大学数学复习指导丛书

名校 名师 名作

概率论与数理统计复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 黄先开
曹显兵 施明存 编著

清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

概率论与数理统计复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯　黄先开
曹显兵　施明存　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、检验等。在概括讲述基本理论的基础上，对各种题型进行了深入浅出的分析和讲解，并对历年全国硕士研究生考试中概率论与数理统计试题进行分析和解答，使读者在短期内就能掌握各种解题方法和技巧，做到知识的融会贯通和触类旁通。

本套丛书可作为理工科本科学生扩大课堂的信息量，扎实掌握相关知识点和解题技巧的参考书，同时也是一本全面而系统的考研辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计复习指导：思路、方法与技巧/陈文灯等编著．—北京：清华大学出版社，2002

（大学数学复习指导丛书）

ISBN 7-302-06205-6

Ⅰ．概…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 105904 号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：苗建强
印 刷 者：北京昌平环球印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092 1/16　**印张**：13.25　**字数**：303 千字
版　　次：2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-06205-6/O・274
印　　数：0001～8000
定　　价：18.00 元

前　　言

本书是《高等数学复习指导——思路、方法、技巧》的姊妹篇。自1996年3月问世以来，深受广大读者的欢迎和支持。这次修订就是根据读者所提意见及多年来我们教学经验的积累进行的。新增加了“9种解题思维定势”，“单项选择题的解题技巧”，“综合题”“历年研究生入学考试试题及题解”等新内容。

本书特点：

(1)对重要的概念、定理、公式进行剖析，增强了读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法、技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有路可“循”。

(3)用“举题型讲方法”的方式代替同类书普遍采用的“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

(4)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然，记忆深刻。本书是面向在读本科生的，但对于电大、夜大生以及专科生也很有参考价值，尤其对参加考研和参加专升本的考生具有“指点江山”的作用。

由于作者的水平有限，定有不当及错误之处，敬请读者和数学同仁批评指正。

作者

2003.2

目　　录

第 1 章　事件的概率

1.1　基本概念与公式

1.1.1　加法、乘法原理，排列与组合

1. 加法原理　设完成一件事有 n 类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事)，若第 1 类方法有 m_1 种，第 2 类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

2. 乘法原理　设完成一件事须有 n 个步骤(仅当 n 个步骤都完成，才能完成这件事)，若第 1 步有 m_1 种方法，第 2 步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法.

注意:加法原理与乘法原理的区别在于前者完成一步即完成一件事;后者须 n 步均完成才完成一件事.

3. 排列　从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素取出 m 个元素的所有排列种数，记为

$$P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

将 n 个不同元素全部取出的排列称为全排列，其排列的种数，记为

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

规定 $0! = 1$.

4. 允许重复的排列　从 n 个不同元素中有放回地取 m 个元素按照一定顺序排列成一列. 其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \cdots \times n}_{m个} = n^m$$

5. 不全相异元素的全排列　若 n 个元素中，有 m 类($1 < m \leqslant n$)本质不同的元素，而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素($k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, 1 < k_i < n, i = 1, 2, \cdots, m$)，则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列. 其排列的种数为

$$N = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

6. 组合　从 n 个不同元素中取出 m 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合，其组合总数记为 C_n^m.

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质:

(1)$C_n^m = C_n^{n-m}$　　(2)$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

注意:排列与组合的区别在于前者与次序有关,后者与次序无关.

1.1.2　随机试验和随机事件

1.随机试验(记为 E)　若试验(观察或实验过程)满足条件:

(1)试验可在相同条件下重复进行;

(2)试验的结果具有多种可能性;

(3)试验前不能确切知道会出现何种结果,只知道所有可能出现的结果.

则该试验称为随机试验.

2.随机事件$\triangleq$随机试验 E 的一个结果,简称事件,用大写字母 A,B,C,D 表示.

3.基本事件(样本点)$\triangleq$随机试验 E 的每一个不可再分解的结果,用 w 表示.

4.基本事件空间(样本空间)$\triangleq$随机试验 E 的所有基本事件组成的集合,记为

$$\Omega = \Omega(w)$$

5.必然事件$\triangleq$在一定条件下,每次试验中一定要发生的事件,记为 U.

6.不可能事件$\triangleq$在一定条件下,每次试验中一定不发生的事件,记为 $\varnothing$.

