多体系统动力学

下册

休斯敦 刘又午 著

天津大学出版社

多体系统动力学

下册

(美)R.L.休斯敦　刘又午　著

天津大学出版社

多 体 系 统 动 力 学

（下　　册）

R.L.休斯敦

刘又午　著

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河 北 省 邮 电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米1/32　印张：$7^3/_4$字数：176千字　插页：2

1991年2月第一版　　1991年2月第一次印刷

印数：1—1700

ISBN7-5618-0220-X

TK·3

定价：1.65元

下 册 目 录

第六章　惯量概念

6.1　前　　言

为导出惯性力表达式，必先具备有关物体惯量特性的知识。

当质点在惯性参考系（或牛顿参考系）中加速运动时，其上作用的外力与加速度成正比。如图6.1，R为惯性参考系，P为质点，$\mathbf{F}$为作用于质点的力，则P在R中的加速度${}^R\mathbf{a}^P$与$\mathbf{F}$的关系可表示为

$$\mathbf{F}=m{}^R\mathbf{a}^P \qquad (6.1.1)$$

式中m为比例常数，称为P的"质量"。

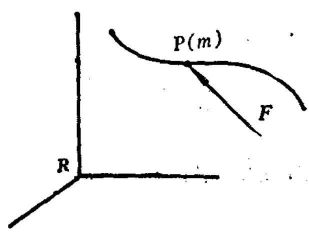

图6.1　质点P在惯性参考系中加速运动

根据经典理论，质点的质量只决定于其物理特性，而与其加速度无关。如视物体为质点的集合，则其质量（或惯量）特性即可由质点推出。

本章将复习和给定用于多体系统分析的有关物体的惯量特性。

6.2　一　次　矩

为描述物体的惯量特性，一次矩和二次矩是两个有用的矢

量。质点的一次矩定义如下：见图6.2.1，令P为质点，m为其质量，p为给定P对参考点O的位置矢量。则P对O的一次矩$\mathbf{L}^{P/O}$为

$$\mathbf{L}^{P/O}=m\mathbf{p} \tag{6.2.1}$$

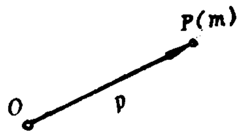

图 6.2.1 质量为m的质点P和参考点O

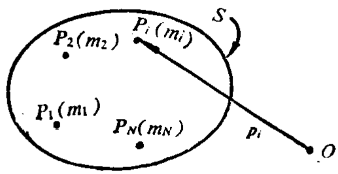

图 6.2.2 质点系和参考点O

一次矩的大小与质点的质量及其至参考点O的距离成正比。

其次，考察如图6.2.2所示N个质点$P_i(i=1,\cdots,N)$组成的质点系S。S对参考点O的一次矩可定义为各质点对O点一次矩之和，即

$$\mathbf{L}^{S/O}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}^{P_i/O}=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{p}_i \tag{6.2.2}$$

式中m_i为S中任意质点P_i的质量。

6.3 质　　心

质点系S的质心定义为质系S对其一次矩为零的那个参考点G。即如G为S的质心，则

$$\mathbf{L}^{S/G}=0 \tag{6.3.1}$$

见图6.3.1，令S为质点系，O为任意参考点，G为质心；$\mathbf{p}_G$为G对O的位置矢量；$\mathbf{r}_i$为P_i对G的位置矢量，则有

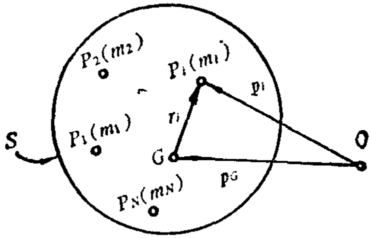

图 6.3.1 质点系S、质心G和参考点O

$$\mathbf{p}_i=\mathbf{p}_G+\mathbf{r}_i \tag{6.3.2}$$

而由式(6.3.1)，如G为S的质心，则

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i=0 \tag{6.3.3}$$

式(6.3.2)代入(6.3.3)可有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_G)\\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{p}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{p}_G\\ &= \mathbf{L}^{S/O}-\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\mathbf{p}_G=0\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

