九五

高等学校教材

数学物理方程

第二版

谷超豪 李大潜 陈恕行 郑宋穆 谭永基

高等教育出版社 HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学物理方程

第二版

谷超豪　李大潜　陈恕行　郑宋穆　谭永基

高等教育出版社

内容提要

本书是作者在1979年第一版的基础上，根据多年来的教学实践修订而成的。本书大体保持了第一版中取材的范围、结构和深度。同时，在修订中更加突出了三类典型的二阶线性偏微分方程的基本内容；在讲解基本理论与求解方法的同时注意突出处理问题的思想方法；为开阔读者的视野，也适当介绍了偏微分方程的广义解与数值解，但比第一版精简了篇幅。全书共7章，其中1～3章为三类典型方程；4～7章分别为二阶线性偏微分方程的分类和总结、一阶双曲型偏微分方程组、广义解与广义函数解、偏微分方程的数值方法。

本书可作为数学专业和应用数学专业本科的教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程/谷超豪等编. －2版. －北京：高等教育出版社，2002.7

数学专业本科教材

ISBN 7－04－010701－5

Ⅰ.数… Ⅱ.谷… Ⅲ.数学物理方程－高等学校－教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第020602号

责任编辑 郭思旭 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 尹文军
版式设计 马静如 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 宋克学

数学物理方程 第二版

谷超豪 李大潜 陈恕行 郑宋穆 谭永基

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
传　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京人卫印刷厂		
		版　次	1979年5月第1版
开　本	787×1092 1/16		2002年7月第2版
印　张	13.25	**印　次**	2002年7月第1次印刷
字　数	310 000	**定　价**	15.70元

序

本书是在1979年出版的《数学物理方程》第一版(高等教育出版社出版)的基础上,经对内容和结构都作了较大改动后修订而成的,可作为高等学校数学专业和应用数学专业学生学习数学物理方程基础课的教材。

本书第一版自出版以来已作为数学物理方程基础课的教材被许多学校使用。多年的教学实践说明,本书第一版的取材深度、主要内容以及结构安排还是比较合适的,为了进一步突出重点,便于读者学习与掌握数学物理方程的基本内容和精神实质,在这次修订中着重注意以下的几个方面:

1. 更加突出三类典型的二阶线性偏微分方程的基本内容。波动方程、热传导方程和调和方程反映了三类不同的自然现象,最具典型意义,处理方法上也最具代表性。学好这三类典型方程,理解、掌握其基本性质与求解方法是学好本课程的关键。这一点在教材内容的取舍与安排上都再次得到了强调,从而使重点更加突出。

2. 在讲解基本理论与求解方法的同时,注意突出处理问题的思想方法。为了使读者能更快地理解方法的实质,在分解教材内容的难点,改进叙述方面也作了努力。此外,我们还增加了波动方程与热传导方程解的衰减性、先验估计方法介绍等内容,以便读者对数学物理方程的基本内容有一个较全面的了解。

3. 对于广义解与数值解这两部分内容的介绍将有利于读者开阔视野,更深入地理解数学物理方程的基本内容。对它们的处理,更注意与基本内容的配合与呼应,同时,也适当精简了篇幅,使读者能以主要精力集中于三类典型方程的学习。

本书共分七章,第一、二、三章分别介绍波动方程、热传导方程和调和方程的基本定解问题的适定性、求解方法及解的性质。在此基础上,在第四章中对二阶线性偏微分方程作了分析和总结。第五章主要介绍一阶双曲型偏微分方程组。第六章介绍广义解与广义函数解。第七章介绍偏微分方程的数值方法。为了便于掌握这些内容,在每一节后都安排了一定数量的习题,供读者进行练习。书中小部分内容以小字排印,供有较充裕时间的读者选学,跳过这些段落将不影响以下内容的学习。

本书中主要用到数学分析、线性代数和常微分方程的知识,有些段落也用到复变函数的知识,在第一章§6、第六章及第七章还用到一些泛函分析的知识。因此,本课程以安排在第三学年为宜。本书前四章为数学物理方程课程的最基本内容,可以用约五十学时的教学时间完成。全书的内容(不包括小字与附录)也可以在约七十学时的教学时间内完成,在选用本书作为教材时可根据具体情况加以取舍。

限于编者的水平,不妥及疏漏之处在所难免,恳请专家和广大读者提出宝贵的意见。

编者

2001年9月

引　言

数学物理方程主要指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程(有时也包括积分方程、微分积分方程等),它们反映了有关的未知变量关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系。连续介质力学、电磁学、量子力学等等方面的基本方程都属于数学物理方程的范围。