1.1.3　事件的关系及其运算

1.事件的包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含 A(或 A 包含于 B),记为 $B \supset A$.

2.事件相等　若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

3.事件 A 与 B 之和(并)　$A \cup B$(或 $A+B$)$\triangleq$事件 A 与 B 至少有一个发生.

推广:

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \triangleq n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 至少有一个发生.

性质:

(1)$A \subset A \cup B$;　$B \subset A \cup B$

(2)$A \cap (A \cup B) = A$;　$B \cap (A \cup B) = B$

(3)$A \cup A = A$

4.事件 A 与 B 的差　$A - B \triangleq$事件 A 发生而 B 不发生.

性质:

(1)$A - B \subset A$

(2)$(A-B) \cup A = A$;　$(A-B) \cup B = A \cup B$

(3)$(A-B) \cap A = A - B$;　$(A-B) \cap B = \varnothing$

5.事件 A 与 B 的积　$A \cap B$(或 AB)$\triangleq$事件 A 与 B 同时发生.

推广:

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \triangleq n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq$无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 同时发生.

性质：

(1)$A\cap B\subset A$；　$A\cap B\subset B$

(2)$(A\cap B)\cup A=A$；　$(A\cap B)\cup B=B$

(3)$A\cap A=A$

6. 互斥事件　在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 为互斥事件.

推广：在试验中，若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 任意两个都是互斥的，则该事件组称为互斥事件组.

注意：

(1)在一次试验中，基本事件都是两两互斥的.

(2)若 A、B 互斥，则 $A\cap B=A+B$.

7. 对立事件　每次试验中，"事件 A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\bar{A}$.

特性：

(1)$A+\bar{A}=U$　(必然事件)

(2)$A\bar{A}=\varnothing$　(不可能事件)

由定义可知：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

8. 事件的运算律(与集合的运算律相似)

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$；　$AB=BA$

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$；　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

(4)摩根律　$\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$；　$\overline{A_1\cap A_2}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\bar{A}_k;\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{A}_k$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k;\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k$$

(5)对减法运算满足　$A-B=A\bar{B}$(或 $A\cap\bar{B}$)

注意：

(1)事件的运算律非常重要，务必记熟，在后面的概率计算中，经常将一些事件用另一些事件的运算来表示.

(2)经常用文氏图帮助分析和理解事件的运算，尤其是两个事件的运算更是如此.

【例 1.1】　设 A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1)A 出现，B、C 都不出现　　(2)A、B 都出现，C 不出现

(3)三个事件都出现　　(4)三个事件中至少有一个出现

(5)三个事件都不出现　　(6)不多于一个事件出现

(7)不多于两个事件出现　　(8)三个事件至少有两个出现

(9)A、B 至少有一个出现，C 不出现　　(10)A,B,C 中恰好有两个出现

【解】　(1)$A\bar{B}\bar{C}$　(2)$AB\bar{C}$　(3)ABC　(4)$A+B+C$　(5)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(6)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB+BC+AC}$

(7)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

(9) $(A+B)\bar{C}$

(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

【例 1.2】 设一个工人生产了 4 个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1)没有 1 个是次品　　(2)至少有 1 个是次品

(3)只有 1 个是次品　　(4)至少有 3 个不是次品

(5)恰好有 3 个是次品　　(6)至多有 1 个是次品

【解】 (1) $A_1A_2A_3A_4$

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ 或 $\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$

(3) $\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4$

(4) $A_1A_2A_3\bar{A}_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$

(5) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$

(6) $A_1A_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4$

【例 1.3】 下列各式说明什么包含关系?

(1) $AB=A$　(2) $A+B=A$　(3) $A+B+C=A$

【解】 (1) $AB=A\Leftrightarrow AB\subset A$ 且 $A\subset AB$

由 $A\subset AB\Rightarrow A\subset A$ 且 $A\subset B\Rightarrow A\subset B$

(2) $A+B=A\Leftrightarrow A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$

由 $A+B\subset A\Rightarrow B\subset A$

(3) $A+B+C=A\Leftrightarrow A+B+C\subset A$ 且 $A\subset A+B+C$

由 $A+B+C\subset A\Rightarrow B+C\subset A$

【例 1.4】 写出下列各随机试验的样本空间：

(1)记录一个小班数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2)同时掷三颗骰子，记录三颗骰子点数和.

