黄冈市资深教育专家编写

黄冈数学题库

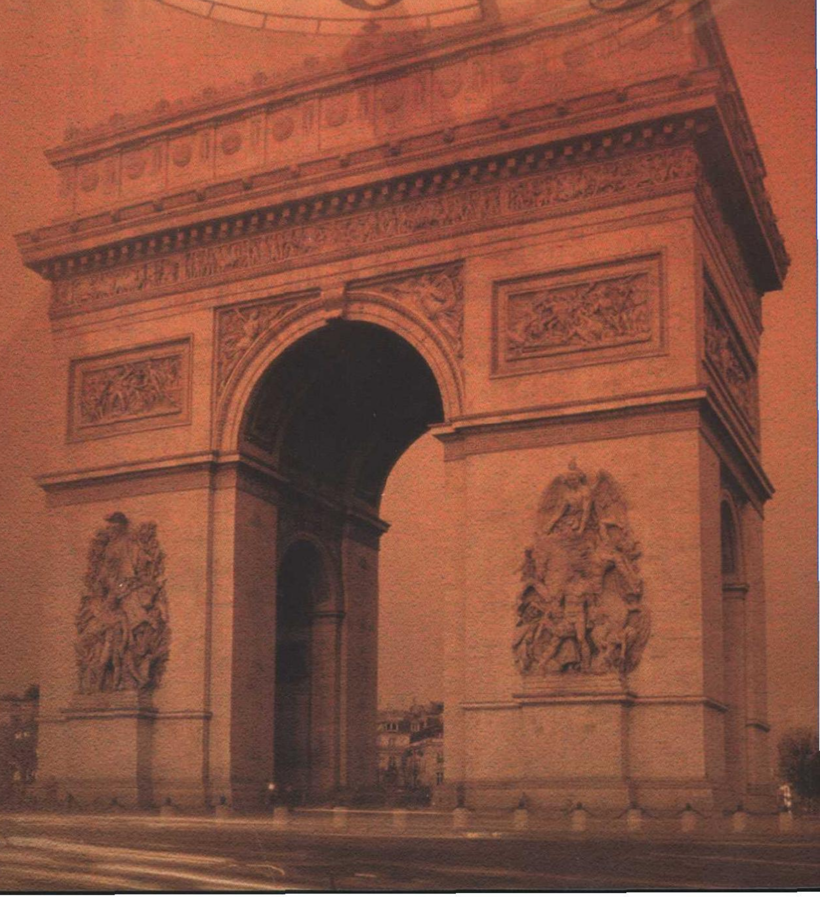
黄冈数学题库

综合题（上）

全国十年中考数学试题分类汇析

不可多得的高分秘诀

主 编 南秀全



青岛出版社

黄冈数学题库

综合题（上）

全国十年中考数学试题分类汇析

主编　南秀全

图书在版编目(CIP)数据

黄冈数学题库:综合题(上)/南秀全主编.—青岛:青岛出版社,2003
ISBN 7-5436-2866-X

Ⅰ.黄...　Ⅱ.南...　Ⅲ.数学课—初中—习题—升学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 030711 号

书　　名　**黄冈数学题库:综合题(上)**
主　　编　南秀全
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市徐州路 77 号(266071)
邮购电话　(0532)5814750　5814611—8664
责任编辑　郭东明　杨成舜
装帧设计　徐凤宝
出版时间　2003 年 7 月第 1 版,2003 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
印　　刷　青岛星球印刷有限公司
开　　本　16 开(787×1092 毫米)
印　　张　20
插　　页　2
字　　数　450 千
ISBN 7-5436-2866-X
定　　价　20.00 元

(青岛版图书售出后发现倒装、错装、字迹模糊、缺页、散页等质量问题,请寄回承印公司调换。胶南市珠山路 120 号　电话:0532-8183519　邮编:266400)

编者的话

由于每年全国各地的中考数学试题，都是由有关部门组织专家、教育工作者和一线骨干教师根据教学大纲和教材要求精心设计的，这些试题要求适当、覆盖面广、题型新颖、训练的针对性强、实用性大。用这些中考试题作为学习新课时的同步辅导资料或中考前的总复习依据的教学方式在各地迅速推广，而且效果非常好。因为它既减轻了广大师生教与学的负担，提高了学生学习数学或数学复习的效率，节省了学习时间，在短期内收到了事半功倍的效果，并且使学生在数学学习过程中，自始至终有一个明确的达标目的，从中领会中考试题的难易程度。因此，考虑到教师教学和学生学习的需要，并结合多年来的命题实践，我们从近年来全国各地中考试卷中，精选了教师在教学中经常作为例题和习题的典型的、新颖的、优秀的试题，并加以分类评析，编写了这套“黄冈数学题库”丛书，分类汇析近十年全国各地中考数学试题。

