



数学全程测试丛书

线性代数

全程测试

杨雅琴 杨锡宝 岳贵新 主编
王学理 主审



NEUPRESS
东北大学出版社

线性代数全程测试

主 编 杨雅琴 杨锡宝 岳贵新
主 审 王学理

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 杨雅琴等 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数全程测试 / 杨雅琴, 杨锡宝, 岳贵新主编. — 沈阳 :
东北大学出版社, 2003.3

ISBN 7-81054-811-5

I. 线… II. 杨… III. 线性代数—高等学校—教学参考资料
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 050086 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 140mm×203mm

印 张: 7.25

字 数: 188 千字

出版时间: 2003 年 3 月第 1 版

印刷时间: 2003 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘 莹 刘宗玉 责任校对: 文 玉

封面设计: 唐敏智 责任出版: 杨华宁

定 价: 10.00 元

前 言

对于理工科专科学子和学习“少学时数学课”的部分本科学生来说，数学课似乎有更大的压力，大家往往视其为一块“难啃的骨头”。虽然学时有所减少，深度略有下降，但内容并没有太多的减少，涉猎面基本相同，故学习负担并未减轻多少。面对晦涩的叙述、抽象的概念，学子们确有望而生畏之感。

通过多年的数学教学实践，我们深深体会到，学好数学的关键是理清数学概念，掌握解题方法，而达到这一目的行之有效的措施就是大量演练习题。但数学习题数不胜数，而学生们又往往由于课程多、时间紧，根本不可能做太多的习题。正是针对这种状况，我们准备编写一套少而精的测试题集，以辅助日常学习为出发点，以提高期末考试成绩为目的，追求的是用时少而效率高。经过大家的努力，这套“数学全程测试丛书”出版了，希望它能成为学生们学习数学课期间的良师益友。这套书的主要特点是：

1. 全部是测试题。精心选择的各类试题，既基本又典型，面广但不重复，循序渐进，重点突出，最终目标是让学生在尽可能短的时间内巩固基本概念、掌握解题方法。

2. 全程、同步测试。书的内容与教材基本一致，按教材的章节安排书的层次，全程、同步测试。“归类测试”是每章后的测试题，意在学到哪儿，就测试到哪儿，及时“消化”所学知识。期末测试则是为系统学习、全面巩固各科知识而准备的试题若干套，其作用是不言而喻的。

3. 解答详尽。所有试题均给出详尽解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因；有些还结合解题过程对学习的思维方式予以指导，并提示解题技巧。

本书为丛书的“线性代数”部分，即《线性代数全程测试》。全书分为两大部分，共有测试题 38 套。第一部分为归类测试，设有六讲，每讲含三套题，要求每套 2 小时完成，每套题均含填空题、选择题（单项）、计算题、综合题、证明题五种类型。第二部分为期末测试，共有测试题 20 套，每套要求 2 小时完成。

本书主编为杨雅琴、杨锡宝、岳贵新，参加编写的还有刘国良、胡中盛、项荣武。全书由王学理审定。

本书适用于理工科专科学生和学习“少学时数学课”的本科学生，对于“线性代数”任课老师，亦有很高的参考价值。

由于作者水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，还望同仁及读者不吝赐教。

作 者

2002 年 8 月

目 录

第一部分 归类测试	1
-----------------	---

第一讲 行列式	1
---------------	---

第二讲 矩阵	9
--------------	---

第三讲 向量	16
--------------	----

第四讲 线性方程组	24
-----------------	----

第五讲 特征值与特征向量	33
--------------------	----

第六讲 二次型	40
---------------	----

第二部分 期末测试	46
-----------------	----

试题答案及详解	90
---------------	----

第一部分 归类测试	90
-----------------	----

第一讲 行列式	90
---------------	----

第二讲 矩阵	99
--------------	----

第三讲 向量	111
--------------	-----

第四讲 线性方程组	122
-----------------	-----

第五讲 特征值与特征向量	134
--------------------	-----

第六讲 二次型	147
---------------	-----

第二部分 期末测试	162
-----------------	-----

第一部分 归类测试

第一讲 行列式

第一套

一、填空题 ($4 \times 4 = 16$ 分)

1. 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ b & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 在 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中, 项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$ 前的符号应取 号; 项 $a_{32}a_{21}a_{45}a_{13}a_{54}$ 前的符号应取 号.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 的代数余子式为 .

4. 已知 4 阶行列式中第 3 列元素依次为 $-1, 2, 0, 1$, 它们的余子式依次分别为 $5, 3, -7, 4$, 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 ($5 \times 3 = 15$ 分)

1. 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 的值为 [].

(A) -1 ; (B) 1 ; (C) $2\sin^2\alpha$; (D) $2\cos^2\alpha$.

2. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$, 则 $x = [\quad]$.

(A) -3; (B) -2; (C) 2; (D) 3.

3. 若线性方程组 $\begin{cases} \lambda x - y = a \\ -x + \lambda y = b \end{cases}$ 有惟一解, 则 $\lambda [\quad]$.

(A) 可为任意实数; (B) 等于 ± 1 ;
(C) 不等于 ± 1 ; (D) 不等于零.

三、计算题 ($6 \times 4 = 24$ 分)

1. 求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 若线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 a 的值.

3. 若 a, b, c 均为非零实数, 求线性方程组 $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$ 的解.

(用克莱姆法则)

4. 按第 3 列展开行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

四、综合题 ($12 + 11 = 23$ 分)

1. $f(x) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$, 问 $f(x)$ 是几次多项式? 其一次项的

系数是多少?

2. 如果对于 n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 及其代数余子式 A_{ij} , 总有

$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$), 那么 D 的值为多少?

