指數与对數

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新知識出版社

指 數 与 对 數

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一九五六年·上海

指　數　与　对　數

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

*

新　知　識　出　版　社　出　版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号
上海信誠印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

開本：787×1092　1/32　印張：2 3/4　字數：62,000
1956年5月第1版　1956年5月第1次印刷
印數：1—35,000本

統一書号：13076·40
定　价：(7) 0.26元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教師積極提高教学質量，並根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有關高初中數学各科包括代數、几何、三角、算術教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学數学教師作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同時，也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使數学界同志对中学數学教材的研究得到廣泛的交流。

这本“指數与对數”的小册子，是按數学教学大綱修訂草案“指數概念的普遍化”及“指數函數与对數”編寫的。它首先敍述了零指數、負指數、分指數產生的必然性；其次定义它們使指數定律普遍化；再借助於極限理論定义無理指數而導出指數函數及其反函數——对數函數，突出了常用对數的性質及其应用，並介紹算尺的構造原理及其使用方法；最后敍述了指數方程及对數方程的解法。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，邀請上海市十余个学校的高中代數教師参加意見，又經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分别由黃公安、夏守岱兩同志提供材料，而由范际平同志执筆寫成，再經程其襄、楊榮祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由於我們水平有限，時間忽促，缺點是难免的，希望數学界同志予以批評和指正。

中國數学会上海分会中学數学研究委員会

1956 年 3 月

目 錄

一 指數概念的普遍化

我們曉得有理式的运算所根据的主要法則是指數法則：

1. $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

2. $$a \neq 0.$$

(1) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (m > n);$$

(2) $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\ (m < n);$$

(3) $$\frac{a^m}{a^n} = 1.\ (m = n)$$

3. $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

4. $$(ab)^n = a^n b^n.$$

5. $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.\ (b \neq 0)$$

m, n 都是正整數。

又無理式的运算所根据的主要法則是根式运算公式：

1. $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

2. $$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

3. $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.\ (b \neq 0)$$

4. $$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

5. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

m, n, p 都是正整數且 a 与 b 都不能是負实數。

很明顯地我們要記兩套公式，而且指數法則 2 有三种情况，这样更感到不方便。所以我們目前要想办法把它們統一起來，要使上面的公式变得更單純。

由
$$\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3,$$

$$\frac{a^4}{a^2}=a^{4-2}=a^2,$$

$$\frac{a^3}{a^2}=a^{3-2}=a$$

的一系列地分子指數逐步減 1 的除法运算中，如果分子指數再減 1 应为$\frac{a^2}{a^2}$；按指數法則 2 中(3)得$\frac{a^2}{a^2}=1$. 但我們如果仍然要求和前面一样都用指數法則 2 中(1)运算，則

$$\frac{a^2}{a^2}=a^{2-2}=a^0.$$

所以零指數必然產生，而且很明顯地要規定 $a^0=1$. 才可以办到。

这里我們要認清楚 a^0 不是 0 个 a 相乘的意思，是为了指數法則对於零指數也適用的道理而定义 $a^0=1$. $(a\neq 0)$。

零指數的意义确定后，我們再來闡明指數法則也適用於零指數的道理。

(1) 因为 $a^m\cdot a^0=a^m\cdot 1=a^m=a^{m+0}$.

表明当 m 是正整數 n 是零時，

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

同理当 m 是零，n 是正整數時，此法則也能成立。

(2) 因为 $\frac{a^m}{a^0}=\frac{a^m}{1}=a^m=a^{m-0}$.