微积分产生以后,人们就开始把力学中的一些问题,归结为偏微分方程进行研究。早在18世纪初,人们已经将弦线振动的问题归结为弦振动方程,并探讨了它的解法。随后,人们又陆续了解了流体的运动、弹性体的平衡和振动、热传导、电磁相互作用、原子核和电子的相互作用、化学反应过程等等自然现象的基本规律,把它们写成偏微分方程的形式,并且求出了典型问题的解答,从而能通过实践,验证这些基本规律的正确性,显示了数学物理方程对于认识自然界基本规律的重要性。

有了基本规律,人们还要利用这些基本规律来研究复杂的自然现象和解决复杂的工程技术问题,这就需要求出数学物理方程中的许多特定问题的解答。随着电子计算机的出现及计算技术的发展,即使是相当复杂的问题,也有可能计算出解的足够精确的数值来,这对于预测自然现象的变化(如气象预报)和进行各种工程设计(如机械强度的计算)都有着很重要的作用。

在研究数学物理方程的同时,人们对偏微分方程的性质也了解得越来越多、越来越深入,形成了数学中的一门重要的分支——偏微分方程理论。它既有悠久的历史,又不断地更新着它的对象、内容和方法。它直接联系着众多自然现象和实际问题,不断地提出或产生需要解决的新课题和新方法。它所面临的数学问题多样而复杂,不断地促进着许多相关数学分支(如泛函分析、复变函数、微分几何、计算数学等)的发展,并从它们之中引进许多有力的解决问题的工具。因此,数学物理方程又是纯粹数学的许多分支和自然科学各部门及工程技术等领域之间的一个重要的桥梁。

本门课程中将介绍数学物理方程中一些最基本的内容。

目　　录

第一章　波 动 方 程

本章介绍最典型的双曲型方程——波动方程，它在研究波的传播及弹性体振动时常会遇到。在§1中导出了一维波动方程（弦振动方程）和定解条件（初始条件、边界条件），引进了定解问题适定性的概念。§2中利用达朗贝尔解法，导出了弦振动方程柯西问题解的表达式（达朗贝尔公式），而对于非齐次方程则运用齐次化原理得到了解的表达式。在§3中用分离变量法讨论了弦振动方程的初边值问题。在这两节中也利用解的表达式对弦振动方程解的一些重要性质及相应的物理意义作了说明。§4中首先用球平均函数法导出了三维波动方程柯西问题解的表达式（泊松公式），然后用降维法导出了二维波动方程相应的解的表达式。§5中进一步讨论由波动方程的解所反映的波的传播与衰减等性质，从中可以看到，不同维数的波动动方程的解的性质是有着很大区别的。§6中采用能量积分的方法讨论了波动方程柯西问题及初边值问题解的唯一性及稳定性，这个方法是从能量守恒原理出发而得到的。

§1　方程的导出、定解条件

1. 弦振动方程的导出　弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔（D'Alembert）等人首先给予系统研究的。它是一大类偏微分方程的典型代表。下面先从物理问题出发来导出弦振动方程。

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦，其长为 l，在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

将实际问题归结为数学模型时，必须作一些理想化的假设，以便抓住问题的最本质的特征。在考察弦振动问题时的基本假设为：

1. 弦是均匀的，弦的截面直径与弦的长度相比可以忽略，因此弦可以视为一根曲线，它的（线）密度 ρ 是常数。

2. 弦在某一平面内作微小横振动，即弦的位置始终在一直线段附近，而弦上各点均在同一平面内垂直于该直线的方向上作微小振动。

3. 弦是柔软的，它在形变时不抵抗弯曲，弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致，而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克（Hooke）定律。

我们将在上述假定下来导出弦振动方程。先讨论不受外力作用时弦振动的情形。根据牛顿第二定律知

$$\text{作用在物体上的力} = \text{该物体的质量} \times \text{该物体的加速度}。$$

于是在每一个时间段内

$$\text{作用在物体上的冲量} = \text{该物体的动量的变化}。$$

由于弦上各点的运动规律不同，必须对弦的各个片段分别进行考察。为此，如图1.1选择坐标系，将弦的两端固定在 x 轴的 O,L 两点上（$OL = l$）。由基本假设，可以用 $u(x,t)$ 表示

弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移。当 t 固定时 $u(x,t)$ 即表示弦在时刻 t 所处的位置。