五、证明题 (11×2=22 分)

1. 若 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 - a_1 & 2b_2 - a_2 & 2b_3 - a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6$, 求证

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3.$$

2. 用 A_j 表示 3 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的第 j 列 ($j = 1, 2, 3$), 已知 $|a_{ij}| = -2$, 求证 $|A_3 - 2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1| = 6$.

3. 证明齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 仅有零解.

第二套

一、填空题 (4×4=16 分)

1. 排列 $13 \cdots (2n-1)24 \cdots (2n)$ 的逆序数为_____.

2. 6 阶行列式中 $a_{21}a_{12}a_{56}a_{43}a_{35}a_{64}$ 的符号为_____.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 x 的代数余子式是_____.

二、选择题 ($5 \times 3 = 15$ 分)

- 5 阶行列式的展开式共有[]项.
(A) 5^2 ; (B) $5!$; (C) 10; (D) 15.
- 行列式 $D=0$ 的必要条件是[].
(A) D 中有两行(列)元素对应成比例;
(B) D 中至少有一行各元素可用行列式的性质化为 0;
(C) D 中有一行元素全为 0;
(D) D 中任意一行各元素都可用行列式的性质化为 0.
- 若齐次线性方程组有非零解, 则它的系数行列式 D [].
(A) 必为 0; (B) 必不为 0;
(C) 必为 1; (D) 可取任何值.

三、计算题 ($7 \times 5 = 35$ 分)

1. 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

3. 求方程

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 4 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

的解.

4. 决定 i 和 j , 使排列 1245*i*6*j*97 为奇排列.

5. 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

四、综合题 (10+9=19分)

1. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

2. 已知

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

求 x, y, z .

五、证明题 (8+7=15 分)

1. 设 α, β, γ 为互不相等的实数, 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = 0$ 的充

要条件是 $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

2. 证明

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

第三套

一、填空题 (4×4=16 分)

1. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$, 则 x^4 项的系数为_____.

2. 排列 217986354 的逆序数为_____.

3. 在 4 阶行列式中, 包含因子 a_{31} 的项是_____.

4. n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与余子式 M_{ij} 之间的关系是_____.

二、选择题 (5×3=15 分)

1. 排列 $246 \cdots (2n)135 \cdots (2n-1)$ 的逆序数为[].

(A) n ; (B) 0; (C) $\frac{n(n-1)}{2}$; (D) $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. 设 $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$, 其中 a_1, a_2, a_3 不全为零, 那么 D

是[]行列式.

- (A) 对角形; (B) 上三角形;
(C) 下三角形; (D) 以上都对.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = [\quad]$.

- (A) $(a-b)^3$; (B) $(a+2b)(a+b)^2$;
(C) $(a+2b)(a-b)^2$; (D) $(a-2b)(a+b)^2$.

三、计算题 (7×5=35 分)

1. 选择 i 与 j , 使 3972*i*15*j*4 为偶排列.

2. 计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$.

3. 计算

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

4. 设

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

求第 1 行各元素的代数余子式.

5. 求方程组的解

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{11}{6}, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

四、综合题 (9×2=18 分)

1. 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1)=0$, $f(2)=3$, $f(-3)=28$.

2. 设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

由实验测定以下数据

$t/(^{\circ}\text{C})$	0	10	20	30
$h(t)/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	13.60	13.57	13.55	13.52

求 t 分别为 15°C 和 40°C 时水银的密度.

五、证明题 (8×2=16 分)

1. 已知 1632, 2160, 3696, 5024 都可被 16 整除. 不经计算,

证明 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 可被 16 整除.

2. 证明在 n 元排列中 ($n \geq 2$), 奇排列与偶排列个数相等, 各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

第二讲 矩 阵

第一套

一、填空题 (4×4=16 分)

1. $2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$, 则乘积 AB

= .

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 若已知 $|A| = m$, 则 $|-mA| = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 计算 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (1, 2, 3) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题 (5×3=15 分)

1. 有矩阵 $A_{3 \times 2}$, $B_{2 \times 3}$, $C_{3 \times 3}$, 下列[]运算可行.

(A) AC ; (B) BC ; (C) ACB ; (D) $AB - BC$.

2. 若 A 是[], 则 A 必为方阵.

(A) 可逆矩阵; (B) 任意矩阵;
(C) 齐次方程组系数阵; (D) 非齐次方程组系数阵.

3. 下列命题成立的是[].

(A) 若 $AB = AC$, 则 $B = C$; (B) 若 $AB = 0$, 则 $A = 0$ 或 $B = 0$;

(C) 若 $A \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$; (D) 若 $|A| \neq 0$, 则 $A \neq 0$.

4. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则[].

(A) $A+B$ 可逆; (B) kA 可逆 (k 为常数);

(C) AB 可逆; (D) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

5. 下列各矩阵中, 初等矩阵是[].

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

三、计算题 ($6 \times 4 = 24$ 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, 求 A^* 和 A^{-1} .

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $R(A)$.

4. 用初等变换的方法求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

四、综合题 ($9 \times 2 = 18$ 分)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $R(A)$.

2. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A| = 2$, $|B| = -3$, 求

$|2A^*B^{-1}|$ 的值.

五、证明题 (9×3=27 分)

1. 若对称矩阵 A 为非奇异矩阵, 则 A^{-1} 也是对称的.
2. 若 $A^2=A$, 但 A 不是单位矩阵, 则 A 必为奇异矩阵.

3. 证明矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 可逆.

第二套

一、填空题 (4×4=16 分)

1. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A|=3$, 则 $||A|A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$, $(A^*)^{-1} =$

$\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB =$

$\underline{\hspace{2cm}}$, $B^T A^T = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 (5×3=15 分)

1. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 则必有 [].
- (A) $|A+B| = |A| + |B|$; (B) $AB = BA$;