本丛书共分 8 册，分别为几何(上、下)、代数(上、下)、热点题与创新题(上、下)、综合题(上、下)。可供初中同学学习新课时同步辅导或中考前第一轮总复习时使用。

书中每一小节由以下几个部分组成：

【考点目标要求】依据九年义务教育教学大纲的要求和中考试题的实际，阐述本节的具体学习目标要求。

【知识要点归纳】对中考试题中重点考查的知识点，对其进行简明扼要的归纳和分析。

【命题热点规律探析】主要阐述本节知识在中考试卷中可能出现的题型，试题难易程度，所占分数的比例以及学习时应注意的一些问题，以及今后中考试题的考查趋向。

【热点考题精讲】主要是对从近几年来全国各地中考试卷中精选出来的典型的试题加以分析和解答，以展示本节的主要内容、方法、技能和技巧。

【热点考题训练】配备了从各地中考试卷中精选出来的重点、热点试题(包括填空题、选择题和解答题，特别是一些新题型)，学生通过这些试题的练习，进一步巩固和深化本节所学的知识。

参加本书编写的有南秀全、余石、王田平、程汝洪、张晓霞、刘葆华、江海波、刘世平、纪尚念、吴任帮、杜胜、杨世平、李晓星、何平、余艳华、付成凤、余梦、杨仕春、周胜涛、祖海英、余博文、肖九河、汪大勇、徐芸、石涧、段克全、沈立成、宋英莲、柯胜芸、刘俊杰、南欣、胡存育、赵大明、杨克尔等同志。

由于编者水平有限，书中难免有缺点和疏漏之处，我们热诚希望广大师生多提宝贵建议，以便及时纠正，使这套书更加臻于完善。同时，我们将根据每年全国各地中考试题的特点和题型的变化，不断地加以修改和充实，力争把最新的信息、最实用的资料奉献给广大读者。

目　　录

一、方程与根的判别式、根与系数的关系有关的问题

在本书里，我们就近年来全国各地中考数学试卷中的重点热点题型分类剖析如下(这里的分类不是严格的逻辑分类，只是就常见的重点题型进行大致的分类).

方程(组)是初中代数的重要组成部分，在历年各地中考试题中，这部分内容占有相当重要的地位，这类题型主要是以二次方程为背景，结合几何、三角或其他代数知识，利用二次方程的有关理论(解方程、判别式、韦达定理、构造方程等)来解决问题．各地中考常把这类题作为压轴题来考查．

【经典考题精析】

例 1 (杭州市，2002)已知某二次项系数为 1 的一元二次方程的两个实数根为 p,q，且满足关系式 $\begin{cases}p+q(p+1)=5,\\ p^2q+pq^2=6.\end{cases}$ 试求这个一元二次方程．

解 设此一元二次方程为 $x^2+bx+c=0$，则由韦达定理有 $p+q=-b, pq=c$. (*)

已知关系式可变形为 $\begin{cases}(p+q)+pq=5,\\ pq(p+q)=6.\end{cases}$ 将(*)式代入可解得 $\begin{cases}b=-2,\\ c=3;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-3,\\ c=2.\end{cases}$ 所以所求的一元二次方程为 $x^2-3x+2=0$. 另一方程 $x^2-2x+3=0$ 因无实数根应舍去．

例 2 (山西省，2002)阅读理解题．阅读下列材料：关于 x 的方程：$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c, x_2=\frac{1}{c}$；$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$(即 $x+\frac{-1}{x}=c+\frac{-1}{c}$)的解是 $x_1=c, x_2=-\frac{1}{c}$；$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c, x_2=\frac{2}{c}$；$x+\frac{3}{x}=c+\frac{3}{c}$ 的解是 $x_1=c, x_2=\frac{3}{c}$；…….

(1)请观察上述方程与解的特征，比较关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}(m\neq0)$ 与它们的关系，猜想它的解是什么，并利用“方程的解”的概念进行验证．

解 $x_1=c, x_2=\frac{m}{c}$. 验证：当 $x_1=c$ 时，左边 $=c+\frac{m}{c}=$ 右边，$\therefore$ $x_1=c$ 是原方程的解．

当 $x_2=\frac{m}{c}$ 时，左边 $=\frac{m}{c}+\frac{m}{\frac{m}{c}}=c+\frac{m}{c}=$ 右边，$\therefore$ $x_2=\frac{m}{c}$ 是原方程的解．

(2)由上述的观察、比较、猜想、验证，可以得出结论：

如果方程的左边是未知数与其倒数的倍数的和，方程右边的形式与左边完全相同，只是把其中的未知数换成了某个常数，那么这样的方程可以直接得解．请用这个结论解关于 x 的方程：$x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$.

解 原方程可化为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$.

由以上结论可知：$x-1=a-1$，或 $x-1=\frac{2}{a-1}$. ∴ $x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$. 经检验：$x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$均为原方程的解．

例 3 （北京市东城区，2000）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx-3m^2+8m-4=0$.