表明当 m 是正整數，n 是零時，

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

又因为 $$\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{n-0}},$$

表明当 m 是零，n 是正整數時，

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

(3) 因为 $$(a^m)^0=1=a^0=a^{m\cdot 0}.$$

表明当 m 是正整數，n 是零時，

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

同理当 m 是零，n 是正整數時，此法則也能成立。

(4) 因为 $$(ab)^0=1=a^0b^0.$$

表明当 n 是零時，

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

(5) 因为 $$\left(\frac{a}{b}\right)^0=1=\frac{a^0}{b^0}.$$

表明当 n 是零時，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

一般認为由於 $a^0=a^{m-m}=\dfrac{a^m}{a^m}=1$，便論証了 $a^0=1$. 要知道这是倒果为因，違反邏輯系統的，我們要特別注意。

又由 $$\frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2,$$

$$\frac{a^4}{a^3}=a^{4-3}=a,$$

$$\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$$

的一系列地分子指數逐步減 1 的除法运算中，如果分子指數再減 1 应为 $\dfrac{a^2}{a^3}$. 按指數法則 2 中(2)得 $\dfrac{a^2}{a^3}=\dfrac{1}{a^{3-2}}=\dfrac{1}{a}$. 但我們如果仍然要求和前面一样，都用指數法則 2 中(1)运算。則

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1}.$$

所以負整指數必然產生，而且很明顯地要規定$a^{-1}=\frac{1}{a}$才可以办到。一般說起來，要使$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$当$m<n$時也能適用，必須定义$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$.（r为正整數且$a\neq 0$）

負整指數的意义确定后，我們再來闡明指數法則也適用於負整指數的道理。

（1）因为 $a^{-r}\cdot a^{-s}=\frac{1}{a^r}\cdot\frac{1}{a^s}=\frac{1}{a^{r+s}}=a^{-(r+s)}=a^{-r-s}$.

表明当m,n都是負整數時，

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

同理如m,n是他种情形時，此法則也能成立。

（2）因为 $\frac{a^{-r}}{a^{-s}}=\frac{\frac{1}{a^r}}{\frac{1}{a^s}}=\frac{a^s}{a^r}=a^{s-r}=a^{-r-(-s)}$.

表明当m,n都是負整數時，

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

同理如m,n是他种情形時，此法則也能成立。

（3）因为 $(a^{-r})^n=\left(\frac{1}{a^r}\right)^n=\frac{1}{a^{rn}}=a^{-rn}$.

表明当m是負整數，n是正整數時，

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

同理如m,n是他种情形時，此法則也能成立。

（4）因为 $(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}$.

表明当 n 是負整數時，

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

（5）因为 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-s}=\left(\frac{b}{a}\right)^s=\frac{b^s}{a^s}=\frac{a^{-s}}{b^{-s}}.$

表明当 n 是負整數時，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

現在我們要求 a^6 的立方根，按根式运算公式

$$\sqrt[3]{a^6}=a^2=a^{\frac{6}{3}}.$$

同样要求 a^{20} 的五次方根，按根式运算公式

$$\sqrt[5]{a^{20}}=a^4=a^{\frac{20}{5}}.$$

所以如 p 是 q 的倍數時，

$$\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}.$$

但如 p 不是 q 的倍數時，我們如果要求指數法則 3 当 $m=\frac{p}{q}$、$n=q$ 也適用，卽

$$(a^{\frac{p}{q}})^q=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p.$$

由於 $(\sqrt[q]{a^p})^q=a^p$，自然应当規定 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$．（$a\neq 0$）
那末当 p 不是 q 的倍數時和当 p 是 q 的倍數時的意义完全一致了。例如 $\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{3}}$，$\sqrt[5]{a^{19}}=a^{\frac{19}{5}}$.

