

力学参考资料 (一)

断裂力学

科学技术文献出版社重庆分社

断 裂 力 学

中国科学技术情报研究所重庆分所 编辑
科学技术文献出版社重庆分社 出版
重庆市市中区胜利路91号

新华书店重庆发行所 发行
陕西省宝鸡市人民印刷厂 印刷

开本: 787×1092毫米 1/16 印张12.5 字数40万
1975年8月第一版 1975年8月第一次印刷
印数: 5200

统一书号: 13176·10

定价: 1.50元

毛主席语录

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。

对于外国文化，排外主义的方针是错误的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借镜；盲目搬用的方针也是错误的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化。

目 录

一、断裂力学	(1)
二、断裂的控制：过去、现在和将来	(33)
三、防止脆性断裂事故的方法的最近方向	(41)
四、断裂力学中裂纹张开位移方法的研究现状	(46)
五、从格里菲斯理论到裂纹张开位移方法及其发展	(55)
六、裂纹张开位移——原理和 方法的评论	(67)
七、临界裂纹张开位移方法在选择抗断裂材料中的应用	(72)
八、线弹性 (K_{IC}) 断裂力学和全面屈服 (COD) 断裂力学的一 致性	(111)
九、J 积分作为断裂准则	(121)
十、J 积分算法	(129)
十一、一个与路径无关的积分和关于缺口与裂纹附近应变集中的 近似分析	(141)
十二、J 积分分析和计算的一些新结果	(149)
十三、用全息干涉法测定 I 型应力强度因子	(154)
十四、三维光弹性在断裂力学中的应用	(159)
十五、用交替法对部分园形表面缺陷问题所作的弹性分析	(164)
十六、关于表面缺陷问题	(177)

断 裂 力 学

宣 本 博

1. 绪言 关于断裂力学的地位

我们准备从连续力学的观点出发,对断裂力学的机理进行阐述。为此,须明确裂纹的发生和扩延的机理。其研究方法,有宏观的和微观的,它们分别用决定论的方法和统计的方法进行研究,在本文中统称为断裂力学。它的过去、现在和将来如图1.1所示。图中圆内表明现在(线条部分)及以前的研究情况。



图1.1

以前,在材料力学中,对材料的形状系数 α 及有效应力集中系数 β 进行了研究,这是断裂力学的前身。这些研究在设计方面对防止断裂的贡献是众所周知的。当时,主要研究工作是将形状系数 α 和应力集中系数 β 联系在一起。为此,提出了各种各样的模型方案,但是,这个重大问题,直到今天也尚未明确解决。

约从十年前开始,主要是在美国发展了线性断裂力学。它是以各向同性均质体的二维弹性理论为基础得到的结果,由于这个理论比较简明,应力强度因子 K 和变形能释放率 G 之间的关系是一一对应的,故不仅能够对脆性断裂成功地作定量的分析,而且对疲劳断裂时的裂纹扩延速度、环境强度也都取得了完善的说明。目前,线性断裂力学正成为利用连续体力学的

断裂解析的中心内容。然而,线性断裂力学从线性弹性论的角度来说,主要是用于各向同性均质体的二维弹性问题,对所讨论的裂纹,假定是理想的裂纹,而实际上,如压力容器内壁上出现的裂纹、切口圆杆试件上出现的疲劳裂纹等等,考虑这些实际裂纹时,必须根据三维弹性理论。

由于线性断裂力学是基于线性弹性理论,而且几乎在所有断裂时,都同时伴随着塑性变形,所以线性断裂力学的应用仍有局限性,这样,发展非线性断裂力学就显得必要了。

从连续力学出发,为了弄清裂纹扩延的机理〔1〕,必须知道以下几点:

(1) 裂纹尖端塑性区域的形状, (2) 塑性区域内的应变分布, (3) 断裂条件。但是应用连续力学计算,第(3)点得不到明确的结果,故要根据实验,或者从微观的立场来进行阐明。而(1)(2)两点可根据非线性断裂力学来阐明。

在上述讨论中,我们是把固体当作各向同性均质体,或宏观的各向异性物体来进行计算的。可是塑性区域的大小,按照碳钢疲劳试验的结果,是在0.01毫米数量级,而这个数值和晶粒的大小相当。也就是说,把物体当作是各向同性均质体(或是宏观的各向异性的),这个假定,有时是成问题的。因此,要采用考虑晶粒机械性质的连续力学来研究,然而,根据晶粒的性质,来推导多晶体的性质,这并不是什么新的尝试, Sachs, Taylor, Hill等人已进行过试验。这时需考虑以下五个方面〔2〕:

(1) 单晶性质的测定值,

(2) 多晶体的条件: 1) 晶界的性质, 2) 晶粒的性态和单晶试件实验测定值的异同, 3) 晶粒之间的相互作用。

(3) 组合结构的资料,

(4) 根据(1) — (3) 进行的平均操作,

(5) 多晶体性质测定值。

然而为了更详尽地了解各个结晶的情况,就要用有限单元法来代替上述(4)的平均操作的理论,用决定论的方法论述多晶体的性质,并考虑晶粒性质的统计

分布, 对于平均运算要将有限单元法和蒙特卡罗法同时并用, 根据统计的方法论述多晶体的性质, 这样就会比以往的计算更精确。

以上论述了断裂力学的一般概况, 本文将分以下三个部分进行讨论:

第 I 部分, 线性断裂力学,

第 II 部分, 非线性断裂力学,

第 III 部分, 微观断裂力学。

第 I 部分包括三章, 在第二章里叙述线性断裂力学的基本概念, 第三章里讲述了求应力强度因子的方法及其有关资料, 第四章里介绍了有关线性断裂力学的应用。第 II 部分包括二章, 在第五章里论述了非线性断裂力学的解析法, 第六章论述了同样的问题, 当具有微小变形时, 利用有限单元法进行求解。第 III 部分包括一章, 论述了根据晶粒的排列可采用的力学方法。