(3)10 只产品中有 3 只次品，每次从中取 1 只(不放回抽样)直到将 3 只次品都取出，记录抽取的次数.

(4)生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数.

(5)一个小组有 A、B、C、D、E 5 个人，要选正、副组长各一人(一个人不能兼二职)，观察选举结果.

(6)甲乙二人下棋一局，观察棋赛结果.

(7)一口袋中有许多红色、白色、蓝色乒乓球，在其中任取 4 只，观察它们具有哪几种颜色.

(8)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出二个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查结果.

(9)有 A、B、C 3 只盒子，a、b、c 3 个球，将 3 个球装入 3 只盒子中，使每只盒子装一个球，观察装球情况.

(10)将一尺之棰折成 3 段,观察各段的长度.

【解】 (1)某小班的人数为 n,每个人的考分可为 $0,1,2,\cdots,100$,于是该小班的平均考分可为:$\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times100}{n}$,故样本空间 $\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times100}{n}\right\}$.

(2)掷一颗骰子可能出现的点数 $1,2,\cdots,6$,掷三颗骰子可能出现的点数之和:$3,4,5,\cdots,18$,故样本空间 $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

(3)要将 3 只次品都取出,抽取的次数至少要 3 次,最多是 10 次(因为只有 10 个产品),故 $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$.

(4)要得到 10 件正品,产品的总件数起码应该是 10 件,故样本空间 $\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$.

(5)写在前表示正组长,写在后表示副组长,于是样本空间 $\Omega=\{AB,AC,AD,AE,BA,BC,BD,BE,CA,CB,CD,CE,DA,DB,DC,DE,EA,EB,EC,ED\}$.

(6)甲、乙两人下一局棋只可能有如下三种情况:甲胜乙负,乙胜甲负,和局.故样本空间 $\Omega=\{$甲胜乙负,乙胜甲负,和局$\}$.

(7)设 r、w、b 分别表示红色、白色、蓝色,rw 表示红色和白色,rb 表示红色和蓝色,wb 表示白色和蓝色,rwb 表示红、白、蓝三色,样本空间 $\Omega=\{r,w,b,rw,rb,wb,rwb\}$.

(8)设 0 表示次品,1 表示正品,由题设可知样本空间 $\Omega=\{00,0100,0101,0110,0111,100,1010,1011,1100,1101,1110,1111\}$.

(9)设 A、B、C 为三只盒子,A_a 表示球 a 放在盒子 A 中,其余类推,于是样本空间 $\Omega=\{A_aB_bC_c,A_aB_cC_b,A_bB_aC_c,A_bB_cC_a,A_cB_aC_b,A_cB_bC_a\}$.

(10)设 x、y、z 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度,它们应满足的关系:$0<x<1,0<y<1,0<z<1$,于是样本空间 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$.

1.1.4　概率的定义和性质

1. 古典概率定义

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,$n$ 为有限的正整数,且每个样本点 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$出现的可能性相等,则事件 $A=\{w_{i1},w_{i2},\cdots,w_{im}\}$出现的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}\quad(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n)$$

则

$$P(A)=\frac{\text{有利于事件 }A\text{ 的基本事件数 }m}{\text{基本事件的总数 }n}$$

2. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对于 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,如果它满足下列三条公理:

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant1$;

(2)$P(\Omega)=1$;

(3)如果在事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k\cdots$中,$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

3．几何概率

(1)设线段 l 是线段 L 的一部分,向线段 L 上任投一点,若投中线段 l 上的点的数目与该段的长度成正比,而与该线段 l 在线段 L 上的相对位置无关,则点投中线段 l 的概率为

$$P=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}$$

(2)设平面图形 g 是平面图形 G 的一部分,向图形 G 上任投一点,若投中图 g 上的点的数目与该图形面积成正比,而与该图形 g 在图 G 上的相对位置无关,则点投中图形 g 的概率为

$$P=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

(3)设空间形体 v 是空间形体 V 的一部分,则向 V 投点投中 v 的概率为

$$P=\frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}$$

4．概率的性质

性质 1　设有限多个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质也称为概率的加法定理.

性质 2　设 A 为任一随机事件,则 $P(\bar{A})=1-P(A)$

性质 3　设 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

当 $A\subset B$ 时,有 $P(A)\leqslant P(B)$

性质 4　设 A,B 为任意两个随机事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 4 习惯上称为广义加法定理.

