

924518

多体系统动力学

下 册

休斯敦 刘又午 著



天津大学出版社

多体系系统动力学!

下 册

(集) R.L. 休斯敦 刘又午 著

天津大学出版社

多体系统动力学

(下 册)

R.L. 休斯敦

刘又午 著

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：7⁸/₄ 字数：176千字 插页：2

1991年2月第一版

1991年2月第一次印刷

印数：1—1700

ISBN7-5618-0220-X

TK·3

定价：1.65元

下 册 目 录

第六章 惯量概念	(1)
6.1 前言	(1)
6.2 一次矩	(1)
6.3 质心	(2)
6.4 在多体系统中的应用	(4)
6.5 二次矩矢量	(11)
6.6 惯性矩和惯性积	(12)
6.7 惯性并矢式	(15)
6.8 不同参考系的变换	(16)
6.9 平行轴定理	(17)
6.10 主惯性矩 (推导过程)	(21)
6.11 主惯性矩 (讨论)	(26)
6.12 极大和极小惯性矩	(35)
6.13 讨论	(38)
6.14 多体系统的应用	(41)
6.15 参考文献	(45)
附录	(46)
第七章 多体动力学	(51)
7.1 前言	(51)
7.2 惯性力: 质点和刚体的惯性力	(51)
7.3 刚体上的等效惯性力系	(53)

7.4	广义惯性力	(56)
7.5	用偏速度和偏角速度表示等效惯性力系 ..	(60)
7.6	用偏速度和偏角速度分量表示广义惯性力	(61)
7.7	小结与讨论	(62)
7.8	参考文献	(64)
第八章	多体运动力学	(65)
8.1	前言	(65)
8.2	多体系统应用的力学原理	(67)
8.3	刚体的动能和吉布斯函数	(69)
8.4	多体系统的运动力学方程	(75)
8.5	讨论	(76)
8.6	参考文献	(78)
第九章	数值解法	(81)
9.1	前言	(81)
9.2	低序体阵列复习	(82)
9.3	坐标、广义速率及接点约束	(86)
9.4	变换矩阵	(89)
9.5	偏角速度	(91)
9.6	角加速度和偏角速度阵列的导数	(97)
9.7	位置矢量	(99)
9.8	质心速度和偏速度	(104)
9.9	质心加速度和偏速度阵列的导数	(106)
9.10	小结：四个基本运动学阵列.....	(107)
9.11	基本运动力学方程.....	(111)
9.12	接点和内部运动约束的功能.....	(113)
9.13	约束力和力矩分量的确定.....	(118)

9.14	数值解法小结	(121)
9.15	参考文献	(124)
第十章	约束多体系统	(127)
10.1	前言	(127)
10.2	约束方程	(128)
10.3	解题方法示例	(136)
10.4	大型多体系统的一般结果——功率	(143)
10.5	解算方法——正交补阵	(148)
10.6	正交补阵的推导	(150)
10.7	缩减的广义速率和缩减的偏速度	(151)
10.8	缩减的广义力	(156)
10.9	缩减的运动学方程	(158)
10.10	约束力和力矩分量矩阵的正规消去法	(160)
10.11	有功和无功力	(166)
10.12	例题：滚动硬币	(168)
10.13	参考文献	(177)
第十一章	柔性多体系统	(179)
11.1	前言	(179)
11.2	杆的伸长与缩短——刚度建模	(180)
11.3	杆的伸长与缩短——位移和力	(186)
11.4	多体系统接点力和力矩的回顾	(188)
11.5	线性梁理论结果的回顾	(191)
11.6	梁单元的应用	(195)
11.7	讨论	(204)
11.8	参考文献	(206)
第十二章	应用及结束语	(211)
12.1	前言	(211)

12.2	应用：链和缆索.....	(211)
12.3	应用：生物动力学模型.....	(217)
12.4	应用：机器人和机构.....	(221)
12.5	其它应用：运载工具和结构.....	(222)
12.6	多体系统分析的发展.....	(223)
12.7	计算方法.....	(227)
12.8	结束语.....	(228)
12.9	参考文献.....	(229)
名词索引.....		(238)