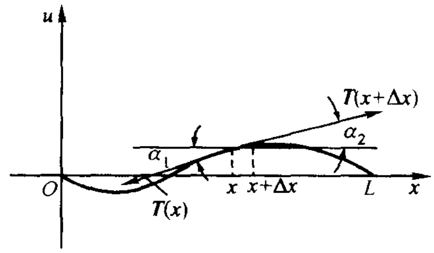

图 1.1

在这弦上任取一弦段 $(x, x+\Delta x)$，它的弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx, \tag{1.1}$$

由基本假设 2 知 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小，于是 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比可以忽略不计，从而

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x.$$

这样，可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，因此由胡克定律知道，弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变，即张力与时间无关。我们把在 x 点处的张力记为 $\boldsymbol{T}(x)$，它表示在 x 点处弦的左边部分对右边部分的拉力与弦的右边部分对左边部分的拉力大小均为 $T(x)$。由基本假设 3 知，张力 $\boldsymbol{T}(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向。

如图 1.1 所示，在 x 点处作用于弦段 $(x, x+\Delta x)$ 的张力在 x、u 两个方向上的分力分别为

$$-T(x)\cos\alpha_1, \qquad -T(x)\sin\alpha_1,$$

这里 α_1 是张力 $\boldsymbol{T}(x)$ 的方向与水平线的夹角，负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向。在弦段的另一端 $x+\Delta x$ 点处作用于弦段 $(x, x+\Delta x)$ 的张力在 x、u 两个方向的分力分别为

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2, \qquad T(x+\Delta x)\sin\alpha_2,$$

其中 α_2 是张力 $\boldsymbol{T}(x+\Delta x)$ 与水平线的夹角。

由于弦只在 x 轴的垂直方向作横振动，所以水平方向的合力为零，即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0. \tag{1.2}$$

由于假设弦仅在平衡位置附近作微小振动，所以

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \tag{1.3}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \tag{1.4}$$

于是，(1.2)式变为

$$T(x+\Delta x)-T(x)=0, \tag{1.5}$$

故 $T(x+\Delta x)=T(x)=T$，也就是说，T 是一个常数。又由基本假设 2 知

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{1.6}$$

$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}, \tag{1.7}$$

所以张力在 x 轴的垂直方向的合力为

$$T\sin\alpha_2-T\sin\alpha_1=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right],$$

从而在时间段$(t,t+\Delta t)$中该合力产生的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t}T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dt. \tag{1.8}$$

另一方面，在时刻 t 弦段$(x,x+\Delta x)$的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx,$$

在时刻 $t+\Delta t$ 该弦段的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}dx,$$

所以从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$，弦段$(x,x+\Delta x)$的动量增加量为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx. \tag{1.9}$$

由于在$(t,t+\Delta t)$时间段内的冲量应等于动量的增加，故

$$\int_t^{t+\Delta t}T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dt=\int_x^{x+\Delta x}\rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx,$$

从而

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right]dxdt=0. \tag{1.10}$$

由 Δx、Δt 的任意性可知(1.10)中的被积函数必须为零，从而得到

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0.$$

记$\dfrac{T}{\rho}$为 a^2，就得到不受外力作用时弦振动所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1.11}$$

当存在外力作用时，若在点 x 处外力(线)密度为 $F(x,t)$，其方向垂直于 x 轴，则小弦段$(x,x+\Delta x)$上所受外力为

$$\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dx,$$

它在时间段$(t,t+\Delta t)$中所产生的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dxdt.$$

于是在方程(1.10)的左侧应添上这一项，得到

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+F(x,t)\right]dxdt=0. \tag{1.12}$$

仍由 $\Delta x,\Delta t$ 的任意性知

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-F(x,t) \tag{1.13}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t). \tag{1.14}$$

这就是外力作用下弦振动所满足的方程,其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$ 表示单位质量在 x 点处所受的外力。

最后,我们指出,弦振动方程中只含有两个自变量 x、t,其中 t 表示时间,x 表示位置。由于它描述的是弦的振动或波动现象,因而它又称为一维波动方程。类似地可导出二维波动方程(例如薄膜振动)和三维波动方程(例如电磁波、声波的传播),它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1.16}$$

2. 定解条件 上面所导出的弦振动方程(1.14)包含有未知函数 $u(x,t)$ 和它的关于自变量的偏导数,所以是**偏微分方程**。对于一个偏微分方程来说,如果有一个函数 $u(x,t)$,具有方程中所需要的各阶连续偏导数,且将它代入方程时能使方程成为恒等式,就称这个函数为该方程的解。列出微分方程以后,目的就是要从微分方程中求得解或研究解的性质。例如,为了了解弦的振动情况,就应该设法求出相应的弦振动方程的解。