推广:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k-3}^{n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

注意:

(1)性质 1 与性质 4 的区别:仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互斥事件组时才可用性质 1.

(2)巧妙运用对立事件的特性,即性质 2 可收到事半功倍的效果.一般来讲,求若干事件之中"至少"出现其中一件的概率,用对立事件求解较为简便.

1.1.5　概率的乘法公式、全概公式、逆概公式

1．乘法公式

条件概率　在事件 B 已经发生的条件下,计算事件 A 的概率,称这种概率为在事件 B 已发生的条件下事件 A 的条件概率,记作 $P(A|B)$,有如下计算公式:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

乘法定理 两事件的积事件的概率等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件出现下的条件概率的乘积,即

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

独立事件 如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率,则称这两事件是相互独立的,即

$$P(B|A) = P(B) \text{ 或 } P(A|B) = P(A)$$

则 A 与 B 独立.

也可这样定义:如果两事件 A、B 的积事件的概率等于这两事件的概率的乘积,则称两事件 A 与 B 是相互独立的,即

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

推广:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,如果对于任一组 $k_1,k_2,\cdots,k_s(2\leqslant s\leqslant n)$,(每组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 取 $1,2,\cdots,n$ 中的 s 个不同的值),等式

$$P(A_{k1}A_{k2}\cdots A_{ks}) = P(A_{k1})P(A_{k2})\cdots P(A_{k_s})$$

总成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意:

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立$\nRightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(2)4 对事件 $A,B;\bar{A},B;A,\bar{B};\bar{A},\bar{B}$ 之中有一对相互独立,则另外 3 对也相互独立.

(3)独立与互斥(不相容)的区别:两事件 A,B 相互独立是指事件 A 出现的概率与事件 B 是否出现没有关系,并不是说事件 A,B 之间没有关系;相反,若 A,B 独立,则常有 $AB\neq\varnothing$,即 A 与 B 非互斥(相容). A,B 互斥(不相容)是指事件 A 的出现必导致 B 的不出现,并没有说事件 A 出现的概率与事件 B 是否出现有关系. 事实上,若 A 与 B 互斥,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$,又 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,于是 $P(AB)=0$,而当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,$P(A)P(B)>0$. 可知 $P(AB)\neq P(A)P(B)$. 这就是说一般情况下,两个事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论.

2. 全概公式(定理)

如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足

(1)$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互斥,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$

(2)$B_1+B_2+\cdots+B_n=U$

则对任一事件 A 皆有以下全概公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

满足条件(1),(2)的事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 称为完备事件组,也称某随机试验 E 的样本空间. 用全概公式求解的概率问题关键在于寻找完备事件组(样本空间).

3. 逆概公式(贝叶斯公式)

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组,则对任一事件 A $(P(A)\neq0)$有

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_jA)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},\quad j=1,2,\cdots,n$$

注意:公式右边可这样记忆,分母为全概公式,是 n 项之和,分子是分母中的某一项.

1.1.6 独立试验序列概型

定理(伯努利公式) 设在单次试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次重

复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P(\text{“}A\text{ 发生 }k\text{ 次”}) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p)$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$.

下列各事件:在 n 次试验中

(A)事件 A 发生不到 k 次　　(B)事件 A 发生多于 k 次

(C)事件 A 发生不少于 k 次　　(D)事件 A 发生不多于 k 次

它们的概率分别为

(A)$P(A\text{ 发生不到 }k\text{ 次})=P(0)+P(1)+\cdots+P(k-1)$

(B)$P(A\text{ 发生多于 }k\text{ 次})=P(k+1)+P(k+2)+\cdots+P(n)$

(C)$P(A\text{ 发生不少于 }k\text{ 次})=P(k)+P(k+1)+\cdots+P(n)$

(D)$P(A\text{ 发生不多于 }k\text{ 次})=P(0)+P(1)+\cdots+P(k)$

1.2 事件概率的解题分析

1.2.1 计算题的类型及其特点

图 1-1 所示为事件概率的计算方法和计算公式.