第六章 惯量概念

6.1 前 言

为导出惯性力表达式，必先具备有关物体惯量特性的知识。

当质点在惯性参考系（或牛顿参考系）中加速运动时，其上作用的外力与加速度成正比。如图6.1， R 为惯性参考系， P 为质点， F 为作用于质点的力，则 P 在 R 中的加速度 ${}^R a^P$ 与 F 的关系可表示为

$$F = m {}^R a^P \quad (6.1.1)$$

式中 m 为比例常数，称为 P 的“质量”。

根据经典理论，质点的质量只决定于其物理特性，而与其加速度无关。如视物体为质点的集合，则其质量（或惯量）特性即可由质点推出。

本章将复习和给定用于多体系统分析的有关物体的惯量特性。

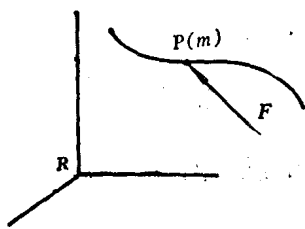


图6.1 质点 P 在惯性参考系中加速运动

6.2 一 次 矩

为描述物体的惯量特性，一次矩和二次矩是两个有用的矢

量。质点的一次矩定义如下：见图6.2.1，令 P 为质点， m 为其质量， ρ 为给定 P 对参考点 O 的位置矢量。则 P 对 O 的一次矩 $L^{P/O}$ 为

$$L^{P/O} = m\rho \quad (6.2.1)$$

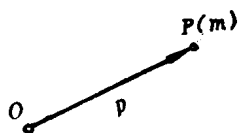


图 6.2.1 质量为 m 的质点 P 和参考点 O

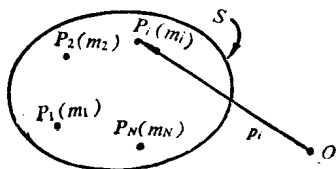


图 6.2.2 质点系和参考点 O

一次矩的大小与质点的质量及其至参考点 O 的距离成正比。

其次，考察如图6.2.2所示 N 个质点 $P_i (i=1, \dots, N)$ 组成的质点系 S 。 S 对参考点 O 的一次矩可定义为各质点对 O 点一次矩之和。即

$$L^{S/O} = \sum_{i=1}^N L^{P_i/O} = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i \quad (6.2.2)$$

式中 m_i 为 S 中任意质点 P_i 的质量。

6.3 质 心

质点系 S 的质心定义为质系 S 对其一次矩为零的那个参考点 G 。即如 G 为 S 的质心，则

$$L^{S/G} = 0 \quad (6.3.1)$$

见图6.3.1，令 S 为质点系， O 为任意参考点， G 为质心； ρ_0 为 G 对 O 的位置矢量； ρ_i 为 P_i 对 G 的位置矢量，则有

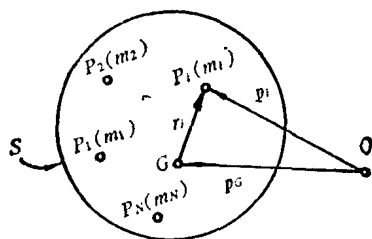


图 6.3.1 质点系S、质心G和参考点O

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_G + \mathbf{r}_i \quad (6.3.2)$$

而由式(6.3.1), 如G为S的质心, 则

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.3.3)$$

式(6.3.2)代入(6.3.3)可有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_G) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_G \\ &= L^{S/O} - \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{p}_G = 0 \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

因 \mathbf{p}_G 不含下标*i*, 与和式无关, 故可提至和式之外, 如最后的

等式。和式 $\sum_{i=1}^N m_i$ 即是S的总质量。故由式(6.3.4)可得

$$\mathbf{p}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = L^{S/O} / M \quad (6.3.5)$$

式中M为S的总质量。

因刚体可视为一个质点系,故可用式(6.3.5)求得刚体的质心。而作为连续体,组成刚体的质点数目应该很大。故应令式(6.3.5)中 N 无限地增大,最终可以物体占有区域的体积分取代其中和式。如 B 为刚体,其质心为 G ,则 G 对任意参考点 O 的位置矢量可表示为

$$p_G = \int_V \rho \mathbf{p} dV / \int_V \rho dV = \frac{1}{M} \int_V \rho \mathbf{p} dV \quad (6.3.6)$$

式中 ρ 为 B 的密度; V 为 B 占有的空间;而 \mathbf{p} 为 B 中任意点对 O 的位置矢量。

如 V 内质量均匀分布(即 ρ 为常数),则式(6.3.6)简化为

$$p_G = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{p} dV \quad (6.3.7)$$

式中 V 为 B 占有空间的体积。故对匀质物体,质心位置仅决定于物体形状。对常见形状(或图形), p_G 已由式(6.3.7)确定。有关结果在很多力学教科书和手册中皆可查到(参见(6.1-6.6))。本章末附录中列出了部分常见形状物体的质心位置。

6.4 在多体系统中的应用

再考察式(6.3.5)

$$p_G = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i / \sum_{i=1}^N m_i = L^{S/O} / M \quad (6.4.1)$$