(1)求证：当 $m>2$ 时，原方程永远有两个实数根；

(2)若原方程的两个实数根中一个小于 5，另一个大于 2，求 m 的取值范围．

(1)**证明**　$\Delta=(-2m)^2-4(-3m^2+8m-4)=4m^3+12m^3-32m+16=16(m-1)^2$.

∵　无论 m 取任何实数，都有 $16(m-1)^2\geqslant 0$，

∴　m 取任意实数时，原方程永远都有两个实数根．

自然，当 $m>2$ 时，原方程也永远有两个实数根．

(2)**解**　解关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx-3m^2+8m-4=0$，得

$$x=\frac{2m\pm\sqrt{16(m-1)^2}}{2}=m\pm 2(m-1).$$

∴　$x_1=3m-2$，$x_2=2-m$.

解已知不等式组 $\begin{cases}3m-2<5,\\2-m>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-m<5,\\3m-2>2,\end{cases}$ 得　$m<0$ 或 $m>\frac{4}{3}$.

即　m 的取值范围是 $m<0$ 或 $m>\frac{4}{3}$.

例 4 （厦门市，2001）已知关于 x 的方程 $x^2+2x+1-m^2=0$.

(1)求证：方程有两个实数根；

(2)设方程的两个实数根为 x_1，x_2，且有 $x_1^2-x_2^2=2$，求 m 的值．

(1)**证明**　∵　$a=1\neq 0$，又∵　$\Delta=2^2-4(1-m^2)=4m^2\geqslant 0$，∴　方程有两个实数根．

(2)**解法一**　由 $x_1^2-x_2^2=2$，∵　$x_1+x_2=-2$. ∴　$x_1-x_2=-1$. 解得 $x_1=-\frac{3}{2}$.

把 x_1 代入原方程得 $(-\frac{3}{2})^2-2\times(-\frac{3}{2})+1-m^2=0$. 解得 $m^2=\frac{1}{4}$. ∴　$m=\pm\frac{1}{2}$.

解法二　由 $\begin{cases}x_1+x_2=-2,\\x_1^2-x_2^2=2,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2},\\x_2=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

又 $x_1\cdot x_2=1-m^2$，∴　$\frac{3}{4}=1-m^2$. ∴　$m^2=\frac{1}{4}$.　∴ $m=\pm\frac{1}{2}$.

例 5 （重庆市，2001）若 $n>0$，关于 x 的方程 $x^2-(m-2n)x+\frac{1}{4}mn=0$ 有两个相等的正实数根，求 $\frac{m}{n}$ 的值．

解　∵　$x^2-(m-2n)x+\frac{1}{4}mn=0$ 有两个相等的实数根．∴　$\Delta=(m-2n)^2-mn=0$.

整理得：$m^2-5mn+4n^2=0$. ∴　$m=4n$ 或 $m=n$. 又∵　$x^2-(m-2n)x+\frac{1}{4}mn=0$ 的两根均为正根，∴　$x_1+x_2=m-2n>0$，$x_1x_2=\frac{1}{4}mn>0$.

∵　$n>0$，当 $m=n$ 时，$x_1+x_2=m-2n=-n<0$，∴　$m=n$ 舍去．∴　$m=4n$，即 $\frac{m}{n}=4$.

例 6 （荆门市，1998）已知关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2-4x+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2. (1)求 k 的取值范围；(2)当方程两根之积的倒数等于两根之和的 4 倍时，求 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值．

解　(1)∵ 方程有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=(-4)^2-4(k-1)\times1=20-4k>0$. $\therefore k<5$.

又$\because k-1\neq0$, $\therefore k\neq1$. $\therefore k$的取值范围是$k<5$且$k\neq1$.

(2)依题意,得$\frac{1}{x_1x_2}=4(x_1+x_2)$,

又$\because x_1\cdot x_2=\frac{1}{k-1}, x_1+x_2=\frac{4}{k-1}$, $\therefore k-1=4\times\frac{4}{k-1}$,解得$k_1=5, k_2=-3$.

由(1)知$k<5$, $\therefore k=-3$. $\therefore x_1x_2=-\frac{1}{4}, x_1+x_2=-1$.

$$\therefore \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1{}^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(-1)^2-2\times(-\frac{1}{4})}{-\frac{1}{4}}=-6.$$

例7 (天津市,1998)若方程$m^2x^2-(2m-3)x+1=0$的两个实数根的倒数和是S,求S的取值范围.

解 设方程$m^2x^2-(2m-3)x+1=0$的两个实数根为x_1, x_2,则

$x_1+x_2=\frac{2m-3}{m^2}, x_1x_2=\frac{1}{m^2}$.

$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2m-3}{m^2}\div\frac{1}{m^2}=2m-3$.

$\because$方程有两个实数根,$\therefore \Delta=(2m-3)^2-4m^2=-12m+9\geqslant0$,且$m^2\neq0$.

$\therefore m\leqslant\frac{3}{4}$且$m\neq0$.