第 I 部分 线性断裂力学

2. 线性断裂力学的基本概念

2.1 关于弹性裂纹扩延的Griffith理论 (ζ 的导入)

Griffith论述了裂纹的不稳定扩延, 是由于系统内的自由能量的减少而引起的。新的裂纹表面出现时, 在物体中所储备的变形能的释放增量 dW_s , 比表面能量的增量 dW_s 大时, 裂纹就扩延。

在二维平面应力状态时 (如图2.1所示)

$$W_s = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \quad (2.1)$$

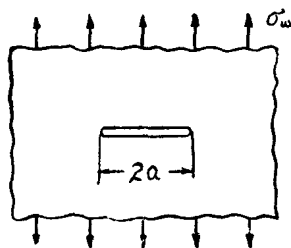


图2.1

内部裂纹是由其中心对称地向外扩延, 从长度为 $2a$ 的二个裂纹表面所产生的表面能:

$$W_s = 4a\gamma_s \quad (2.2)$$

这样, Griffith的条件如下式:

$$\frac{\partial W_s}{\partial a} \geq \frac{\partial W_s}{\partial a} \quad (2.3)$$

或者是:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \right) \geq \frac{\partial}{\partial a} (4a\gamma_s) \quad (2.4)$$

所以裂纹扩延的应力 σ_F 为:

$$\sigma = \sigma_F = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (2.5)$$

式 (2.3) 的左边 $\frac{\partial W_s}{\partial a}$ 是裂纹扩延单位面积时所释放出的能量, 称为变形能释放率, 或裂纹扩延力, 用 ζ 表示。

$\frac{\partial W_s}{\partial a}$ 是裂纹扩延单位面积所需的能量, 称为韧性, 或裂纹的扩延抗力, 用 ζ_c 表示。式 (2.3) 可写成下式 (Irwin, 1958):

$$\zeta \geq \zeta_c \quad (2.6)$$

2.2 裂纹尖端附近的应力场 (3) (应力强度因子K的导入)

根据线性弹性理论, 对有关裂纹尖端的应力场进行了详细的分析。本节是根据Irwin等人提出的应力强度因子或称裂纹尖端的应力强度因子进行论述的。如图2.2所示的直角坐标系 (X, Y, Z), u , v , w , 是位移在X, Y, Z轴上的分量, 此时裂纹的基本形式如表2.1所示。在一般情况下, 变形可为三种基本变形的组合。

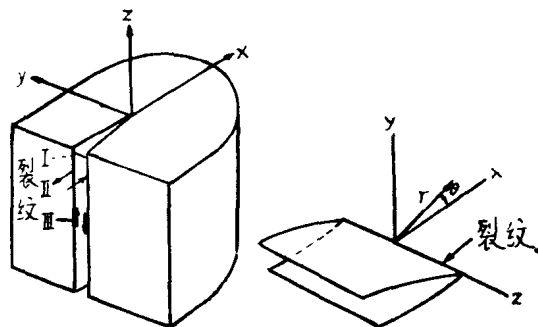


图2.2.

对应于上述三种变形形式的应力分量和位移分量的式子如下:

I 型裂纹 (平面应变状态):

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.7)$$

$$\sigma_z = \gamma (\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.7)$$

$$u = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\gamma + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$v = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\gamma - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$w = 0 \quad (2.7)$$

表 2.1 裂纹的基本型式

型式	对 称 性		名 称	弹 性 理 论
	XY面	XZ面		
I	对称	对称	张开型	二维弹性理论
	对称	对称	(拉伸裂纹)	
II	对称	歪斜	滑移型	二维弹性理论
	对称	对称	(横剪裂纹)	
III	歪斜	歪斜	撕裂型	扭转理论
	对称	对称	(纵剪裂纹)	

Ⅰ型裂纹(平面应变状态),

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.8)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.8)$$

$$\sigma_z = \gamma (\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.8)$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\gamma + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.8)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\gamma - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.8)$$

$$w = 0 \quad (2.8)$$

Ⅱ型裂纹:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.9)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.9)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (2.9)$$

$$u = v = 0 \quad (2.9)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.9)$$

一般裂纹尖端的应力为:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + g_{ij}(r, \theta) \quad (2.10)$$

上式中 $g_{ij}(r, \theta)$ 对于 r 无特异情况。所以在与裂纹长度相比是很小的范围时,只采用上式的前一项,就能得到 σ_{ij} 的近似值,对上列各式,重要的是:

① K 是和 (r, θ) 无关的常数,

②公式本身具有应力为零($r^{-1/2}$)的奇异性。

K 值与远处的应力 σ 成正比。而且和含有裂纹的物体的形状有关。所以,只要 K 值相同,即使物体的形状和所受应力不同,在裂纹尖端附近的应力场仍是完全相同的。这个 K 值,我们称为应力强度因子,例如,无限板上有长度为 $2a$ 的裂纹,当板受到拉伸时,

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.12)$$

对于一般的板:

$$K_I = m\sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.12)$$

m 是根据板的形状决定的修正系数。根据式(2.11)

定出 K_I 的量纲是公斤/毫米^{3/2},而 K 及 α (形状系数)都是根据弹性理论求得的系数。在平板上,有一椭圆孔(长轴直径 $2a$,长轴端部的曲率半径为 ρ),受到均匀的拉伸应力 σ (图2.3),

$$\sigma_{\text{最大}} = \sigma \left[1 + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]$$

在产生裂纹的情况下, $\rho \rightarrow 0$, 因而得到:

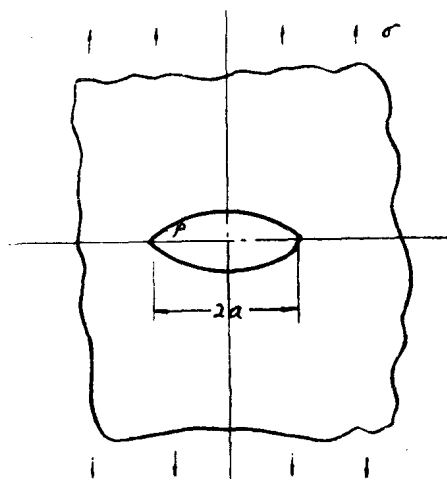


图2.3

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\text{最大}} \sqrt{\rho} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.13)$$

知道 a (原书上为 α , 可能有误——译注), 从而解出 $\sigma_{\text{最大}}$ 后, 就能较简单地求出 K_I 值, 由于著者的不同, 也有称下式为应力强度因子的, 又有将下式用 k 表示的, 阅读文件时应注意。

$$k = \frac{K}{\sqrt{\pi}}$$

材料的断裂条件为:

$$K \geq K_c$$

即当应力强度因子超过某临界值 K_c 时, 才会发生断裂。

K_c 是和温度、板厚、变形速度等有关的材料常数, 称为材料的断裂韧性。

2.3. 变形能释放率 ζ 和应力强度因子 K 之间的关系

有关断裂强度的计算方法, 到目前为止, 讨论了二种方法, 一种是根据能量平衡的所谓热力学的方法, 其断裂条件如:

$$\zeta \geq \zeta_c$$

对这二种方法已分别进行了推导, 而在本节中, 将证明这两种方法所得结果相同。

I型裂纹如图2.4所示, 我们考虑是从长度为 a 扩延了微小距离 α 后, 在这个过程中所释放出的变形能, 这个值就相当于把裂缝从 $a+\alpha$ 闭合到 a 所作的功。所以, I型的变形能释放率, 我们采用了图2.4的记号, 则得:

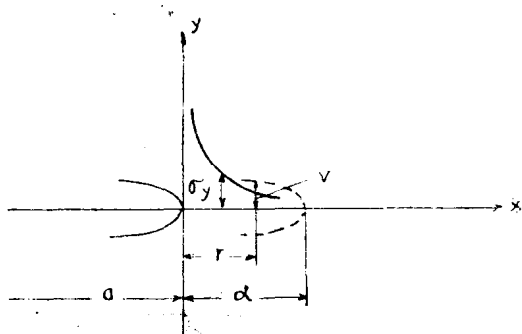


图2.4

$$\zeta_I = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^a \sigma_y v dr \quad (2.15)$$

上式中的 σ_y , v 是根据式(2.7)得到的

$$\sigma_y = \sigma_y(\theta=0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$v = v(\theta=\pi) = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{\alpha-r}{2\pi}} \quad (2-2\gamma)$$

因而,

$$\int_0^a \sigma_y v dr = \frac{K_I^2}{2\pi G} (2-2\gamma) \int_0^a \sqrt{\frac{\alpha-r}{r}} ar =$$

$$\frac{1-\gamma}{2G} K_I^2 \alpha$$

$$\therefore \zeta_I = \frac{1-\gamma}{2G} K_I^2 = \frac{1-\gamma^2}{E} K_I^2$$

(平面应变状态)

(2.16a)

同理可求得:

$$\zeta_{II} = \frac{1-\gamma^2}{E} K_{II}^2 \quad (\text{平面应变状态}) \quad (2.16b)$$

$$\zeta_{III} = \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.16c)$$

而在一般情况下, 变形能释放率如:

$$\zeta = \zeta_I + \zeta_{II} + \zeta_{III} \quad (2.17)$$

而如为平面应力情况, 则具有下式:

$$\zeta_I = \frac{K_I^2}{E}, \quad \zeta_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \quad (2.18)$$

根据上述关系, 从前述两种方法会得到同样的结果, 用变形能释放率 ζ 论述断裂, 和用应力强度因子 K 论述断裂, 其结果是相同的。

3. 应力强度因子的计算方法及其资料

3.1. 前言

讨论本题之前, 须涉及某些问题, 如根据尖锐切口的应力集中系数可以立即求得应力强度因子。对底部半径为 ρ 的切口板材, 以应力 σ 拉伸时, 如已知弹性最大应力 $\sigma_{\text{最大}}$, 这时的 K_I 可用下式求之:

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\text{最大}} \sqrt{\rho} \quad (3.1)$$

例如宽度为 w 的带板, 具有长度为 $2a$ 的椭圆孔, 在板的两端受有均匀的拉伸应力时[4],

$$\frac{\sigma_{\text{最大}}}{\sigma} = \sqrt{\frac{a}{\sigma}} \left\{ 2 + 1.1897 (\epsilon \lambda)^2 + 0.9624 \right.$$

$$\left. (\epsilon \lambda)^4 + 0.7926 (\epsilon \lambda)^6 + 0.6478 (\epsilon \lambda)^8 \right\}$$

$$+ 1 + (3.5469 + 0.2216 \epsilon) \lambda^2 + \dots \quad (3.2)$$

$$\left(\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{a}}, \lambda = \frac{2a}{W} \right) \quad (3.2)$$

如用式 (3.1) 时, 对于有裂纹的带板 (图3.1), 拉伸时, K_I 可由下式求得:

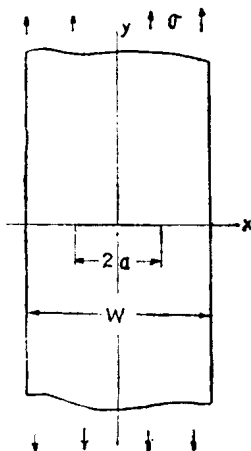


图3.1

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(1 + 0.5948\lambda^2 + 0.4812\lambda^4 + 0.3963\lambda^6 + 0.3238\lambda^8 \right) \quad (3.3)$$