因$\mathbf{p}_G$不含下标i，与和式无关，故可提至和式之外，如最后的等式。和式$\sum_{i=1}^{N} m_i$即是S的总质量。故由式(6.3.4)可得

$$\mathbf{p}_G=\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{p}_i\div\sum_{i=1}^{N} m_i=\mathbf{L}^{S/O}/M \tag{6.3.5}$$

式中M为S的总质量。

因刚体可视为一个质点系，故可用式(6.3.5)求得刚体的质心。而作为连续体，组成刚体的质点数目应该很大。故应令式(6.3.5)中N无限地增大，最终可以物体占有区域的体积分取代其中和式。如B为刚体，其质心为G，则G对任意参考点O的位置矢量可表示为

$$\mathbf{p}_G=\int_V \mathbf{p}\rho \mathrm{d}V\Big/\int_V \rho \mathrm{d}V=\frac{1}{M}\int_V \mathbf{p}\rho \mathrm{d}V \tag{6.3.6}$$

式中ρ为B的密度；V为B占有的空间；而$\mathbf{p}$为B中任意点对O的位置矢量。

如V内质量均匀分布（即ρ为常数），则式(6.3.6)简化为

$$\mathbf{p}_G=\frac{1}{V}\int_V \mathbf{p}\mathrm{d}V \tag{6.3.7}$$

式中V为B占有空间的体积。故对匀质物体，质心位置仅决定于物体形状。对常见形状（或图形），$\mathbf{p}_G$已由式(6.3.7)确定。有关结果在很多力学教科书和手册中皆可查到（参见〔6.1-6.6〕）。本章末附录中列出了部分常见形状物体的质心位置。

6.4 在多体系统中的应用

再考察式(6.3.5)

$$\mathbf{p}_G=\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{p}_i\Big/\sum_{i=1}^{N} m_i=\mathbf{L}^{S/O}/M \tag{6.4.1}$$

式中S为n个质点组成的任意系统。可由此式导出确定多体系统质心的算法。设多体系统S包含N个物体$B_k(k=1,\cdots,N)$，如图6.4.1。对任一典型物体B_k，它的质心至参考点O的相对位置可用式(6.4.1)确定。

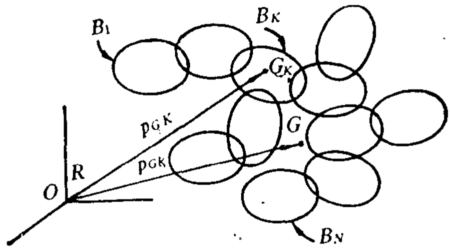

图 6.4.1　多体系统及其质心G

即

$$\mathbf{p}_{G_k}=\mathbf{L}^{B_k/O}\div m_{B_k} \tag{6.4.2}$$

式中m_{B_k}为B_k的质量。此式可改写为

$$\mathbf{L}^{B_k/O}=m_{B_k}\mathbf{p}_{G_k}=\sum_{i=1}^{n_k}m_i\mathbf{p}_i \tag{6.4.3}$$

式中n_k为组成B_k的质点数，上面最后一个等式系由式(6.2.2)和一次矩定义得来。

注意到式(6.4.1)中的和式由有限项组成，故可根据各独立物体，将它分为若干和式。即可

将 $\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{p}_i$ 和 $\sum_{i=1}^{N}m_i$表示为

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{p}_i=\sum_{i=1}^{n_1}m_i\mathbf{p}_i+\sum_{i=n_1+1}^{n_2}m_i\mathbf{p}_i+\cdots$$

$$+\sum_{i=n_{N-1}+1}^{n_N}m_i\mathbf{p}_i=\mathbf{L}^{S/O} \tag{6.4.4}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n_1} m_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} m_i + \cdots$$

$$+ \sum_{i=n_{N-1}+1}^{n_N} m_i = M \tag{6.4.5}$$

比较式(6.4.3)和(6.4.4)，可以判定式(6.4.4)中各独立和式即是各独立物体的一次矩。即整个系统的一次矩可表示为

$$\mathbf{L}^{S/O} = \mathbf{L}^{B_1/O} + \mathbf{L}^{B_2/O} + \cdots + \mathbf{L}^{B_N/O} \tag{6.4.6}$$