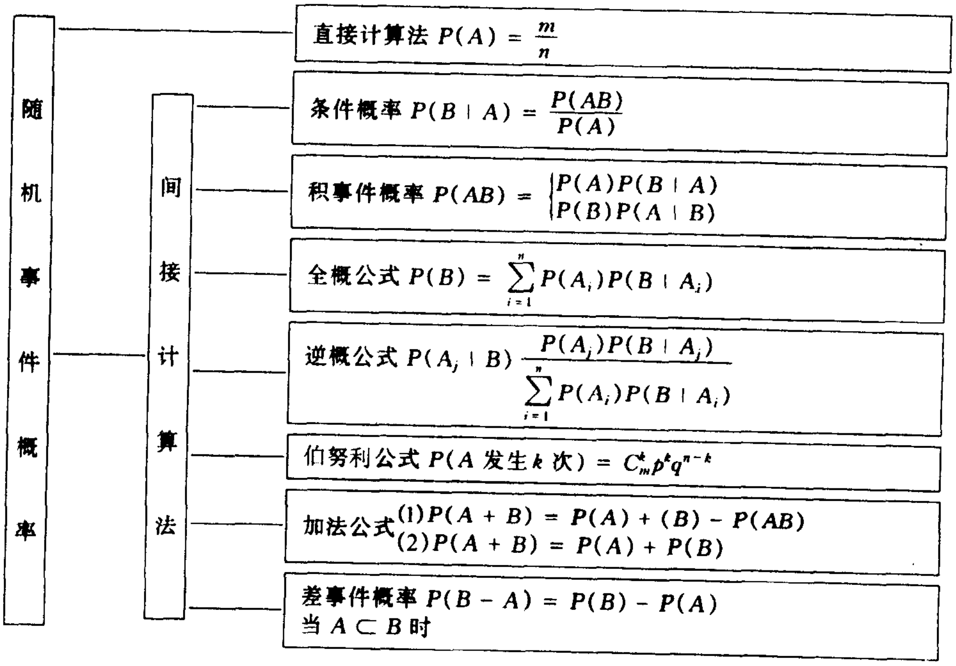

图 1-1

解题程序:

(1)判别事件概率的类型(由题设条件及所求概率,主要是后者);

(2)列出已知条件,求出应用类型公式所需要的条件;

(3)用类型公式计算出所要求的概率.

1. 直接计算法

解题程序:

(1)明确随机试验的类型,确定基本事件总数 n 并判断各事件是否为等可能事件;

(2)求出有利于事件 A 的基本事件个数 m;

(3)计算出 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

解题时应注意的几点:

(1)所求中有“至少”的问题,通常用“对立事件”解答较为简便.

(2)“任取 k 件”与“无放回地逐件抽取 k 件”虽然考虑问题的角度不同,但二者所计算出的概率却是相同的.

(3)“任取 k 件”与“有放回地逐件抽取 k 件”,所得概率一般是不同的.

(4)有些问题也可用“加法”或“乘法”的概率公式来分析.

【例 1.5】 袋中有 9 个球(4 白,5 黑),现从中任取两个,求:

(1)两个均为白球的概率.

(2)两个球中一个是白的,另一个是黑的概率.

(3)至少有一个黑球的概率.

【解】 (1)方法 1　随机试验为从 9 个球中任取 2 个,假设其与先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,且每事件为等可能性,有利于取两个白球的事件 A 的基本事件个数 P_4^2,故

$$P(A)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6}$$

方法 2　随机试验为从 9 个球中任取 2 个,设其与先后次序无关,则基本事件总数为 C_9^2,且每事件为等可能性,有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数 C_4^2,故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}$$

(2)方法 1　取球与先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,两球中一白一黑 = {先白后黑,先黑后白},其有利于取一白一黑事件 A 的基本事件个数 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$,故

$$P(A)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}$$

方法 2　取球与先后次序无关,则基本事件总数为 C_9^2,有利于取一白一黑事件 A 的基本事件个数 $C_4^1C_5^1$,故

$$P(A)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}$$

(3)取球与先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,至少有一个黑球的事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 是:任取的两个球均是白球,由概率的性质有

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

【例 1.6】 在电话号码薄中任取一个电话号码,求后面 4 个数全不相同的概率(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0,1,2,…,9).

【解】 本题与电话号码的位数无关.电话号码的数字是允许重复的,因此由 0,1,2,…,9 所构成的后 4 个数字的个数为 10^4,后“4 个数字全不相同”的个数为 P_{10}^4,故

$$P(A)=\frac{P_{10}^4}{10^4}=0.504$$

【例 1.7】 把 10 本书随意放在书架上,求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

【解】 基本事件总数 10!