由$S=2m-3$,得$m=\frac{S+3}{2}$. $\therefore \frac{S+3}{2}\leqslant\frac{3}{4}$且$\frac{S+3}{2}\neq0$. $\therefore S\leqslant-\frac{3}{2}$且$S\neq-3$.

说明 在利用一元二次方程的根的判别式求方程中字母系数的值时,如果问题中指明是二次方程或方程有两个实数根,应注意方程的二次项系数不等于0. 在利用根与系数的关系求字母系数的值或取值范围时,一定要考虑方程有实数根的前提$\Delta\geqslant0$,且二次项系数$a\neq0$. 以上两点是学生在解题时经常被忽视的问题,应引起我们的高度重视.

例8 (黄石市,1997)已知关于x的方程$(a^2-1)x^2+2(a+2)x+1=0$有实数根,求a的取值范围.

解 根据题意,方程有实数根,应有两种情形:

(1)当$a^2-1=0$,即$a=\pm1$时,方程为$2(\pm1+2)x+1=0$有实数根,$\therefore a=\pm1$.

(2)当$a^2-1\neq0$时,方程为二次方程,$\therefore \Delta=4(a+2)^2-4(a^2-1)\geqslant0$,且$a^2-1\neq0$.

解得$a\geqslant-\frac{5}{4}$且$a\neq\pm1$.

综上所述,a的取值范围为$a\geqslant-\frac{5}{4}$.

例9 (黄冈市,1996)已知关于x的方程为$(k-2)x^2-2(k-1)x+(k+1)=0$,且$k\leqslant3$. (1)求证:此方程总有实数根;(2)当方程有两个实数根,且两实数根的平方和等于4时,求k的值.

(1)**证明** ⅰ)当$k=2$时,方程为一次方程$-2x+3=0$,显然它有一个实数根$x=\frac{3}{2}$.

ⅱ)当$k\neq2$时,方程为一元二次方程,且$\Delta=[-2(k-1)]^2-4(k-2)(k+1)=4(3-k)$.

$\because k\leqslant3$, $\therefore 3-k\geqslant0$,即$\Delta\geqslant0$. 此时方程有两个实数根.

综上,原方程总有实数根.

(2)**解** 设方程两实根为x_1, x_2,则$x_1+x_2=\frac{2(k-1)}{k-2}, x_1x_2=\frac{k+1}{k-2}$.

又$\because x_1{}^2+x_2{}^2=4$,即$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$, $\therefore [\frac{2(k-1)}{k-2}]^2-2\cdot\frac{k+1}{k-2}=4$,

整理得$k^2-5k+4=0$,解得$k_1=1, k_2=4$.

$\because k\leqslant3$, $\therefore k=1$.

说明　在应用一元二次方程的根的判别式解题时,如果问题中没有指明是什么方程或方程有两个实数根时,应考虑方程是一元一次方程和一元二次方程两种可能的情形.

例10　(厦门市,2000)(1)设 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2+kx+2=0$ 的两个根.

求证:$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{k}{2}=0$.

(2)如果关于 x 的方程 $x^2+kx+2=0$ 及方程 $x^2-x-2k=0$ 均有实数根,问方程 $x^2+kx+2=0$ 与方程 $x^2-x-2k=0$ 是否有相同的根.若有,请求出这个相同的根;若没有,请说明理由.

(1)**证明**　$\because x_1,x_2$ 是方程 $x^2+kx+2=0$ 的两个根,

$\therefore x_1+x_2=-k,x_1\cdot x_2=2,\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{k}{2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{k}{2}=-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=0$.

(2)**解**　设方程 $x^2-x-2k=0$ 与方程 $x^2+kx+2=0$ 有相同的根 α,则可得 $\begin{cases}\alpha^2-\alpha-2k=0,\\ \alpha^2+k\alpha+2=0.\end{cases}$

$\therefore k\alpha+2+\alpha+2k=0.\ \alpha(k+1)+2(k+1)=0$,即$(\alpha+2)(k+1)=0$. 若 $k+1=0$,则 $k=-1$.

$\therefore$方程 $x^2+kx+2=0$,即为 $x^2-x+2=0$(注:也可代入另一方程).

而这时,$\Delta=1-8=-7<0$(不合题意),$\therefore k\neq-1$,即 $k+1\neq0$. $\therefore \alpha+2=0$. 即 $\alpha=-2$.

$\therefore$两个方程有相同的根-2.

例11　(嘉兴市、杭州市,2001)已知方程 $a(2x+a)=x(1-x)$ 的两个实数根为 x_1、x_2,设 $S=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$.

(1)当 $a=-2$ 时,求 S 的值;

(2)当 a 取什么整数时,S 的值为1?

(3)是否存在负数 a,使 S^2 的值不小于25?,若存在,请求出 a 的取值范围;若不存在,请说明理由.

解　(1)当 $a=-2$ 时,原方程化为 $x^2-5x+4=0$.

解得 $x_1=4,x_2=1$. 所以 $S=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$.

