程,从事借助计算器探索数学规律的活动,发展同学们的抽象概括能力,并在活动中进一步发展同学们独立思考、合作交流的意识和能力.

2. 结合具体情境,让同学们理解估算的意义,掌握估算的方法,发展同学们的数感和估算能力.

3. 了解平方根、立方根、实数及其相关概念;会用根号表示,并会求数的平方根、立方根,能进行简单的实数四则运算.

4. 能运用实数的运算解决简单的实际问题,提高同学们的应用意识,发展同学们解决问题的能力,从中体会数学的应用价值.

知能精华

1. 基本概念

无理数:无限不循环小数称为无理数.

实数:有理数和无理数统称为实数.

平方根:如果 $x^2=a$,则 x 叫做 a 的平方根.

立方根:如果 $x^3=a$,则 x 叫做 a 的立方根.

2. 平方根与立方根的特征与表示方法:

一个正数的平方根有两个,它们互为相反数,正数 a 的平方根可记为 $\pm\sqrt{a}$;0 的平方根是 0,记为 $\pm\sqrt{0}=0$,负数没有平方根.

正数 a 的正的平方根称为 a 的算术平方根,记为 $\sqrt{a}$.

任何数的立方根只有一个,a 的立方根记为 $\sqrt[3]{a}$,因而正数的立方根是正数,负数的立方根是负数,0 的立方根是 0.

3. 实数与数轴上的点是一一对应的,且有理数范围内的运算律与运算方法在实数范围内仍然实用.

4. 利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geq0,b\geq0)$ 和 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geq0,b>0)$ 可简化数的开方运算.

2.1　数怎么又不够用了

典题精析

例 1　下列说法是否正确?正确的打"√",错误的打"×",并说明理由.

(1)无限小数都是无理数;(　　)

(2)正有理数、负有理数统称为有理数;(　　)

(3)无理数与有理数的积一定还是无理数;(　　)

(4)在 1 与 2 之间的无理数的个数是有限个.(　　)

分析　本例应从各个定义本身出发,把握各自特征,才能准确求解.

解　(1)×.因为无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数.其中无限循环小数是有理数,无限不循环小数才是无理数;

(2)×.有理数包括正有理数、负有理数,还有 0.而本题却忽视了 0 为有理数这一特殊情况.

(3)×.当有理数 0 与无理数相乘时,其积为 0,是有理数,而不是无理数.

(4)×.由于无理数是无限不循环小数,故可随意在 1~2 之间构造出无理数来,如 1.212112111211112…,1.3030030003…等,因而 1~2 之间的无理数有无数个,而不是有限个.

说明　对于类似于本例的说理判断题,应注意那些特殊的数、式子以及特殊的位置等,否则易因考虑不周全而致错.

例 2　如图 2-1 是由 9 个边长为 1 的小正方形拼成的,任意连接这些小正方形的两个顶点,可得到一些线段.试分别找出两条长度为有理数的线段和两条长度不是有理数的线段,并估计两条不是有理数的线段的长(误差不超过 0.01),再用计算器验证你的估计.

分析　由于每个小正方形的边长均为 1,故图中可用有理数表示的线段定可在这些正方形的边上找到,由

勾股定理知，图中任何正方形(或矩形)的对角线长都不能为有理数，而图中的对角线不难找到. 对于估计这些不是有理数的线段长可尝试着运用平方得到，并用计算器验证.

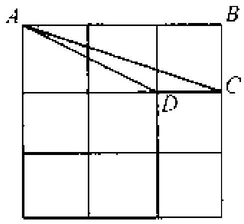


图 2 － 1

解　如图 2－1，其中线段 $AB=3$，$BC=1$，$CD=1$ 均为有理数，而 $AD^2=5$，$AC^2=10$，故 AD，AC 的长度均不是有理数.

又因为 $2.2^2=4.84$，$2.3^2=5.76$，而 $2.2^2<AD^2<2.3^2$，从而 AD 的长可能是 2.23.

因为 $3.1^2=9.61$，$3.2^2=10.24$，而 $3.1^2<AC^2<3.2^2$，故 AC 的长可能是 3.16.