同理，由式(6.4.5)，S 的总质量 M 可表示为各独立物体质量之和，即

$$M = m_{B_1} + m_{B_2} + \cdots + m_{B_N} \tag{6.4.7}$$

再比较式(6.4.3)和(6.4.4)可知

$$\mathbf{L}^{S/O} = M\mathbf{p}_G = m_{B_1}\mathbf{p}_{G_1} + m_{B_2}\mathbf{p}_{G_2} + \cdots + m_{B_N}\mathbf{p}_{G_N} \tag{6.4.8}$$

解 $\mathbf{p}_G$ 可得

$$\mathbf{p}_G = \sum_{k=1}^{N} m_{B_k}\mathbf{p}_{G_k} \Big/ \sum_{k=1}^{N} m_{B_k} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{L}^{B_k/O} \div M \tag{6.4.9}$$

式(6.4.9)给出确定多体系统质心所需的算式。考察图6.4.2所示系统，说明其具体应用。此系统由一个立方体、一个圆柱体、四个杆和一个球，共七个物体组成。令立方体每边长1m。令各杆尺寸相同，皆为直径4cm，长1m。令圆柱体直径为1/3m，长1m。令球的直径为1/3m。令 B_6 与球面相连，且其轴线通过球心；除 B_1 有圆柱形空腔外，各物体都是匀质的。

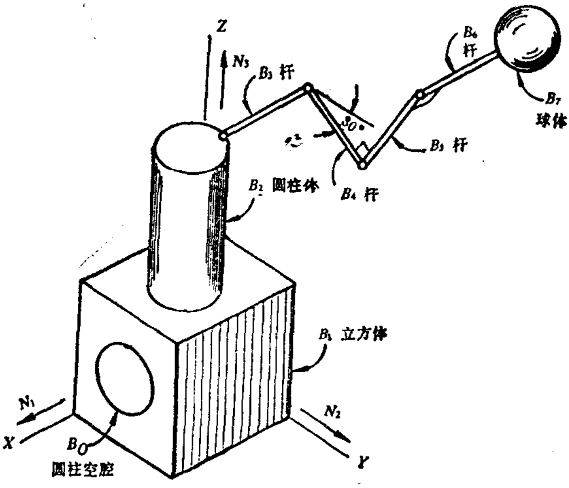

图 6.4.2　多体系统示例

空腔贯穿立方体，其直径为1/3m。令立方体、圆柱和球的密度为7.8×10^3kg/m^3（钢），杆的密度为 9.8kg/m。令B_3和B_6与X轴平行，B_4和B_5与$Y-Z$平面平行。

只需计算式(6.4.9)中的和式，即可确定此系统相对于直角坐标XYZ原点O的质心位置。为计算和式最好用图6.4.2的单位矢量$\mathbf{N}_1$、$\mathbf{N}_2$和$\mathbf{N}_3$表示各矢量$\mathbf{p}_{G_k}$。实际上计算过程不过是简单的乘法和表中各列相加。各体的体积、质量和质心位置列如表6.4.1。第 3 列相加为总质量。乘积$m_{B_k}\mathbf{p}_{G_k}$见第 7、8 和 9 列。称空腔为B_0，其质量应冠以负号。