(2)原方程可化为 $x^2+(2a-1)x+a^2=0$. $\because$方程有实数根,$\therefore\Delta=(2a-1)^2-4a^2\geqslant0$. $\therefore a\leqslant\frac{1}{4}$.

又$\because x_1$ 与 x_2 非负,$\therefore x_1+x_2=-(2a-1)\geqslant0$ 且 $x_1x_2=a^2\geqslant0$. $\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$.

综上所述,$a\leqslant\frac{1}{4}$.　①

$S^2=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=1-2a+2|a|$.　②

$\therefore 1-2a+2|a|=1$,即$|a|=a$. $\therefore a\geqslant0$.　③

由①和③,得 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

因为 a 是整数,所以 $a=0$,即 $a=0$ 时,S 的值为1.

(3)存在负数 a,使 $S^2=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2\geqslant25$.

由②式知,只要使 $1-2a+2|a|\geqslant25$ 即可.$\because a<0,\therefore 1-4a\geqslant25$. $\therefore a\leqslant-6$.　④

综合①,④,使 S^2 不小于25的 a 的取值范围是 $a\leqslant-6$.

例12　(北京市朝阳区,2000)(1)解下列方程:

$x^2-2x-2=0$;　$2x^2+3x-1=0$;　$2x^2-4x+1=0$;　$x^2+6x+3=0$;

(2)上面的四个方程中,有三个方程的一次项系数有共同特点,请你用代数式表示这个特点,并推导出具有这个特点的一元二次方程的求根公式.

解　(1)解方程 $x^2-2x-2=0$,　①

得　$x_1=1+\sqrt{3},x_2=1-\sqrt{3}$.

解方程 $2x^2+3x-1=0$,　②

得 $x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}, x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$.

解方程 $2x^2-4x+1=0$, ③

得 $x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

解方程 $x^2+6x+3=0$, ④

得 $x_1=-3+\sqrt{6}, x_2=-3-\sqrt{6}$.

(2)其中方程①③④的一次项系数为偶数 $2n$(n 是整数).

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,其中 $b^2-4ac\geqslant 0, b=2n, n$ 为整数.

$\because$ $b^2-4ac\geqslant 0$,即 $(2n)^2-4ac\geqslant 0$, $\therefore$ $n^2-ac\geqslant 0$.

$\therefore$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2a\pm\sqrt{4n^2-4ac}}{2a}=\frac{-2a\pm 2\sqrt{n^2-ac}}{2a}=\frac{-a\pm\sqrt{n^2-ac}}{a}$.

$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2+2nx+c=0(n^2-ac\geqslant 0)$ 的求根公式为 $x=\frac{-a\pm\sqrt{n^2-ac}}{a}$.

例 13 (十堰市,2002)已知方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=m, & ①\\ x+y=2. & ②\end{cases}$

(1)当 m 取何值时,方程组有两个不同的实数解;(2)若 x_1, y_1;x_2, y_2 是方程组的两个不同的实数根,且 $|x_1-x_2|=\sqrt{3}|y_1y_2|$,求 m 的值.

解 (1)由②,得 $y=2-x$. ③

把③代入①,得 $x^2+(2-x)^2=m$. 即 $2x^2-4x+4-m=0$. ④

$\Delta=(-4)^2-4\times 2(4-m)=-16+8m>0$, $\therefore$ $m>2$. 即当 $m>2$ 时,原方程组有两个不同的实数解.

(2)由④,得 $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=\frac{1}{2}(4-m)$. 同理可得 $2y^2-4y+4-m=0$. $\therefore$ $y_1y_2=\frac{1}{2}(4-m)$.

$\because$ $|x_1-x_2|=\sqrt{3}|y_1y_2|$, $\therefore$ $(x_1-x_2)^2=3(y_1y_2)^2$.

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3(y_1y_2)^2$. 即 $2^2-4\times\frac{1}{2}(4-m)=3\times\left(\frac{4-m}{2}\right)^2$.

即 $3m^2-32m+64=0$. $\therefore$ $m_1=\frac{8}{3}$, $m_2=8$.

$\because$ $\frac{8}{3}>2$, $8>2$, $\therefore$ $m=\frac{8}{3}$ 或 $m=8$.

例 14 (烟台市,2001)已知方程组 $\begin{cases}x^2-y+a+2=0,\\ (x-y)^2+2x-2y+1=0\end{cases}$ 有两个实数解为 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2,\\ y=y_2,\end{cases}$ 且 x_1, x_2 是两个不等正数.

(1)求 a 的取值范围;(2)若 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-\frac{15}{4}a$,试求 a 的值.

解 (1)方程 $(x-y)^2+2x-2y+1=0$ 可变形为 $(x-y+1)^2=0$.

$\therefore$ $x-y+1=0$,即 $y=x+1$.

把 $y=x+1$ 代入方程 $x^2-y+a+2=0$,得 $x^2-x+a+1=0$.

$\therefore$ x_1, x_2 是方程 $x^2-x+a+1=0$ 的两个不相等的正数根. $\because$ $x_1+x_2=1>0, x_1x_2=a+1$,

$\Delta=(-1)^2-4(a+1)=-4a-3$.