分指數的意义确定后，我們再來闡明指數法則也適用於分指數的道理。

（1）因为 $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\sqrt[qs]{a^{rq}}$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$$

$$=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

表明当 m,n 都是正分數時，

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

同理如 m,n 是他种情形時，此法則也能成立。

(2) 因为 $$\frac{a^{-\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}}=\frac{\sqrt[s]{a^{-p}}}{\sqrt[s]{a^{r}}}=\sqrt[qs]{\frac{a^{-ps}}{a^{rq}}}=\sqrt[qs]{a^{-ps-rq}}$$

$$=a^{\frac{-ps-rq}{qs}}=a^{-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}.$$

表明当 m 是負分數，n 是正分數時，

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

同理如 m,n 是他种情形時，此法則也能成立。

(3) 因为 $$(a^{-\frac{p}{q}})^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{(a^{-\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^{-p}})^r}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{-pr}}}}=\frac{1}{\sqrt[qs]{a^{-pr}}}$$

$$=\frac{1}{a^{-\frac{pr}{qs}}}=a^{\frac{pr}{qs}}=a^{-\frac{p}{q}\times-\frac{r}{s}}.$$

表明当 m,n 都是負分數時，

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

同理如 m,n 是他种情形時，此法則也能成立。

(4) 因为 $$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

表明当 n 是正分數時 $(ab)^n=a^nb^n$。

同理当 n 是負分數時，此法則也能成立。

分指數和根式建立關系后，根式运算公式中被開方式的值不能是負數的限制，我們不能忽略它，否則会產生混乱現象。

例如 $$3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3},\quad 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9},$$

$$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{9}}=\sqrt[9]{3^3}=\sqrt[9]{27}.$$

按算術根的規定，它們的值是相等的。

但如　$(-3)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}$，其值是負數，

$(-3)^{\frac{1}{3}}=(-3)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-3)^2}=\sqrt[6]{9}$，其值是正數。

这不是發生矛盾的現象嗎？

又如　$(-3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-3}$，在实數集合中沒有意义，

而　$(-3)^{\frac{1}{2}}=(-3)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}$ 在实數集合中有了意义。所以在定义 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ 時，如果強調 a 不能是負數的限制，便可以妨止類似这样的矛盾現象。

又因　$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$

所以　$(ab)^n=a^nb^n$ 及 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ 因为負指數的意义明确而統一起來。因而指數法則歸納为

1.　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

2.　$(a^m)^n=a^{mn}$,

3.　$(ab)^n=a^nb^n$.

m, n 都是有理數。

例 1.
$$\left(3^9\times\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left[3^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}.$$

例 2.
$$\frac{a}{bc}-\frac{b^{-1}}{c^{-2}}-\frac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\frac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$$
$$=\frac{a}{bc}-\frac{c^2}{b}-\frac{a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{b+c}+\frac{b+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$
$$=\frac{a}{bc}-\frac{c^2}{b}-\frac{a\cdot\frac{b+c}{bc}}{b+c}+\frac{b+c}{\frac{b+c}{bc}}$$

$$=\frac{a}{bc}-\frac{c^2}{b}-\frac{a}{bc}+bc=bc-\frac{c^2}{b}.$$

例 3.

$$\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$=\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1-(x^{\frac{1}{3}}-1)$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+2.$$

例 4. 求 $(3a^{-\frac{1}{3}}+a+2a^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-2)$ 之積。

【解】

$$\begin{array}{llll}
 & a+2a^{\frac{2}{3}} & & +3a^{-\frac{1}{3}} \\
 & a^{\frac{1}{3}}-2 & & \\
\hline
a^{\frac{4}{3}}+2a & & +3 & \\
 & -2a-4a^{\frac{2}{3}} & & -6a^{-\frac{1}{3}} \\
\hline
a^{\frac{4}{3}} & -4a^{\frac{2}{3}} & +3 & -6a^{-\frac{1}{3}}.
\end{array}$$

例 5. $(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3$

$$=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2(y^{-\frac{2}{3}})+3(x^{\frac{2}{3}})(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例 6. 求$(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{-1}-3xy^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{3}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})$之商。