说明　本题是让同学们能从具体情境中感受到无理数在现实生活中是大量存在的，体会到无理数引入的必要性. 同时需要说明的是，对于估计值，由于其误差要求不超过 0.01，故其值取 2.23 和 3.16 即可.

知能巧练

1. 无限小数包括无限循环小数和________，其中______是有理数，________是无理数.

2. 边长为 2 的正方形的对角线长是(　　)

　A. 整数　　B. 分数

　C. 有理数　　D. 以上都不对

3. 数 234.021021021…是(　　)

　A. 无理数　　B. 有理数

　C. 有限小数　　D. 以上均不对

4. 在下列各数 0，$\frac{1}{3}$，3.14，π，$\frac{1}{\pi}$，$0.\dot{7}3\dot{1}$ 中，无理数的个数有(　　)个

　A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 下列说法错误的是(　　)

　A. 无理数与有理数的和一定还是无理数

　B. 无理数的倒数可以是有理数

　C. 两个有理数之间必存在着无数个无理数

　D. 无理数都是无限小数

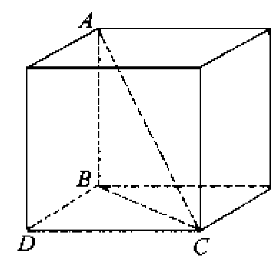
6. 设面积为 9 的正方形的边长为 a，a 能是有理数吗？如果正方形的面积为 20，则其边长 b 能是有理数吗？如果不是有理数，试估计它的值(精确为十分位)，并用计算器来验证你的估计.

7. 请写出一个介于 0.3 和 0.4 之间的无理数.

8. 一个圆柱体的底面半径为 2，高为 5，则其体积是多少？(结果精确到 0.01)

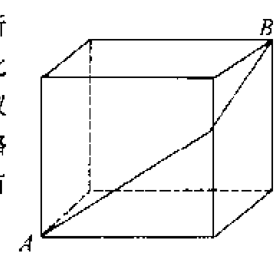
探究创新

9. 在棱长为 4 cm 的正方体箱子中，想放进一根细长的铁棒，则这根铁棒的最大长度可能是多少？你能估算出来吗？(将结果保留 3 个有效数字)



第 9 题图

10. 一只蚂蚁处于如图所示的正方体的点 A 处，如果此正方体的棱长为 1，则这只蚂蚁从点 A 处爬到 B 处的最短路程是多少？(结果保留 3 个有效数字)



第 10 题图

2.2　平方根

典题精析

例1　字母 x 取何值时,下列代数式的值具有平方根?

(1) $x-3$;(2) x^2+3;(3) $4-x$.

分析　由平方根的意义可知,一个正数有两个平方根,0的平方根是0,负数没有平方根.故只有非负数才有平方根,从而不难求出 x 的范围.

解　(1)当 $x-3\geq0$,即 $x\geq3$ 时,$x-3$ 有平方根;

(2)当 $x^2+3\geq0$,即 x 为任何数时,x^2+3 都有平方根;

(3) $4-x\geq0$,即 $x\leq4$ 时,$4-x$ 有平方根.

说明　本例主要检测同学们对平方根意义的理解与掌握,依据平方根的意义,能够开平方的数都必须是非负数,建立不等式即可.

例2　如果一个正数的平方根为 $2a-7$ 和 $a+4$,求这个正数.

分析　由平方根的意义,"一个正数的平方根有两个,它们互为相反数",故可依此求出 a 的值,进而求出原来的正数.

解　由题意得,$(2a-7)+(a+4)=0$

所以 $a=1$,此时 $2a-7=-5$,$a+4=5$

而 $(-5)^2=5^2=25$.

故所求的正数为25.

说明　本题在求解过程中会出现 $a=1$ 的最后结果,这是由于审题不够仔细造成的,应注意领会题目的真正要求.

例3　若 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+y-5}=0$,求 $x\cdot y$ 的值.

分析　对于 $\sqrt{a}$ 而言,一方面要求被开方数 $a\geq0$,另一方面,其自身 $\sqrt{a}$ 也是一个非负数,即 $\sqrt{a}\geq0$,可构造方程组得出结果.