有利于将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数:6!5!(其中 6!是指 5 本书当作一个元素进行全排列的总数,5!是 5 本书相互之间进行全排列的总数),故

$$P(A)=\frac{6!5!}{10!}=\frac{1}{42}$$

【例 1.8】 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去,这 15 名新生中有 3 名是优秀生,问:(1)每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?(2)3 名优秀生分在同一班级的概率是多少?

【解】 基本事件总数(15 名新生平均分配到三个班级中的分法总数),由不全相异元素的全排列计算公式有

$$\frac{15!}{5!5!5!}$$

(1)三个班级各分配到一个优秀生的分法有 3! 种,对于每一种这样的分法,12 名非优秀生平均分配到三个班级的分法总数 $\frac{12!}{4!4!4!}$,由乘法原理,有利于事件 A(15 名新生平均分配到三个班级,且各班均有一名优秀生)的分法为

$$(3!)\times\frac{12!}{4!4!4!}$$

故

$$P(A)=\frac{(3!)\times\frac{12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{25}{91}$$

(2)将 3 名优秀生分配到同一班级的分法有 3 种,对于这样的每种分法,12 名非优秀生的分法(一个班 2 名,另两个班各 5 名)总数 $\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}$,由乘法原理,有利于事件 A(15 名学生平均分配到三个班级,其中一个班分配到 3 名优秀生)的总数为

$$3\times\frac{12!}{2!5!5!}$$

故

$$P(A)=3\times\frac{\frac{12!}{2!5!5!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{6}{91}$$

【例 1.9】 一学生宿舍有 6 名学生,问:(1)6 人生日都在星期天的概率是多少?(2)6 个人的生日都不在星期天的概率是多少?(3)6 个人的生日不都在星期天的概率有多少?

【解】 因为每个人的生日可在 7 天中的任何一天,且是等可能的,于是基本事件总数:7^6.

(1)有利于事件 A(6 个人生日都在星期天)的基本事件个数是 1,故

$$P(A)=\frac{1}{7^6}$$

(2)6 个人生日都不在星期天,每个人的生日就只能是星期一到星期六之中的任一天,因此有利于事件 A(6 个人生日都不在星期天)的基本事件个数是 6^6,故

$$P(A)=\frac{6^6}{7^6}=\left(\frac{6}{7}\right)^6$$

(3)$A=\{6$ 个人生日都在星期天$\}$与 $\bar{A}=\{6$ 个人生日不都在星期天$\}$是对立事件,故

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\left(\frac{1}{7}\right)^6$$

【例 1.10】 袋内放有 2 个伍分的、3 个贰分和 5 个壹分的钱币,任取其中 5 个,求钱额总数超过壹角的概率.

【解】 共有 10 个钱币,任取 5 个,则基本事件总数 C_{10}^5,有利于事件 A(取 5 个钱币金额超壹角)的情形:

(1)取 2 个 5 分币,其余的 3 个可任取,其种数:

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3$$

(2)取 1 个 5 分币,则 2 分币至少要取 2 个,其种数:

$$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2$$

有利于事件 A 的基本事件总数:

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126$$

故

$$P(A)=\frac{126}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$$

【例 1.11】 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

【解】 设线段被分成的三段长分别为 x,y 和 $a-x-y$,则基本事件集为由 $0<x<a$,$0<y<a$ 及 $0<x+y<a$ 所构成图形的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$,有利于事件 A(即 $x,y,a-x-y$ 三段构成三角形)的基本事件集:由线段 $x,y,a-x-y$ 所围成的三角形面积 $S_{\triangle DCE}$(如图 1-2 所示).

由三角形两边之和大于第三边的性质,有

$0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},0<a-x-y<\frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ $0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<x+y<a$(它们构成三角形 DCE),

则其面积 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$

故

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}$$

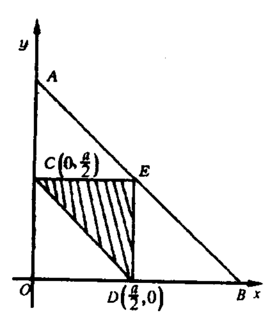

图 1-2