【解】

$$\begin{array}{r|l}
x^{\frac{3}{2}}-3xy^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{-1}-y^{-\frac{3}{2}} & x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}} \\
\cline{2-2}
-x^{\frac{3}{2}}+xy^{-\frac{1}{2}}\qquad\qquad\qquad\qquad & x-2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1} \\
\cline{1-1}
-2xy^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{-1}\qquad\quad & \\
2xy^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{-1}\qquad\quad & \\
\cline{1-1}
x^{\frac{1}{2}}y^{-1}-y^{-\frac{3}{2}} & \\
-x^{\frac{1}{2}}y^{-1}+y^{-\frac{3}{2}} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

上面諸例运算結果所表出的形式是看各例要求而决定的。例一因为是求數值，所以应当將負整指數化为正整指數再進行乘方运算，結果便不能是負整指數形狀。例二是將負整指數化为正整指數而進行分式四則运算，所以結果自然是正整指數的形式。其他各例，由於我們已經建立了指數是有理數和指數是正整數法則运算的統一性，不必化負指數为正指數，化分指數为根式再行运算，所以它們的結果都是保留着原來指數的形式。而且它們的結果，指數都是按照有理數的大小順序排列，不是很整齐的嗎？

分指數与根式既然建立了联系關系，根式运算自然可以先將根式化为分指數，脫离了根式运算公式，而按推廣后的指數法則运算。

例 1. 証明 $\sqrt[3]{81a^3x}$, $\sqrt[6]{\frac{64x^2}{81}}$ 是同類根式

【解】 $\sqrt[3]{81a^3x}=\sqrt[3]{3^4a^3x}=3^{\frac{4}{3}}a^{\frac{3}{3}}x^{\frac{1}{3}}=3^{1\frac{1}{3}}ax^{\frac{1}{3}}=3a\sqrt[3]{3x}$,

$$\sqrt[6]{\frac{64x^2}{81}}=\sqrt[6]{\frac{2^6x^2}{3^4}}=2^{\frac{6}{6}}x^{\frac{2}{6}}\times 3^{-\frac{4}{6}}=2x^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{2x^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}\times 3}{3}=\frac{2x^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3x}.$$

所以是同類根式。[1]

例 2. $$\frac{4\sqrt[3]{4xy^2}\sqrt{2x}}{6\sqrt[6]{16x^5y^3}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2xy^2}\sqrt{2x}}{3\sqrt[6]{2^4x^5y^3}}$$

$$=2\times 2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times 3^{-1}\times 2^{-\frac{4}{6}}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{3}{6}}$$

$$=2^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{4}{6}}\times 3^{-1}x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}-\frac{3}{6}}$$

$$=2^{\frac{9}{6}}\times 3^{-1}x^0y^{\frac{1}{6}}=2^{1\frac{3}{6}}\times 3^{-1}y^{\frac{1}{6}}$$

---

① 見本会編“無理數与無理式”，新知識出版社 1955 年版，第 38 頁。

$$=\frac{2}{3}\sqrt[6]{8y}.\text{①}$$

例 3. $$\sqrt{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[4]{a^3}}}=\sqrt{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{2}{5}}}}\times\sqrt[3]{\frac{b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{3}{4}}}}=\frac{a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{5}}}\times\frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}$$

$$=a^{\frac{2}{4}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

例 4. $$\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\sqrt[3]{a^{13}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}a^{-\frac{3}{2}}}}{\sqrt{a^{-\frac{7}{3}}a^{\frac{13}{3}}}}=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt{a^{\frac{6}{3}}}}=\frac{a}{a}=1.$$

例 5. $$(2\sqrt[6]{xy^2z^3})^9=(2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{6}}z^{\frac{3}{6}})^9=2^9x^{\frac{3}{2}}y^3z^{\frac{9}{2}}$$

$$=2^9x^{1\frac{1}{2}}y^3z^{4\frac{1}{2}}=512xy^3z^4\sqrt{xz}.\text{②}$$

例 6. $$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}}=x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=x\sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}=x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}=x\cdot x^{\frac{7}{8}}=x\sqrt[8]{x^7}.\text{③}$$

在沒有定义無理指數冪的意义前，讓我們先討論底數为正实數正有理指數冪几个重要性質。

1. 底數不相等指數相等時，底數較大的其冪值較大。即

設 $a>b>0$, $m>0$ 則 $a^m>b^m$.