解　由题意,以及 $\sqrt{x-4}\geq0$,$\sqrt{x+y-5}\geq0$ 可知

$\begin{cases}\sqrt{x-4}=0,\\ \sqrt{x+y-5}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-4=0,\\ x+y-5=0,\end{cases}$ 从而 $\begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$

所以 $x\cdot y=4\times1=4$

说明　由非负数之和为0,则各个非负数必为0,可建立出方程组,以此求出待定未知数的值是解答这类题的关键.

知能巧练

1.如果1.2是 a 的平方根,那么 $a=$ ______,a 的另一个平方根是______.

2.$\frac{16}{121}$ 的算术平方根是______,$(-1.3)^2$ 的平方根是______.

3.$\sqrt{4^2}=$ ______,$\sqrt{(-4)^2}=$ ______,$\pm\sqrt{25}=$ ______.

4.$(-5)^0$ 的平方根是______,10^{-4} 的算术平方根是______.

5.$2x-4$ 的算术平方根是0,则 $x=$ ______.

6.若 $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$ 有意义,则 $x=$ ______.

7.在 Rt△ABC 中,∠$C=90°$,$AB=17$,$BC=8$,则 $AC=$ ______.

8.若 $\sqrt{a}$ 的平方根为 ±3,则 $a=$ ______.

9.若 $x^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2$,则 $x=$ ______;若 $y^2=(-2)^2$,则 $y=$ ______.

10.下列语句中,正确的是(　　)

A.一个数的正的平方根是这个数的算术平方根

B.0的平方根和它的算术平方根均为0

C.2^{-1} 没有平方根

D.算术平方根等于它本身的数只有0

11.一个自然数的算术平方根为 a,则下一个自然数的平方根为(　　)

A.a^2+1

B.$\pm(a^2+1)$

C.$\pm\sqrt{a^2+1}$

D.$\pm(\sqrt{a}+1)$

12.已知正方形的边长为 a,面积为 S,则(　　)

A.$S=\sqrt{a}$

B.S 的平方根是 a

C.a 是 S 的算术平方根

D.$a=\pm\sqrt{S}$

13.按要求解答下列各题:

(1)求289,1.21,$(-2.6)^2$ 的算术平方根;

(2)求49,0.64,$\frac{25}{81}$,0的平方根.

14.(1)一个负数的平方为64,求这个数;

(2) 一个数的平方为$\frac{16}{25}$,求这个数.

15.小明用大小相同的正方形拼成一个面积为12 cm^2的长方形.如果共用了24个小正方形,试求这些小正方形的边长.

探究创新

16.已知 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+4$,求 y^x 的值.

17.若 m 满足关系式 $\sqrt{3x-6}+\sqrt{2y-7}=\sqrt{a+b-1999}\cdot\sqrt{1999-a-b}$,试求 x,y 的值.

2.3 立方根

典题精析

例1 下列结论正确的是( )

A.64的立方根是±4

B.$-\frac{1}{2}$是$-\frac{1}{6}$的立方根

C.$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}$

D.立方根等于它本身的数是0和1

分析 本例可通过立方根的定义作出合理判断.

解 A错误.因为64的立方根只有一个,它是4,而不应是±4;

B错误.因为$(-\frac{1}{2})^3=-\frac{1}{8}\neq-\frac{1}{6}$,所以$-\frac{1}{2}$不可能是$-\frac{1}{6}$的立方根;

C正确.因为$\sqrt[3]{-27}$表示-27的立方根,且$\sqrt[3]{-27}=-3$,又$-\sqrt[3]{27}$表示27的立方根的相反数,即$-\sqrt[3]{27}=-3$.故$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}$.

D错误.因为$1^3=1,0^3=0,(-1)^3=-1$,故立方根等于它本身的数有$1,0,-1$.

应选C.

例2 张师傅打算用铁皮焊制一密封的正方体水箱,使其能容纳1.331米^{3}的水.试问至少需要多大面积的铁皮.