我们看到,弦振动方程(1.14)描述了弦作微小横振动时位移函数 $u(x,t)$ 所应满足的一般性规律,但仅仅利用它还不能完全确定所考察弦的运动状况。这是因为弦的运动还与其初始状态以及边界所处的状况有关,因此还得给出一些其他条件。

在上述弦振动问题中,弦的两端被固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点,因此有

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0, \tag{1.17}$$

称为**边界条件**。此外,设弦在初始时刻 $t=0$ 时的位置和速度为

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\qquad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{1.18}$$

称为**初始条件**。边界条件与初始条件总称为**定解条件**。把弦振动方程(1.14)和定解条件(1.17)、(1.18)结合起来,就得到如下的定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & (1.19)\\[2ex] t=0: u=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x), & (1.20)\\[2ex] x=0:\quad u=0, & (1.21)\\ x=l:\quad u=0. & (1.22)\end{cases}$$

要在区域 $(0\leqslant x\leqslant l,t\geqslant 0)$ 上(见图 1.2)求上述定解问题的解,就是要求这样的连续函数 $u=u(x,t)$,它在区域 $0<x<l,t>0$ 中满足波动方程(1.19);在 x 轴($t=0$)一段区间

$0\leqslant x\leqslant l$上满足初始条件(1.20),并在边界 $x=0$ 及 $x=l$ 上分别满足边界条件(1.21)及(1.22)。

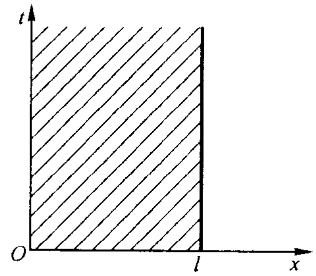

图 1.2

一般称形如(1.17)的边界条件为**第一类边界条件**,(又称**狄利克雷(Dirichlet)边界条件**)。对于弦振动方程的边界条件通常还可以有以下两种:

(a) 弦的一端(例如 $x=0$)处于自由状态,即可以在垂直于 x 轴的直线上自由滑动,未受到垂直方向外力。在边界右端的张力的垂直方向分量是 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}$,得出此时应成立

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0.$$

也可以考虑更普遍的边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu(t),$$

其中 $\mu(t)$是 t 的已知函数。这种边界条件称为**第二类边界条件**(又称**诺伊曼(Neumann)边界条件**)。

(b) 在应用上还会遇到另一种情形。将弦的一端固定在弹性支承上,也就是说此时支承的伸缩符合胡克定律。如果支承原来的位置为 $u=0$,则 u 在端点的值表示支承在该点的伸长。例如在 $x=l$ 的一端,弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T\dfrac{\partial u}{\partial x}$,由胡克定律知

$$-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=ku\Big|_{x=l},$$

其中 k 为弹性系数。因此在弹性支承的情形,边界条件归结为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=l}=0,$$

其中 $\sigma=\dfrac{k}{T}$是已知正数。在数学中也可以考虑更普遍的边界条件

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=l}=v(t),$$

其中 $v(t)$是 t 的已知函数。这种边界条件称为**第三类边界条件**。

下面我们再介绍几个概念。一个偏微分方程所含有的未知函数最高阶导数的阶数称为这个偏微分方程的**阶**,例如弦振动方程(1.14)就是一个二阶偏微分方程。如果方程对未知函数及其各阶导数总体来说是线性的,则称这个方程是**线性方程**。否则称这个方程是**非线**

性方程。进一步，如果方程对未知函数的所有最高阶导数总体来说是线性的，则称它为**拟线性方程**。例如，方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.23}$$

是一阶拟线性方程。如果非线性方程中方程对未知函数的最高阶导数不是线性的，则称它为**完全非线性方程**。例如，方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u \tag{1.24}$$

就是一阶完全非线性方程。

我们看到，方程(1.14)与(1.11)不同，它包含有不含 u 及其偏导数的项 $f(x,t)$（称为**自由项**），这样的方程称为**非齐次方程**，而(1.11)称为**齐次方程**。类似地，边界条件(1.21)、(1.22)称为**齐次边界条件**，相应地，若边界条件为 $u|_{x=0}=\mu_1(t)$，$u|_{x=l}=\mu_2(t)$，则称为**非齐次边界条件**。同样，初始条件(1.20)称为**非齐次初始条件**，而对应于 $\varphi\equiv\psi\equiv 0$ 的初始条件称为**齐次初始条件**。