(1) 如 m 是整數，很明顯地成立。

例如 $3^2>2^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

(2) m 是分數，設为 $\frac{p}{q}$.

則 $a^m=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, $b^m=b^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{b^p}$,

$\because$ $a^p>b^p$,

---

①②③ 見本会編："無理數与無理式"，新知識出版社 1955 年版，第 40 頁。

$\therefore \qquad \sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^p}.$

即 $\qquad a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}},$

也即 $\qquad a^m > b^m.$

2. 底數相等且大於 1 時，較大的指數有較大的冪值。 即

設 $a>1$, 且 $m>n>0$, 則 $a^m>a^n$.

(1) m, n 是整數時，

$\because \qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} > 1,$

$\therefore \qquad a^m > a^n.$

(2) m, n是分數時，設 $m=\dfrac{p}{q}, n=\dfrac{r}{s}$. (可設 p, q, r, s 为正整數。)

$\because \quad m>n$, 即 $\dfrac{p}{q} > \dfrac{r}{s}$, $ps>qr$, $(\because q>0, s>0)$

$$a^m = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qs]{a^{ps}},\ a^n = a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{qr}}.$$

又 $\because \quad ps>qr, \quad \therefore \quad a^{ps}>a^{qr},$ 而 $a^m>a^n$.

3. 底數相等且是小於 1 的正數時，較大的指數有較小的冪值。 即

設 $0<a<1$, 且 $m>n>0$, 則 $a^m<a^n$.

証明与 2 相做。

4. 設 a 为不等於 1 的正实數，數列 $\{a\}^{\frac{1}{n}}$ 的極限是 1.

(1) 如 $a>1$, 則 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}$, 即 $a^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}}$, 也即 $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

設 $\qquad a^{\frac{1}{n}} = 1+h, (h>0)$

故当 n 为大於 1 的正整數時，則

$a=(1+h)^n = 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n$. (高三講授二項式定理時將知道)

$\therefore \qquad a>1+nh, \qquad \frac{a-1}{n}>h,$

即 $$\frac{a-1}{n}>a^{\frac{1}{n}}-1>0.$$

由於 $a-1$ 是一定值，故当 n 無限增大時，$\frac{a-1}{n}$ 可小於預先給定的任意小的正數 ε，即 $\lim a^{\frac{1}{n}}=1$.

(2) 如 $\quad 0<a<1$, 則 $\quad \frac{1}{a}>1$,

而 $$a^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$\therefore \qquad \lim a^{\frac{1}{n}}=\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1.$$

所謂無理指數冪的意义，就是要研究一下 a^{α}，α 表示無理數，a 表示不等於 1 的正实數的意义。

讓我們先研究 α 为正無理數的情况，可分为下面兩种情况。

1. $\qquad a>1.$

例如我們取 $\sqrt{2}$ 的不足近似值和过剩近似值作出下面兩个數列：

$$10^{1.4},\ 10^{1.41},\ 10^{1.414},\ 10^{1.4142},\ \cdots\cdots \tag{1}$$
$$10^{1.5},\ 10^{1.42},\ 10^{1.415},\ 10^{1.4143},\ \cdots\cdots \tag{2}$$

並設 $\sqrt{2}$ 精确到 0.1, 0.01, 0.001, ……的不足近似值依次为 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots b_n, \cdots\cdots$，而其过剩近似值依次为 $b_1', b_2', b_3', \cdots\cdots, b_n', \cdots\cdots$.

由前面所述的第二个性質，知道數列(1)是一个遞增數列但恆小於 $10^{1.5}$，所以它有極限。

同样數列(2)是一个遞減數列但恆大於 $10^{1.4}$，所以它也有