分析 可直接由正方体体积公式,借助开立方运算,求出此正方体的棱长,从而可求出正方形面积,使问题得到解决.

解 设水箱的棱长为x米,由题意得

$x^3=1.331$ 所以 $x=\sqrt[3]{1.331}=1.1$(米)

当所用铁皮能全部用上,且不留余料时,所需铁皮的面积最少.所以$x^2=1.1^2=1.21$米^2.

又因为正方体共有6个面,故所需铁皮的总面积至少为$6\times1.21=7.26$米^2.

即至少需要7.26米^{2}的铁皮才能焊制成容积为1.331米^{3}的密封正方体水箱.

说明 本例有两点值得注意:一是密封的正方体共有6个全等的正方形组成,故确定铁皮总面积时应算六个正方形面积之和;另一方面应注意题目中"至少"的含义,否则其结果便难以确定.

例3 若$\sqrt[3]{3y-1}=\sqrt[3]{2x-1}$,且$x\cdot y\neq0$,试求$\frac{x}{y}$的值.

分析 本例应注意到立方根的惟一性,故可得到$3y-1=2x-1$的合理结论,因而不难解决.

解 由$\sqrt[3]{3y-1}=\sqrt[3]{2x-1}$得

$3y-1=2x-1$

所以$3y=2x$,又$x\cdot y\neq0$,

所以$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

说明　本例既考查了立方根的意义，又检测了分式的计算技巧，不可忽略对 $x\cdot y\neq 0$ 这一重要条件的运用.

知能巧练

1. $-\frac{1}{8}$ 的立方根是________，125 的立方根是________.

2. 若某数的立方等于 -0.027，则这个数的倒数是________.

3. 已知 $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-y}$，则 $x+y$ 的值为________.

4. -3 是________的平方根，-3 是________的立方根.

5. $\sqrt{16}$ 的平方根是________，$\sqrt{64}$ 的立方根是________.

6. 若一个数的立方根等于这个数的算术平方根，则这个数是________.

7. 下列命题正确的是(　　)

(1) ± 4 都是 64 的立方根；(2) $\sqrt[3]{x^3}=x$；(3) $\sqrt{64}$ 的立方根是 4；(4) $\sqrt[3]{-8}=-2$.

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

8. 下列说法正确的是(　　)

A. -0.064 的立方根是 ± 0.4

B. $\frac{1}{2}$ 的平方根是 $\pm\frac{1}{4}$

C. -125 没有立方根

D. $\frac{1}{27}$ 的立方根是 $\frac{1}{3}$

9. 下列说法正确的是(　　)

A. 一个数的立方根有两个，它们互为相反数

B. 一个数的立方根与这个数同号

C. 如果一个数有立方根，那么它一定有平方根

D. 一个数的立方根是非负数

10. 如果 $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt[3]{x}$ 都有意义，则它们之间的关系是(　　)

A. $\sqrt{x}>\sqrt[3]{x}$

B. $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}$

C. $\sqrt{x}>\sqrt[3]{x}$ 或 $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}$

D. 以上都不对

11. 一个自然数 a 的算术平方根为 x，那么 $a+1$ 的立方根是(　　)

A. $\pm\sqrt[3]{a+1}$　B. $\sqrt[3]{(a+1)^2}$

C. $\sqrt[3]{x^2+1}$　D. $\sqrt[3]{x^3+1}$

12. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$；

(2) $\sqrt[3]{1-0.973}$；

(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}$；

(4) $\sqrt{0.25}+\sqrt[3]{27}$.

13. 计算下列各题：

(1) $\sqrt[3]{0.125}-\sqrt{3\frac{1}{16}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{7}{8}\right)^2}$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\sqrt{(-2)^2}+\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{125}$；

(3) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}-\sqrt[3]{8}+\sqrt{0.1^2}-(-2)^3\times\sqrt[3]{0.064}$.

14. 一个正方体的体积变为原来的 n 倍，它的棱长变为原来的多少倍？

探究创新

15. 若 $\sqrt[3]{3x-7}$ 和 $\sqrt[3]{3y+4}$ 互为相反数，试求 $x+y$ 的值.