$\therefore$ $\begin{cases}a+1>0,\\ -4a-3>0.\end{cases}$ 解这个不等式组,得 $-1<a<-\frac{3}{4}$. $\therefore$ a 的取值范围是 $-1<a<-\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知, $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=a+1$.

$\because\ \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=-\frac{15}{4}a.$　①

整理，得 $15a^2+7a-4=0$. 解之，得 $a_1=-\frac{4}{5}, a_2=\frac{1}{3}$. 经检验，$a_1=-\frac{4}{5}, a_2=\frac{1}{3}$ 是方程①的解.

由(1)知 $-1<a<-\frac{3}{4}$. ∴ $a=\frac{1}{3}$ 应舍去，∴ $a=-\frac{4}{5}$.

例 15　(扬州市，2001)已知方程组 $\begin{cases}kx^2-x-y+\frac{1}{2}=0,\\ y=k(2x-1)\end{cases}$ $(x,y$ 为未知数$)$有两组不同的实数解 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=y_1;\end{cases}\begin{cases}x=x_2,\\ y=y_2.\end{cases}$

(1)求实数 k 的取值范围；(2)如果 $y_1y_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$，求实数 k 的值.

解　(1)将 $y=k(2x-1)$ 代入 $kx^2-x-y+\frac{1}{2}=0$ 中，

整理，得 $kx^2-(2k+1)x+k+\frac{1}{2}=0$.

由 $\Delta=(2k+1)^2-4k(k+\frac{1}{2})>0$，

又 $k\neq0$，得实数 k 的取值范围是 $k>-\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$.

(2)由(1)得 $x_1x_2=\frac{k+\frac{1}{2}}{k}, x_1+x_2=\frac{2k+1}{k}$，∴ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$.

$y_1y_2=k^2(2x_1-1)(2x_2-1)=k^2[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]=k^2$，

则 $k^2+2=3, k^2=1$. ∴ $k=\pm1$.　又∵ $k>-\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$，∴ $k=1$.

例 16　(成都市，2002)已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根.

(1)是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$ 成立？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

(2)求使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值.

解　(1)∵ 一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 有两个实数根，则有 $k\neq0$，且 $\Delta=(-4k)^2-4\times4k(k+1)=-16k\geqslant0$.　∴ $k<0$.

又 x_1,x_2 是方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两根，∴ $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{k+1}{4k}$.

∴ $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2=-\frac{k+9}{4k}$.

若 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$，则有 $-\frac{k+9}{4k}=-\frac{3}{2}$. ∴ $k=\frac{9}{5}$.

而 $k<0$，∴ 不存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$ 成立.

(2)∵ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-4=\frac{4k}{k+1}-4=-\frac{4}{k+1}$，∴ 要使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数，只须 $k+1$ 能整除 4. 而 k 为整数，故 $k+1$ 只能取 $\pm1,\pm2,\pm4$.

∵ $k<0$，∴ $k+1<1$. ∴ $k+1$ 只能取 $-1,-2,-4$.

∴ 使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的 k 的整数值为 $-2,-3,-5$.

例 17 （荆门市，2002）阅读下列范例，按要求解答问题．

已知实数 a,b,c 满足 $a+b+2c=1, a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$，求 a,b,c 的值．

解法一 由已知得 $a+b=1-2c$. ①

$(a+b)^2-2ab+6c+\frac{3}{2}=0$. ②

将①代入②，整理得 $4c^2+2c-2ab+\frac{5}{2}=0$.

$\therefore ab=2c^2+c+\frac{5}{4}$. ③

由①，③可知，a,b 是关于 t 的方程 $t^2-(1-2c)t+2c^2+c+\frac{5}{4}=0$ ④的两个实数根．

$\therefore \Delta=(1-2c)^2-4(2c^2+c+\frac{5}{4})\geqslant 0$，即 $(c+1)^2\leqslant 0$，而 $(c+1)^2\geqslant 0$，$\therefore c+1=0, c=-1$.

将 $c=-1$ 代入④，得 $t^2-3t+\frac{9}{4}=0$. $\therefore t_1=t_2=\frac{3}{2}$. 即 $a=b=\frac{3}{2}$. $\therefore c=-1$.

解法二 $\because a+b+2c=1$，$\therefore a+b=1-2c$.

设 $a=\frac{1-2c}{2}+t$，$b=\frac{1-2c}{2}-t$. ①

$\because a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$，

$\therefore (a+b)^2-2ab+6c+\frac{3}{2}=0$. ②

将①代入②，得 $(1-2c)^2-2(\frac{1-2c}{2}+t)(\frac{1-2c}{2}-t)+6c+\frac{3}{2}=0$.

整理，得 $t^2+(c^2+2c+1)=0$，得 $t^2+(c+1)^2=0$. $\therefore t=0, c=-1$.