参照本章末附表，可得第 4、5 和 6 列各值。

由表6.4.1可知系统总质量为7990.32kg。且和式 $\sum_{k=1}^{7} m_{B_k}\mathbf{p}_{G_k}$可写为

表 6.4.1　　式(6.4.9)中和式的计算

物体	体积	质量	质心位置			$m_{B_k}\rho a_k$		
B.	(m^3)	(kg)	X_k (m)	Y_k (m)	Z_k (m)	$m_{B_k}X_k$ (kgm)	$m_{B_k}Y_k$ (kgm)	$m_{B_k}Z_k$ (kgm)
0	0.0873	−680	0.5	0.5	0.5	−340	−340	−340
1	1.0	7800	0.5	0.5	0.5	3900	3900	3900
2	0.0873	680	0.5	0.5	1.5	340	340	1020
3	0.00125	9.75	−0.167	0.5	2.0	−1.628	4.875	19.5
4	0.00125	9.75	−0.667	0.933	1.75	−6.5	9.1	17.06
5	0.00125	9.75	−0.667	1.616	1.933	−6.5	15.756	18.85
6	0.00125	9.75	−1.167	1.866	2.366	−11.38	18.19	23.07
7	0.0194	151.32	−1.833	1.866	2.366	−277.37	282.36	358.02
总计	1.0244	7990.32				3596.6	4230.3	5016.5

$$\sum_{k=1}^{7} m_{B_k}\rho_{G_k}=3596.6\mathbf{N}_1+4230.3\mathbf{N}_2+5016.5\mathbf{N}_3 \quad \mathrm{kgm}$$

(6.4.10)

ρ_G为

$$\rho_G=\sum_{k=1}^{7} m_{B_k}\rho_{G_k}\Big/\sum_{k=1}^{7} m_{B_k}=0.450\mathbf{N}_1+0.529\mathbf{N}_2+0.628\mathbf{N}_3\mathrm{m} \tag{6.4.11}$$

表6.4.1及各和式易于表达为计算机算法。首先输入第1、2和3列数据。其次，引用较低序体联接阵列（见4.2节）。本例无分支，阵列很简单

$$L^{\circ}(K)=(1,2,3,4,5,6,7)$$

$$L(K)=(0,1,2,3,4,5,6) \tag{6.4.12}$$

而后导出固定在各物体上的单位矢量与固定在XYZ坐标系上的单位矢量$\mathbf{N}_i(i=1,2,3)$间的变换矩阵。如前，称各矩阵为$SOK(K=1,\cdots,7)$。由式(4.8.3)SOK可写为

$$SOK=SOJSJK \tag{6.4.13}$$

式中SJK表示B_k与其相邻低序体B_j间的变换矩阵。

对图6.4.2系统，各SJK为

$$S01=S23=S67=I$$

$$S12=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$S34=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad (6.4.14)$$

$$S45=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad S56=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式中I仍表示单位矩阵。反复使用式(6.4.13)全部$SOK(K=1,\cdots,7,)$皆可确定。

最后，式(6.4.8)的位置矢量$\mathbf{p}_{G_k}$可写成

$$\mathbf{p}_{G_k}^{(0)}=\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\cdots+\mathbf{q}_j+\mathbf{q}_k+\mathbf{r}_k \qquad (6.4.15)$$

式中$\mathbf{q}_k$为给定该物体参考点（原点）至其相邻低序体的参考点之间的位置矢量（见4.12节）。$\mathbf{r}_k$为给定B_k的G_k至其参考点O_k间的位置矢量。因$\mathbf{r}_k$固定在B_k上，而$\mathbf{q}_k$固定在B_j上，$\mathbf{p}_{G_k}$可写成

$$\mathbf{p}_{G_k}=(SOO_{lm}q_{1m}+SO1_{lm}q_{2m}+\cdots+SOJ_{lm}q_{km}+SOK_{lm}r_{km})\mathbf{N}_l \qquad (6.4.16)$$

式中SOO为I。

如图6.4.2系统$\mathbf{q}_k$和$\mathbf{r}_k$各分量为

$$\mathbf{q}_1:(0,\ 0,\ 0),\ \mathbf{q}_2:(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},1),\ \mathbf{q}_3:(\tfrac{1}{6},\ 0,\ 1),$$
$$\mathbf{q}_4:(1,\ 0,\ 0),\ \mathbf{q}_5:(1,\ 0,\ 0),\ \mathbf{q}_6:(1,\ 0,\ 0),$$
$$\mathbf{q}_7:(1,\ 0,\ 0) \qquad (6.4.17)$$

和

$$\mathbf{r}_1:(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}),\quad \mathbf{r}_2:(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}),\quad \mathbf{r}_3:(\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0),$$