同样的带板, 在无限远处, 受到 $\sigma_\infty = \sigma \frac{x}{a}$ 的应力,

用同样的解法, 对有裂纹的平板的 K_I 为:

$$K_I = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\pi a} \left(1 + 0.4079\lambda^4 + 0.1456\lambda^6 \right) \quad (3.4)$$

而根据具有椭圆孔的半无限板的受拉结果, 有裂纹时的 K_I 为:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(1 + 0.25\lambda^2 + 0.125\lambda^4 + 0.1328\lambda^6 + 0.0781\lambda^8 + 0.0918\lambda^{10} \right) \quad (3.5)$$

但是, 用上述简单的方法能求出 K_I 的情况是有限的, 一般情况必须用直接解析法。

3.2. 解析的方法

3.2.1. 裂纹尖端附近的应力场

在平面问题范围内, 裂纹尖端附近的弹性应力分布是根据 M. L. Williams [5] 的计算求得的。

Airy 的应力函数 $X(r, \theta)$ 是基于:

当 $\begin{cases} \theta = 0 \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad \theta = \alpha$ 这样的边界条件而求得的 (图3.2)

$$X = \sum r^{\lambda+1} \left[C_1 \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cos(\lambda+1)\theta + C_3 \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cos(\lambda-1)\theta \right] \quad (3.6)$$

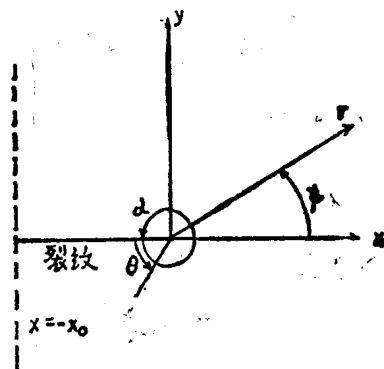


图3.2

根据边界条件得:

$$\theta = 0, \quad \sigma_\theta = 0,$$

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (3.7)$$

$$\theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = 0,$$

$$C_1 \sin(\lambda+1)\alpha + C_2 \cos(\lambda+1)\alpha + C_3 \sin(\lambda-1)\alpha + C_4 \cos(\lambda-1)\alpha = 0 \quad (3.8)$$

$$\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$(\lambda+1)C_1 + (\lambda-1)C_3 = 0 \quad (3.9)$$

$$\theta = \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\begin{aligned} & (\lambda+1) \{ C_1 \cos(\lambda+1)\alpha - C_2 \sin(\lambda+1)\alpha \} \\ & + (\lambda-1) \{ C_3 \cos(\lambda-1)\alpha - C_4 \sin(\lambda-1)\alpha \} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

由此得出: $\sin \lambda \alpha = \pm \sin \alpha$

其中当 $\alpha = 2\pi$ 时,

$$\sin 2\pi \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{n}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

又当 $C_2 = -C_4$ 时,

$$C_1 = -\frac{n-2}{n+2} C_3$$

$$\begin{aligned} \therefore X \left(r, \theta; \frac{n}{2} \right) &= r^{\frac{n}{2}+1} \left[C_3 \left\{ \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta - \frac{n-2}{n+2} \sin \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left\{ \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta - \cos \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \} \} \quad (3.11)$$

如果当 $\theta = \pi + \psi$ 时, 代入式 (3.11), 整理后得到:

$$\chi = \chi_o + \chi_e \quad (3.12)$$

上式中 χ_o 是奇函数, χ_e 是偶函数。

即:

$$\begin{aligned} \chi_o = & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_{2m} r^{m+1} \left[\frac{m-1}{m+1} \sin \right. \\ & \left. (m+1)\psi - \sin(m-1)\psi \right] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_{2m-1} r^{m+1/2} \left[\sin \right. \end{aligned}$$

$$\left(m - \frac{3}{2} \right) \psi - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) \psi \} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \chi_e = & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_{2m} r^{m+1} \left[\cos(m+1)\psi - \right. \\ & \left. \cos(m-1)\psi \right] + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} a_{2m-1} \\ & r^{m+1/2} \left[\frac{2m-3}{2m+1} \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. \psi - \cos \left(m - \frac{3}{2} \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

a_i, b_i 是根据荷载条件决定的。下式中如果写出前几项:

$$\begin{aligned} \chi(r, \psi) = & r^{3/2} \left[a_1 \left(-\cos \frac{\psi}{2} - \frac{1}{8} \cos \frac{3\psi}{2} \right) + b_1 \left(-\sin \frac{3\psi}{2} - \sin \frac{3}{2}\psi \right) \right] \\ & + a_2 r^2 (1 - \cos 2\psi) + o(r^{5/2}) + \dots \\ \sigma_r(r, \psi) = & \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[-5\cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{3\psi}{2} \right] + b_1 \left[-\sin \frac{\psi}{2} + 3\sin \frac{3\psi}{2} \right] \right\} \\ & + a_2 \cos^2 \psi + o(r^{1/2}) \\ \sigma_\psi(r, \psi) = & \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[-3\cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{3\psi}{2} \right] + b_1 \left[-3\sin \frac{\psi}{2} + 3\sin \frac{3\psi}{2} \right] \right\} \\ & + 4a_2 \sin^2 \psi + o(r^{1/2}) \\ \tau_{r\psi}(r, \psi) = & \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[-\sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{3\psi}{2} \right] + b_1 \left[\cos \frac{\psi}{2} + 3\cos \frac{3\psi}{2} \right] \right\} \\ & - 2a_2 \sin 2\psi + o(r^{1/2}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

则可分为二种应力场: 对称应力场 ($b_1 = 0$), 及非对称应力场 ($a_1 = 0$)。在直角坐标系中, 这二种情况可分别写为下式:

对称应力场:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = & \frac{-a_1}{r^{1/2}} \cos \frac{\psi}{2} \left[1 - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{3\psi}{2} \right] \\ \sigma_y = & \frac{-a_1}{r^{1/2}} \cos \frac{\psi}{2} \left[1 + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{3\psi}{2} \right] \\ \tau_{xy} = & \frac{-a_1}{r^{1/2}} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{3\psi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