3. 定解问题适定性概念 研究数学物理方程的中心内容是求各类定解问题的解并研究解的性质，使我们对其所描述的自然现象或过程有更深入的认识。这里首先遇到的一个问题是：定解问题的提法是否合适？例如，这个定解问题的解是否一定存在？这便是解的存在性问题。这个定解问题的解是否只有一个？这便是解的唯一性问题。此外，还要考虑解的稳定性问题（或称为解对定解条件或自由项的连续依赖性问题），即当定解条件或自由项作很小的变化时，问题的解是否也作很小的变化。

定解问题的存在性、唯一性、稳定性统称为**定解问题的适定性**。如果一个定解问题的解是存在的，唯一的，而且是稳定的，我们就称这个问题是**适定的**，即认为这样的定解问题的提法是合适的。

在这里顺便说明，对于决定性的现象来说，一个基本上正确地（但总是近似地）描述所考察物理模型的偏微分方程定解问题，其解通常应该是存在、唯一并稳定的。这是因为，所考察的物理模型在一定的条件下总具有唯一确定的状态，因此，相应的偏微分方程的定解问题通常也应该具有唯一的解，即解应是存在的、唯一的；同时，因为测量中总有误差，如果定解条件的微小误差会引起解的重大变化，所考察的定解问题实际上就不可能给出相应于所考察物理模型的近似解，从而实际上不可能正确地描述所考察的物理模型，而失去任何实际的作用。因此，在求解偏微分方程定解问题的过程中，对定解问题的适定性进行一定的分析，可以帮助我们初步判定所归结的定解问题是否合理、所附加的定解条件是否适当以及对怎样的偏微分方程通常应该指定怎样的定解条件等等问题，并对求解起一定的指导作用。但也必须指出，有时一个定解问题尽管不满足适定性的要求，在实际上仍需加以研究。对此，以后还会作比较详细的说明。

除了研究定解问题的适定性以外，在数学物理方程中还经常研究的问题有解的正则性（光滑性），解的渐近性（包括衰减性），求解方法（包括精确解、渐近解与数值解的求解方法）等等。这些问题的研究构成了数学物理方程的丰富内容。

习 题

1. 细杆（或弹簧）受某种外界原因而产生纵向振动，以 $u(x,t)$ 表示静止时在 x 点处的点在时刻 t 离开

原来位置的偏移。假设振动过程中所发生的张力服从胡克定律,试证明 $u(x,t)$满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中 ρ 为杆的密度,E 为杨氏模量。

2. 在杆纵向振动时,假设(1)端点固定,(2)端点自由,(3)端点固定在弹性支承上,试分别导出这三种情况下所对应的边界条件。

3. 试证:圆锥形枢轴的纵振动方程为

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中 h 为圆锥的高(图 1.3)

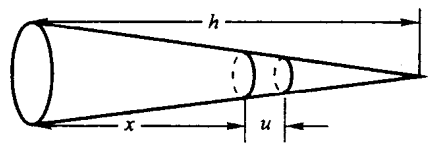

图 1.3

4. 绝对柔软而均匀的弦线有一端固定,在它本身重力作用下,此线处于铅垂的平衡位置,试导出此线的微小横振动方程。

5. 一柔软均匀的细弦,一端固定,另一端是弹性支承。设该弦在阻力与速度成正比的介质中作微小的横振动,试写出弦的位移所满足的定解问题。

6. 若 $F(\xi)$,$G(\xi)$均为其变元的二次连续可导函数,验证 $F(x-at)$,$G(x+at)$均满足弦振动方程(1.11)。

7. 验证 $$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$$

在锥 $t^2-x^2-y^2>0$ 中满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

§2 达朗贝尔(d'Alembert)公式、波的传播

1. 叠加原理 从本节开始我们讨论弦振动方程的各类定解问题。在此以前,先介绍叠加原理。在物理学的研究中经常出现这样的现象:几种不同原因的综合所产生的效果等于这些不同原因单独产生的效果(即假设其他原因不存在时,该原因所产生的效果)的累加。例如,几个外力作用在一物体上所产生的加速度可以用单个外力各自单独作用在该物体上所产生的加速度相加而得出。这个原理称为**叠加原理**,它的适用范围非常广泛。叠加原理对于用线性方程和线性定解条件描述的物理现象来说,都是成立的。例如,对于弦振动方程(1.14),若 $u_1(x,t)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_1(x,t) \tag{2.1}$$