将 t,c 的值同时代入①，得 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}$. $\therefore c=-1$.

解法一是构造一元二次方程解决问题．若两实数 x,y 满足 $x+y=m, xy=n$，则 x,y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-mt+n=0$ 的两个实数根，然后利用判别式求解．

解法二是采用均值换元解决问题．若实数 x,y 满足 $x+y=m$，则可设 $x=\frac{m}{2}+t$，$y=\frac{m}{2}-t$. 一些问题根据条件，若合理运用这种换元技巧，则能使问题顺利解决．

下面给出两个问题，解答其中任意一题：

(1)用另一种方法解答范例中的问题．

(2)选用范例中的一种方法解答下列问题：已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=6, a^2+b^2+c^2=12$，求证：$a=b=c$.

解 (1)由已知等式消去 c，得 $a^2+b^2+3(1-a-b)+\frac{3}{2}=0$，即 $a^2+b^2-3a-3b+\frac{9}{2}=0$.

$\therefore (a-\frac{3}{2})^2+(b-\frac{3}{2})^2=0$. $\therefore a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}$.

于是由 $a+b+2c=1$，得 $c=-1$. 故 $a=b=\frac{3}{2}, c=-1$.

(2)由已知得 $a+b=6-c$， ①

$(a+b)^2+c^2-2ab=12$ ②

将①代入②，得 $(6-c)^2+c^2-2ab=12$. 即 $ab=c^2-6c+12$. ③

由①，③可知，a,b 是关于 t 的方程 $t^2-(6-c)t+c^2-6x+12=0$ 的两个实数根． ④

$\therefore \Delta=(6-c)^2-4(c^2-6c+12)\geqslant 0$. 化简，得 $(c-2)^2\leqslant 0$. 而 $(c-2)^2\geqslant 0$，$\therefore c=2$.

将 $c=2$ 代入④,解得 $t_1=t_2=2$. ∴ $a=b=2$,故 $a=b=c$.

例 18 (北京市宣武区,2002)若关于 x 的一元二次方程 $3x+3(a+b)x+4ab=0$ 的两个实数根 x_1,x_2 满足关系式:$x_1(x_1+1)+x_2(x_2+1)=(x_1+1)(x_2+1)$. 判断 $(a+b)^2\leqslant 4$ 是否正确.若正确,请加以证明;若不正确,请举一反例.

解 $(a+b)^2\leqslant 4$ 正确.理由如下:由根与系数的关系,得 $x_1+x_2=-(a+b)$,$x_1x_2=\dfrac{4}{3}ab$.

将 $x_1(x_1+1)+x_2(x_2+1)=(x_1+1)(x_2+1)$ 变形,得 $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+1$,即 $(x_1+x_2)^2=3x_1x_2+1$.

所以 $(a+b)^2=4ab+1$. 又 $\Delta=9(a+b)^2-4\times3\times4a\geqslant0$,所以 $(a+b)^2\geqslant\dfrac{16}{3}ab$,即 $4ab+1\geqslant\dfrac{16}{3}ab$.

所以 $4ab\leqslant3$,从而 $4ab+1\leqslant4$. 于是 $(a+b)^2\leqslant4$.

例 19 (盐城市,2001)已知关于 x 的方程 $kx^2-2(k+1)x+k-1=0$, ①

与 $x^2-(2k-1)x+k^2-k-2=0$. ②

(1)当 k 为何值时,方程①有实数根?

(2)若方程①的两个实数根 α,β 的倒数和等于方程②的一个根,求 k 的值.

解 (1)当 $k=0$ 时,方程①就是 $-2x-1=0$,有一实根.

当 $k\neq0$ 时,$\Delta=4(k+1)^2-4k(k-1)\geqslant0\ \Rightarrow k\geqslant-\dfrac{1}{3}$. 此时方程①有二实根.

综上:当 $k\geqslant-\dfrac{1}{3}$ 时,方程①有实数根.

(2)由题意知,$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=\dfrac{2(k+1)}{k}\\ \alpha\beta=\dfrac{k-1}{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2(k+1)}{k-1}$.

解方程②得:$x_1=k+1$,$x_2=k-2$.

由题意,得:$\dfrac{2(k+1)}{k-1}=k+1$,或 $\dfrac{2(k+1)}{k-1}=k-2$. 解这两个方程得:$k_1=-1$,$k_2=3$,$k_3=0$,$k_4=5$.

由(1)知 $k_1=-1$,$k_3=0$ 不合题意,舍去.故 $k=3$ 或 $k=5$.

例 20 (北京市海淀区,2001)已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+2k-1=0$ ①

(1)求证:对于任意实数 k,方程①总有两个不相等的实数根;

(2)如果 a 是关于 y 的方程 $y^2-(x_1+x_2-2k)y+(x_1-k)(x_2-k)=0$ ②的根,其中 x_1,x_2 为方程①的两个实数根,求代数式 $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{a}{a+1}\right)\div\dfrac{4}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-1}{a}$ 的值.