非对称应力场:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = & \frac{-b_1}{r^{1/2}} \sin \frac{\psi}{2} \left(2 + \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{3\psi}{2} \right) \\ \sigma_y = & \frac{-b_1}{r^{1/2}} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{3\psi}{2} \\ \tau_{xy} = & \frac{-b_1}{r^{1/2}} \cos \frac{\psi}{2} \left[1 - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{3\psi}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.2.2. 应力强度因子的推算

作为计算例题, 考虑了一个具有长度为 $2a$ 的裂纹的无限板, 在其各向受有同样的拉伸应力 σ 的情况 (如图3.3所示)。像这种情况, 对于 X 轴具有对称的应力场, 所以当 $y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, 这样:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = & R_e \{ Z_1(z) \} - y I_m \{ Z'_1(z) \} \\ \sigma_y = & R_e \{ Z_1(z) \} + y I_m \{ Z'_1(z) \} \\ \tau_{xy} = & -y I_m R_e \{ Z'_1(z) \} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

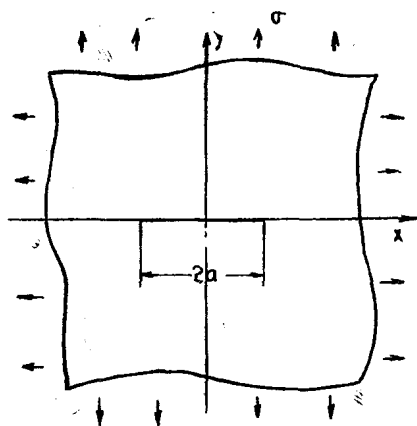


图3.3

当 $Z_1(z) = \frac{\sigma z}{(z-a^2)^{1/2}}$ 时, 得到: (3.19)

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = 0 \quad (3.20)$$

在一般情况下, 可用下式表示:

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \times \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ \sqrt{z - z_1} \psi'(z) \right\} \quad (3.21)$$

上式中 $\psi(z)$ 是 Goursat 的应力函数。

3.3. 根据有限单元法求解应力强度因子

下面介绍根据有限单元法, 求解应力强度因子的二种不同方法 [6]: (1) 直接法: 用有限单元法求得应力或位移, 再根据应力或位移求 K 。(2) 能量法: 用有限单元法求变形能释放率, 再根据这个求 K 。

以上两种方法都是根据位移法, 采用三角形单元体, 以及线性位移函数, 得到关于张开型裂纹的 K_I 值的。

3.3.1. 直接法

根据位移求解 K_I 以及根据应力求 K_I , 这两种方法相比, 前者精度较高。

(a) 根据位移法求 K_I

用有限单元法直接求 K_I , 这是不可能的。在平面应力情况下, 裂纹尖端的张开 v 可用下式求得:

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{1+\gamma} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.22)$$

(参照式 (2.7), 但式 (2.7) 是在平面应变状态下得到的)

或者是:

$$K_I = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{1+\gamma} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] G_v \quad (3.22)$$

小林用大约800个单元, 来决定裂纹上A点 (图3.4) 的 v , 因此以裂纹宽度和板宽之比 a/b 作为函数去求 K_I , 这样, 和解析法得到的结果基本一致 (图3.5)。

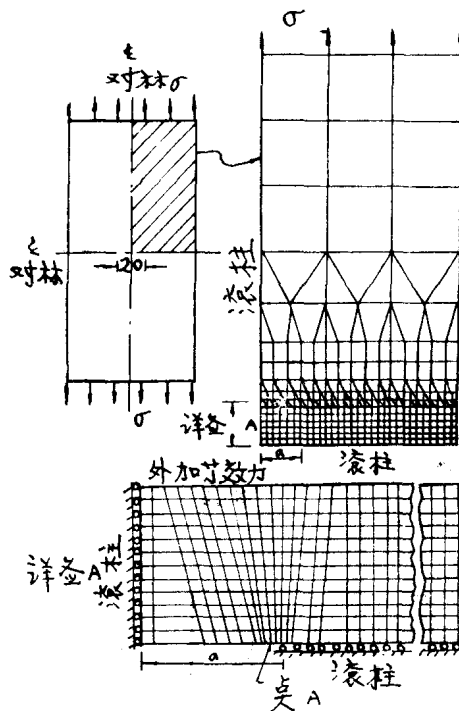


图3.4

(b)、根据应力求 K_I

这时裂纹尖端的应力可用下式求得:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.23)$$

(参照式 (2.7))

或者是:

$$K_I = \frac{\sigma_r \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]} \quad (3.23)$$

当 θ 一定时, 改变 r , 则可求得当 $r=0$ 时的 K_I 值。

3.3.2. 能量法

这种方法是从断裂力学中能量和断裂韧性之间的基本关系中推导出来的, 这个方法在有限单元法中的应用是由 Dixon 和 Pook, Deverall 和 Lindsey

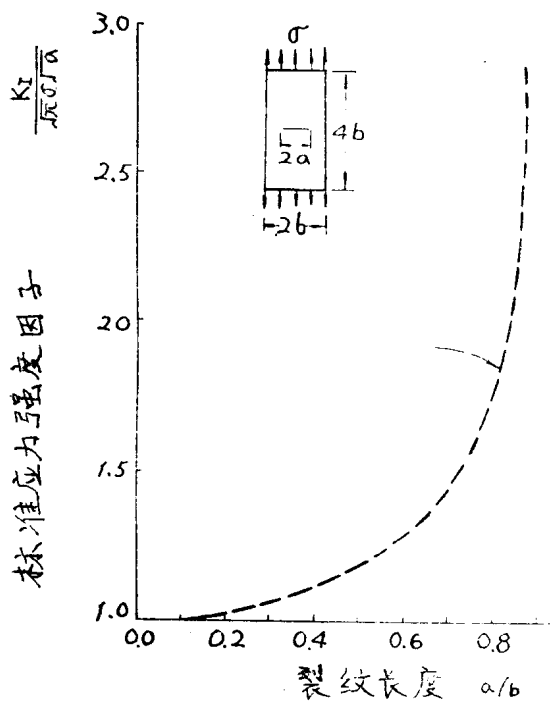


图3.5

以及Watwood 等人提出来的。

也就是, 变形能的变化比值, 和裂纹长度及应力强度因子之间有如下的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{K_I^2 t}{E} \quad (\text{平面应力状态})$$