式中 S 为 n 个质点组成的任意系统。可由此式导出确定多体系统质心的算法。设多体系统 S 包含 N 个物体 $B_k (k=1, \dots, N)$,如图6.4.1。对任一典型物体 B_k ,它的质心至参考点 O 的相对位置可用式(6.4.1)确定。

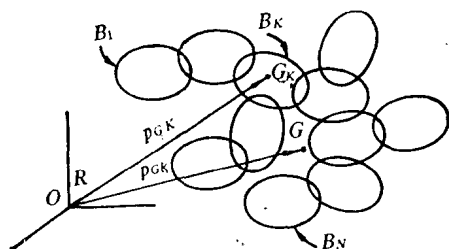


图 6.4.1 多体系统及其质心G

即

$$p_{G_k} = L^{B_k/O} \div m_{B_k} \quad (6.4.2)$$

式中 m_{B_k} 为 B_k 的质量。此式可改写为

$$L^{B_k/O} = m_{B_k} p_{G_k} = \sum_{i=1}^{n_k} m_i p_i \quad (6.4.3)$$

式中 n_k 为组成 B_k 的质点数，上面最后一个等式系由式(6.2.2)和一次矩定义得来。

注意到式(6.4.1)中的和式由有限项组成，故可根据各独立物体，将它分为若干和式。即可

将 $\sum_{i=1}^N m_i p_i$ 和 $\sum_{i=1}^N m_i$ 表示为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i p_i &= \sum_{i=1}^{n_1} m_i p_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} m_i p_i + \dots \\ &+ \sum_{i=n_{N-1}+1}^{n_N} m_i p_i = L^{S/O} \quad (6.4.4) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i &= \sum_{i=1}^{n_1} m_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} m_i + \dots \\ &+ \sum_{i=n_{N-1}+1}^{n_N} m_i = M \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

比较式(6.4.3)和(6.4.4), 可以判定式(6.4.4)中各独立和式即是各独立物体的一次矩。即整个系统的一次矩可表示为

$$L^{S/O} = L^{B_1/O} + L^{B_2/O} + \dots + L^{B_N/O} \quad (6.4.6)$$

同理, 由式(6.4.5), S 的总质量 M 可表示为各独立物体质量之和, 即

$$M = m_{B_1} + m_{B_2} + \dots + m_{B_N} \quad (6.4.7)$$

再比较式(6.4.3)和(6.4.4)可知

$$L^{S/O} = M p_G = m_{B_1} p_{G_1} + m_{B_2} p_{G_2} + \dots + m_{B_N} p_{G_N} \quad (6.4.8)$$

解 p_G 可得

$$p_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_{B_i} p_{G_i}}{\sum_{i=1}^N m_{B_i}} = \frac{\sum_{i=1}^N L^{B_i/O}}{M} \quad (6.4.9)$$

式(6.4.9)给出确定多体系统质心所需的算式。考察图6.4.2所示系统, 说明其具体应用。此系统由一个立方体、一个圆柱体、四个杆和一个球, 共七个物体组成。令立方体每边长1m。令各杆尺寸相同, 皆为直径4cm, 长1m。令圆柱体直径为1/3m, 长1m。令球的直径为1/3m。令 B_6 与球面相连, 且其轴线通过球心。除 B_1 有圆柱形空腔外, 各物体都是匀质的。

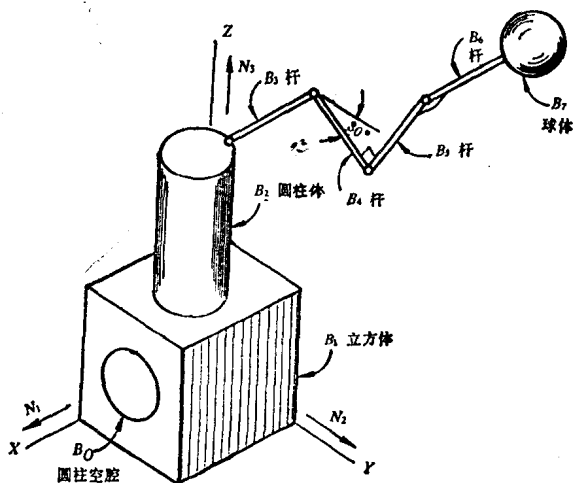


图 6.4.2 多体系统示例

空腔贯穿立方体，其直径为 $1/3\text{m}$ 。令立方体、圆柱和球的密度为 $7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ （钢），杆的密度为 9.8kg/m 。令 B_3 和 B_5 与 X 轴平行， B_4 和 B_5 与 $Y-Z$ 平面平行。