的解,而 $u_2(x,t)$是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_2(x,t) \tag{2.2}$$

的解，则对于任意的常数 C_1、C_2，函数

$$u(x,t)=C_1u_1(x,t)+C_2u_2(x,t) \tag{2.3}$$

是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=C_1f_1(x,t)+C_2f_2(x,t) \tag{2.4}$$

的解。在物理学中应用叠加原理的一个典型例子就是声学中把弦线振动时所发出的复杂的声音分解成各种单音的叠加。早在 18 世纪，伯努利(Bernoulli)及以后的傅里叶(Fourier)就曾利用这个原理来研究弦振动方程的问题。

2. 弦振动方程的达朗贝尔解法　为了考察波动方程的定解问题，先从最简单的情形入手，即首先考察边界(从而边界条件)的影响可以忽略不计的情况。如果所考察的物体(如弦线)长度很长，而所需知道的又只是在较短时间内且离边界较远的一段范围中的运动情况，那么边界条件的影响就可以忽略，并不妨把所考察物体的长度视为无限。在这种情况下，定解问题归结为如下的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\quad(t>0,\ -\infty<x<+\infty), & (2.5)\\[2ex] t=0:\ u=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty). & (2.6)\end{cases}$$

在这个定解问题中，由于其定解条件只有初始条件，故通常称为**初值问题**(也称为**柯西(Cauchy)问题**)。相应地，§1 中所列的定解问题(1.19)—(1.22)，由于既有初始条件，又有**边界条件**，称为**初边值问题**，或**混合问题**。

从§1 中可见，方程(2.5)中的自由项 $f(x,t)$是由于振动中有外力作用而产生的，因此(2.5)中 $f\equiv0$ 的情况对应于**自由振动**；而 $f\neq0$ 的情况对应于**强迫振动**。

下面我们就可以看到，对于初值问题(2.5)、(2.6)，不仅可以得到相当简单的求解公式，而且还可以由此清楚地看到波动传播的规律。

为了求解上述初值问题，我们首先注意到微分方程及定解条件都是线性的。对于这种定解问题，同样成立着叠加原理，即如果函数 $u_1(x,t)$和 $u_2(x,t)$分别是下述初值问题

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (2.7)\\[2ex] t=0:\ u=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) & (2.8)\end{cases}$$

和

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & (2.9)\\[2ex] t=0:\ u=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=0 & (2.10)\end{cases}$$

的解，那么 $u=u_1(x,t)+u_2(x,t)$就一定是原初值问题(2.5)、(2.6)的解(请读者直接验证)。这表示：由 $f(x,t)$所代表的外力因素和由 $\varphi(x)$、$\psi(x)$所表示的初始振动状态对整个振动过程所产生的综合影响，可以分解为单独只考虑外力因素(初始位移及速度为零)或只考虑初始振动状态(外力为零)对振动过程所产生的影响的叠加。

这样，为了求解初值问题(2.5)、(2.6)，只要分别求解齐次方程带非齐次初始条件的初

值问题(I)及非齐次方程带齐次初始条件的初值问题(II)即可。

首先,我们考察自由振动情况的初值问题(I),它可以通过自变量变换的方法求解。

引入新自变量:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \tag{2.11}$$

利用复合函数求导数的法则,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

类似地,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

从而,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

由于 $a^2>0$,因此,采用(2.11)式所示的新自变量,方程(2.7)就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{2.12}$$

方程(2.12)可以直接求解。把它关于 η 积分一次,再关于 ξ 积分一次,就容易看出它的通解为

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \tag{2.13}$$

其中 F 和 G 是任意两个可微分的单变量函数。

再代回到原来的自变量,就可将方程(2.7)的通解表示为

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at). \tag{2.14}$$

利用这个通解表达式,就可以由初始条件(2.8)来决定函数 F 和 G,从而求出初值问题(I)的解。

把(2.14)代入初始条件(2.8),得到

$$u\big|_{t=0} = F(x) + G(x) = \varphi(x), \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = a(-F'(x) + G'(x)) = \psi(x). \tag{2.16}$$

再将(2.16)式两边积分,得

$$a(-F(x) + G(x)) + C = \int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha, \tag{2.17}$$

其中 x_0 是任意一点,而 C 是积分常数。

由(2.15)和(2.17),就可以解出 F 和 G:

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha + \dfrac{C}{2a}, \\ G(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha - \dfrac{C}{2a}. \end{cases} \tag{2.18}$$

把它们代入(2.14),就得到初值问题(I)的解