(式中 t 为板厚)

$$\therefore K_I = \sqrt{\frac{E \Delta U}{t \Delta a}} \quad (3.24)$$

计算出裂纹长度为 a 时, 变形能为 U , 裂纹长度为 $a + \Delta a$ 时, 变形能相应地为 $U + \Delta u$ 。式 (3.24) 右端解得后, 即可决定 K_I 值。推导方程用的网格, 不必取得太细。图3.6中所示, 是Dixon和Pook两人, 根据受到集中载荷具有中央裂纹的平板所得到的结果, 并和石田, Irwin两人所得的结果进行了比较。这时大约是用300个单元, (小林用了800个单元!)

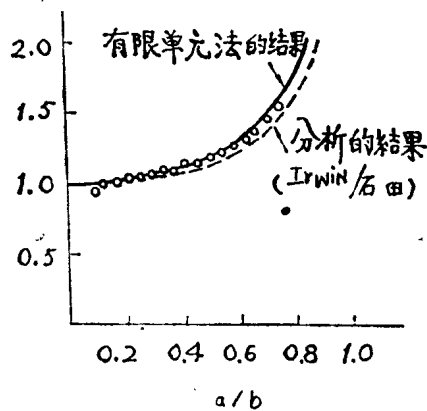
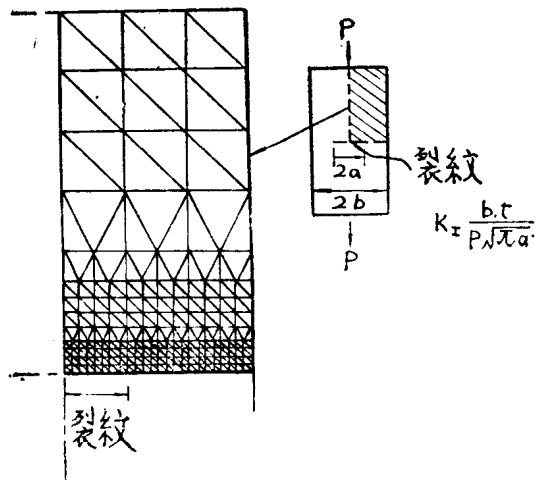
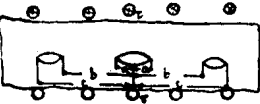
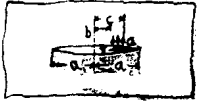
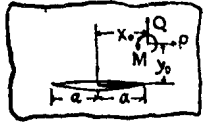
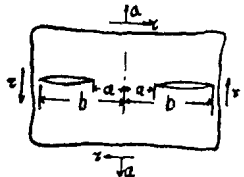
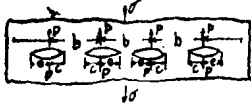
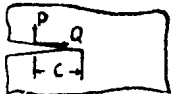
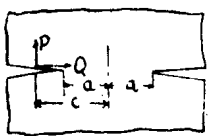
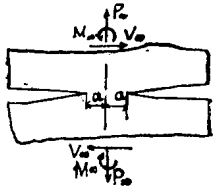


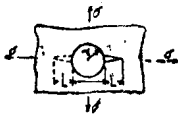
图3.6

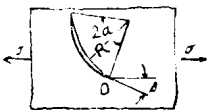
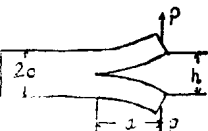
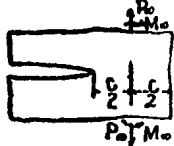
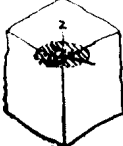
3.4. 应力强度因子的资料。

№	裂纹种类	K
1	按照应力集中决定的应力强度因子的公式 I 型裂纹	模型 I: $K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\pi^{1/2}}{2} \sigma_{\text{最大}} \rho^{1/2}$ $K_{II} = K_{III} = 0$ $\rho: \text{切口的尖端半径}$ $\sigma_{\text{最大}}: \text{切口尖端的最大垂直应力}$
2	" II 型裂纹	模型 I: $K_{II} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\pi^{1/2}}{2} \sigma_{\text{最大}} \rho^{1/2}$ $K_I = K_{III} = 0, \text{等等}$
3	" III 型裂纹	模型 I: $K_{III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\pi^{1/2}}{2} \tau_{\text{最大}} \rho^{1/2}$ $K_I = K_{II} = 0$ $\tau_{\text{最大}}: \text{切口尖端的最大剪切应力}$
4	受有均匀拉伸应力的无限板中的裂纹 (任意倾斜方向)	 $\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma \sin^2 \beta (\pi a)^{1/2} \\ K_{II} &= \sigma \sin \beta \cos \beta (\pi a)^{1/2} \\ \phi(\eta) &= \frac{\sigma(1 - e^{-2i\beta})a}{4\eta} \end{aligned} \right\}$ 
5	无限板中的裂纹 (在裂纹表面的局部上受有均布载荷)	裂纹的右端: $K_I = \frac{\sigma a^{1/2}}{2\pi^{1/2}} \left\{ \sin^{-1} \frac{c}{a} - \sin^{-1} \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \right\} + \frac{\tau(c-b)}{2(\pi a)^{1/2}} \left(\frac{K-1}{K+1} \right)$ $K_{II} = \frac{\sigma(c-b)}{2(\pi a)^{1/2}} \left(\frac{K-1}{K+1} \right) + \frac{\tau a^{1/2}}{2\pi^{1/2}} \left\{ \sin^{-1} \frac{c}{a} - \sin^{-1} \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \right\}$  而上式中的K $K = 3 - 4\gamma \quad (\text{平面应变状态})$ $K = \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} \quad (\text{平面应力状态})$