只需计算式(6.4.9)中的和式，即可确定此系统相对于直角坐标 XYZ 原点 O 的质心位置。为计算和式最好用图6.4.2的单位矢量 N_1 、 N_2 和 N_3 表示各矢量 p_{O_i} 。实际上计算过程不过是简单的乘法和表中各列相加。各体的体积、质量和质心位置列如表6.4.1。第3列相加为总质量。乘积 $m_{B_i} p_{O_i}$ 见第7、8和9列。称空腔为 B_0 ，其质量应冠以负号。

参照本章末附表，可得第4、5和6列各值。

由表6.4.1可知系统总质量为 7990.32kg 。且和

$$\text{式 } \sum_{i=1}^7 m_{B_i} p_{O_i} \text{ 可写为}$$

式(6.4.9)中和式的计算

表 6.4.1

物体	体积 (m ³)	质量 (kg)	质 心 位 置			m _{Bk} p _{σk}		
			X _k (m)	Y _k (m)	Z _k (m)	m _{Bk} X _k (kgm)	m _{Bk} Y _k (kgm)	m _{Bk} Z _k (kgm)
B.								
0	0.0873	-680	0.5	0.5	0.5	-340	-340	-340
1	1.0	7800	0.5	0.5	0.5	3900	3900	3900
2	0.0873	680	0.5	0.5	1.5	340	340	1020
3	0.00125	9.75	-0.167	0.5	2.0	-1.628	4.875	19.5
4	0.00125	9.75	-0.667	0.933	1.75	-6.5	9.1	17.06
5	0.00125	9.75	-0.667	1.616	1.933	-6.5	15.756	18.85
6	0.00125	9.75	-1.167	1.866	2.366	-11.38	18.19	23.07
7	0.0194	151.32	-1.833	1.866	2.366	-277.37	282.36	358.02
总计	1.0244	7990.32				3596.6	4230.3	5016.5

$$\sum_{k=1}^7 m_{B_k} p_{\sigma_k} = 3596.6N_1 + 4230.3N_2 + 5016.5N_3 \quad \text{kgm} \quad (6.4.10)$$

p_{σ} 为

$$p_{\sigma} = \frac{\sum_{k=1}^7 m_{B_k} p_{\sigma_k}}{\sum_{k=1}^7 m_{B_k}} = 0.450N_1 + 0.529N_2 + 0.628N_3 \quad (6.4.11)$$

表6.4.1及各和式易于表达为计算机算法。首先输入第1、2和3列数据。其次，引用较低序体联接阵列（见4.2节）。本例无分支，阵列很简单

$$\begin{aligned} L^{\circ}(K) &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ L(K) &= (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

而后导出固定在各物体上的单位矢量与固定在XYZ坐标系上的单位矢量 N_i ($i=1, 2, 3$)间的变换矩阵。如前，称各矩阵为 SOK ($K=1, \dots, 7$)。由式(4.8.3) SOK 可写为

$$SOK = SOJSJK \quad (6.4.13)$$

式中 SJK 表示 B_k 与其相邻低序体 B_j 间的变换矩阵。

对图6.4.2系统，各 SJK 为

$$S01 = S23 = S67 = I$$

$$S12 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (6.4.14)$$

$$S_{45} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{56} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式中 I 仍表示单位矩阵。反复使用式(6.4.13)全部 $SOK(K=1, \dots, 7)$ 皆可确定。

最后, 式(6.4.8)的位置矢量 p_{O_i} 可写成

$$p_{O_i} = q_1 + q_2 + \dots + q_j + q_k + r_k \quad (6.4.15)$$

式中 q_k 为给定该物体参考点(原点)至其相邻低序体的参考点之间的位置矢量(见4.12节)。 r_k 为给定 B_k 的 G_k 至其参考点 O_k 间的位置矢量。因 r_k 固定在 B_k 上, 而 q_k 固定在 B_j 上, p_{O_i} 可写成

$$p_{O_i} = (S_{00i}q_{1m} + S_{01i}q_{2m} + \dots + S_{0j_i}q_{jm} + S_{0k_i}r_{km})N_i \quad (6.4.16)$$

式中 S_{00} 为 I 。

如图6.4.2系统 q_k 和 r_k 各分量为

$$\begin{aligned} q_1 &: (0, 0, 0), & q_2 &: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), & q_3 &: \left(\frac{1}{6}, 0, 1\right), \\ q_4 &: (1, 0, 0), & q_5 &: (1, 0, 0), & q_6 &: (1, 0, 0), \\ q_7 &: (1, 0, 0) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

和

$$r_1: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad r_2: \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \quad r_3: \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$