№	裂 纹 种 类	K
6	无限板中的裂纹 (在板中的一点上受有集中力和力矩的作用)。 	裂纹的右端: $K = K_I - iK_{II} = \frac{1}{2(\pi a)^{1/2}(1+K)} \left\{ (P+iQ) \times \left[\frac{a+Z_0}{(\bar{Z}^2-a^2)^{1/2}} - \frac{K(a+z_0)}{(z_0^2-a^2)^{1/2}} - 1+K \right] + \frac{a(P-iQ)(\bar{Z}_0-Z_0)+ai(1+K)M}{(Z_0-a)(\bar{Z}_0^2-a^2)^{1/2}} \right\}$ 上式中: $Z_0 = x_0 + iy_0, \quad \bar{Z}_0 = x_0 - iy_0$
7	在无限板内的一直线上, 有两个等长的裂纹 (受均匀拉伸的情况) 	在一直线上两个等长的裂纹的接近端: $K_I = \sigma \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2} \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{(b^2 - a^2)^{1/2}}$ $K_{II} = \tau \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2} \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{(b^2 - a^2)^{1/2}}$ 外端: $K_I = \sigma (\pi b)^{1/2} \left(\frac{1}{K} - \frac{E(k)}{kK(k)} \right)$ $K_{II} = \tau (\pi b)^{1/2} \left(\frac{1}{K} - \frac{E(k)}{kK(k)} \right)$ 上式中的 $K = \left[1 - \frac{a^2}{b^2} \right]^{1/2}$ 为第一种, 第二种完全椭圆积分 $E(k)$, $K(k)$ 的参数
8	在无限板内的一直线上, 有一裂纹组 	在图中所示的 e 端 $K_I = \left\{ \frac{\sigma (4b)^{1/2} \sin \frac{\pi c}{2b}}{\left[\cos \frac{\pi e}{2b} \left(\sin \frac{\pi e}{2b} + \sin \frac{\pi c}{2b} \right) \right]^{1/2}} + \frac{P \left(\sin \frac{\pi c}{2b} \right)^{1/2}}{\left[b \sin \frac{\pi e}{2b} \cos \frac{\pi e}{2b} \left(\sin \frac{\pi e}{2b} + \sin \frac{\pi c}{2b} \right) \right]^{1/2}} \right\}$ $K_{II} = 0$

№	裂 纹 种 类	K
9	具有半无限裂纹的无限板 	$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{P}{(2\pi c)^{1/2}} \\ K_{II} &= \frac{Q}{(2\pi c)^{1/2}} \end{aligned} \right\}$
10	在无限板上， 位于同一直线上的二个半无限裂纹（裂纹上受有集中力） 	左侧裂纹的尖端： $K_I = \frac{P (c^2 - a^2)^{1/2}}{2 (\pi a)^{1/2} (c - a)}$ $K_{II} = \frac{Q (c^2 - a^2)^{1/2}}{2 (\pi a)^{1/2} (c - a)}$ 右侧裂纹的尖端： $\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{P (c^2 - a^2)^{1/2}}{2 (\pi a)^{1/2} (c - a)} \\ K_{II} &= \frac{Q (c^2 - a^2)^{1/2}}{2 (\pi a)^{1/2} (c - a)} \end{aligned} \right\}$
11	具有深的双曲线形切口的无限板 	只有 P_∞（作用在单位厚度上的力）时： $\sigma_{\text{最大}} = \frac{2 \left(\frac{a}{p} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{p}{a} \right)}{\left(1 + \frac{p}{a} \right) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a}{p} \right)^{1/2} + \left(\frac{p}{a} \right)^{1/2}}$ $\sigma_{\text{net}} = \frac{P_\infty}{2a}$ 只有 V_∞ 时： $\sigma_{\text{最大}} = \frac{\left(\frac{a}{p} + 1 \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{p}{a} \right) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a}{p} \right)^{1/2} - \left(\frac{p}{a} \right)^{1/2}}$ $\tau_{\text{net}} = \frac{V_\infty}{2a}$ 只有 M_∞ 时： $\sigma_{\text{最大}} = \frac{4 \left(\frac{a}{p} \right)^{1/2}}{3 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{p}{a} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{a}{p} \right)^{1/2} \right]}$ $\sigma_{\text{net}} = \frac{3M_\infty}{2a^2}$ 右侧裂纹的尖端：

№	裂 纹 种 类	K																																																																																					
		$K_I = \frac{P_\infty}{(\pi a)^{1/2}} + \frac{2 M_\infty}{\pi^{1/2} a^{3/2}}$ $K_{II} = \frac{V_\infty}{(a)^{1/2}}$																																																																																					
12	从园孔中出来的裂纹 	$\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{L\pi F\left(\frac{L}{r}\right)} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$																																																																																					
	<table><tr><td></td><td colspan="2">F(L/r) 1个裂纹</td><td colspan="2">F(L/r) 2个裂纹</td></tr><tr><td>L/r</td><td>1轴 应力</td><td>2轴 应力</td><td>1轴 应力</td><td>2轴 应力</td></tr><tr><td>0.00</td><td>3.39</td><td>2.26</td><td>3.39</td><td>2.26</td></tr><tr><td>0.10</td><td>2.73</td><td>1.98</td><td>2.73</td><td>1.98</td></tr><tr><td>0.20</td><td>2.30</td><td>1.82</td><td>2.41</td><td>1.83</td></tr><tr><td>0.30</td><td>2.04</td><td>1.67</td><td>2.15</td><td>1.70</td></tr><tr><td>0.40</td><td>1.86</td><td>1.58</td><td>1.96</td><td>1.61</td></tr><tr><td>0.50</td><td>1.73</td><td>1.49</td><td>1.83</td><td>1.57</td></tr><tr><td>0.60</td><td>1.64</td><td>1.42</td><td>1.71</td><td>1.52</td></tr><tr><td>0.80</td><td>1.47</td><td>1.32</td><td>1.58</td><td>1.42</td></tr><tr><td>1.0</td><td>1.37</td><td>1.22</td><td>1.45</td><td>1.38</td></tr><tr><td>1.5</td><td>1.18</td><td>1.06</td><td>1.29</td><td>1.26</td></tr><tr><td>2.0</td><td>1.06</td><td>1.01</td><td>1.21</td><td>1.20</td></tr><tr><td>3.0</td><td>0.94</td><td>0.93</td><td>1.14</td><td>1.13</td></tr><tr><td>5.0</td><td>0.81</td><td>0.81</td><td>1.07</td><td>1.06</td></tr><tr><td>10.0</td><td>0.75</td><td>0.75</td><td>1.03</td><td>1.03</td></tr><tr><td>∞</td><td>0.707</td><td>0.707</td><td>1.00</td><td>1.00</td></tr></table>		F(L/r) 1个裂纹		F(L/r) 2个裂纹		L/r	1轴 应力	2轴 应力	1轴 应力	2轴 应力	0.00	3.39	2.26	3.39	2.26	0.10	2.73	1.98	2.73	1.98	0.20	2.30	1.82	2.41	1.83	0.30	2.04	1.67	2.15	1.70	0.40	1.86	1.58	1.96	1.61	0.50	1.73	1.49	1.83	1.57	0.60	1.64	1.42	1.71	1.52	0.80	1.47	1.32	1.58	1.42	1.0	1.37	1.22	1.45	1.38	1.5	1.18	1.06	1.29	1.26	2.0	1.06	1.01	1.21	1.20	3.0	0.94	0.93	1.14	1.13	5.0	0.81	0.81	1.07	1.06	10.0	0.75	0.75	1.03	1.03	∞	0.707	0.707	1.00	1.00	
	F(L/r) 1个裂纹		F(L/r) 2个裂纹																																																																																				
L/r	1轴 应力	2轴 应力	1轴 应力	2轴 应力																																																																																			
0.00	3.39	2.26	3.39	2.26																																																																																			
0.10	2.73	1.98	2.73	1.98																																																																																			
0.20	2.30	1.82	2.41	1.83																																																																																			
0.30	2.04	1.67	2.15	1.70																																																																																			
0.40	1.86	1.58	1.96	1.61																																																																																			
0.50	1.73	1.49	1.83	1.57																																																																																			
0.60	1.64	1.42	1.71	1.52																																																																																			
0.80	1.47	1.32	1.58	1.42																																																																																			
1.0	1.37	1.22	1.45	1.38																																																																																			
1.5	1.18	1.06	1.29	1.26																																																																																			
2.0	1.06	1.01	1.21	1.20																																																																																			
3.0	0.94	0.93	1.14	1.13																																																																																			
5.0	0.81	0.81	1.07	1.06																																																																																			
10.0	0.75	0.75	1.03	1.03																																																																																			
∞	0.707	0.707	1.00	1.00																																																																																			
13	以一定厚度的楔所张开的半无限裂纹 	$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{Eh}{(2\pi a)^{1/2}} \quad (\text{平面应力情况}) \\ K_{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$																																																																																					
14	在裂纹产生之前, 用夹板进行加荷 	$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{\sigma h^{1/2}}{2^{1/2}} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned} \right\}$																																																																																					

№	裂 纹 种 类	K
15	无限板中的圆弧裂纹 (受任意方向的一个轴向拉力)	关于在 0 点的裂纹尖端的 K 值 $K_I = \frac{\sigma(\pi R \sin \alpha)^{1/2}}{2 \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \left(2\beta + \frac{5}{2} \alpha \right) \right.$ $\times \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] - \cos \left(2\beta + \frac{3}{2} \alpha \right) \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] - \sin \left(2\beta + \frac{3}{2} \alpha \right) \left[\sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] \left. \right\}$  $K_{II} = \frac{\sigma(\pi R \sin \alpha)^{1/2}}{2 \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(2\beta + \frac{5}{2} \alpha \right) \right.$ $\times \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] + \sin \left(2\beta + \frac{3}{2} \alpha \right) \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] - \cos \left(2\beta + \frac{3}{2} \alpha \right) \left[\sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] \left. \right\}$
16	矩形断面杆的撕裂	楔的情况 $K_I = \frac{3^{1/2} E h c^{3/2}}{4 a^2} \left. \begin{array}{l} \\ K_{II} = 0 \quad (a \gg 2c) \end{array} \right\}$  撕裂力的情况 $K_I = \frac{2 \times (8)^{1/2} P \cdot a}{c^{3/2}} \left. \begin{array}{l} \\ K_{II} = 0 \end{array} \right\}$
17	向半无限板的自由端迫近的半无限切口	 $K_I = \pi^{1/2} \left(\frac{4\pi - 12}{\pi^2 - 8} \right) \frac{P_\infty}{c^{1/2}} + \pi^{1/2} \left(\frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} \right) \frac{M_\infty / c^{1/2}}{c^{1/2}} \left. \begin{array}{l} \\ K_{II} = 0 \end{array} \right\}$
18	具有园板裂纹的物体 (负荷为轴对称)	 $P(r)$ 为裂纹表面的轴对称垂直压力的分布式: $K_I = \frac{P}{(\pi a)^{1/2}} \int_0^a \frac{r p(r)}{(a^2 - r^2)^{1/2}} dr$ $K_{II} = 0$