(1)**证明** ∵ $\Delta=4(k+1)^2-4(k^2+2k-1)=4k^2+8k+4-4k^2-8k+4=8>0$.

∴对于任意实数 k,方程①总有两个不相等的实数根.

(2)**解法一** ∵x_1,x_2 为方程①的两个实数根,∴$x_1+x_2=2(k+1)$,$x_1x_2=k^2+2k-1$.

∴ $x_1+x_2-2k=2(k+1)-2k=2$,

$(x_1-k)(x_2-k)=x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2=k^2+2k-1-2k(k+1)+k^2=-1$.

∴方程②为 $y^2-2y-1=0$.

∵a 是方程②的根,∴$a^2-2a-1=0$. ∴$a\neq0$,$a+1\neq0$,$a^2=2a+1$.

$$\therefore\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1}\right)\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}=\frac{a+1-a^2}{a(a+1)}\cdot\frac{a+1}{4}\cdot\frac{a^2-1}{a}$$

$$=\frac{(a+1-a^2)(a^2-1)}{4a^2}=\frac{[a+1-(2a+1)](2a+1-1)}{4a^2}=\frac{(-a)(2a)}{4a^2}=-\frac{1}{2}.$$

解法二 同解法一,得 $a^2-2a-1=0$. ∴$a\neq0$,$a+1\neq0$,$a^2-1=2a$. ∴原式 $=\dfrac{(a-2a)\cdot2a}{4a^2}=-\dfrac{1}{2}$.

例 21 (盐城市,1999)已知关于 x 的方程 $x^2-\sqrt{2}px+\dfrac{1}{2}(p^2-4)=0$($p$ 为实数).(1)求证:此方程

必有两个不相等的实数根；(2)设 α,β 是关于 x 的方程 $x^2-\sqrt{2}px+\frac{1}{2}(p^2-4)=0$ 的两个根，且 $\alpha<\beta$，若 $\alpha-\sqrt{2}$ 和 $\beta+\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+qx+2=0$ 的两根，求实数 q 的值．

(1)**证明** $\because \Delta_1=(-\sqrt{2}p)^2-4\times\frac{1}{2}(p^2-4)=8>0$，

$\therefore$ 关于 x 的方程必有两个不相等的实数根．

(2)**解法一** $\because \alpha,\beta$ 是方程 $x^2-\sqrt{2}px+\frac{1}{2}(p^2-4)=0$ 的两根，$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=\sqrt{2}p, & ①\\ \alpha\beta=\frac{1}{2}(p^2-4). & ②\end{cases}$

$\because \alpha-\sqrt{2},\beta+\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+qx+2=0$ 的两根，

$\therefore \begin{cases}(\alpha-\sqrt{2})+(\beta+\sqrt{2})=\alpha+\beta=-q, & ③\\ (\alpha-\sqrt{2})(\beta+\sqrt{2})=\alpha\beta-\sqrt{2}(\beta-\alpha)-2=2. & ④\end{cases}$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(\sqrt{2}p)^2-4\times\frac{1}{2}(p^2-4)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$ ⑤

把②式和⑤式代入④式，得 $\frac{1}{2}(p^2-4)-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-2=2.$

$\therefore p=\pm2\sqrt{5}.$ $\therefore q=-(\alpha+\beta)=-\sqrt{2}p=\pm2\sqrt{10}.$

$\because \Delta_2=q^2-4\times2=(\pm2\sqrt{10})^2-8=32>0$，$\therefore q=\pm2\sqrt{10}$，符合题意．

解法二 方程 $x^2-\sqrt{2}px+\frac{1}{2}(p^2-4)=0$ 可化为 $(x-\frac{p-2}{\sqrt{2}})(x-\frac{p+2}{\sqrt{2}})=0.$

$\because \alpha<\beta$，$\therefore \alpha=\frac{p-2}{\sqrt{2}},\beta=\frac{p+2}{\sqrt{2}}.$ $\therefore \alpha-\sqrt{2}=\frac{p-4}{\sqrt{2}},\beta+\sqrt{2}=\frac{p+4}{\sqrt{2}}.$

$\because \alpha-\sqrt{2},\beta+\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+qx+2=0$ 的两根，$\therefore \begin{cases}(\alpha-\sqrt{2})+(\beta+\sqrt{2})=-q, & ①\\ (\alpha-\sqrt{2})(\beta+\sqrt{2})=2. & ②\end{cases}$

由②得，$\frac{p-4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{p+4}{\sqrt{2}}=2$，$\therefore p=\pm2\sqrt{5}.$

$\therefore$ 由①得，$q=-(\alpha+\beta)=-(\frac{p-2}{\sqrt{2}}+\frac{p+2}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}p=\pm2\sqrt{10}.$

$\because \Delta_2=q^2-4\times2=(\pm2\sqrt{10})^2-8=32>0$，$\therefore q=\pm2\sqrt{10}$，符合题意．

例 22 （聊城市，2000）已知关于 x 的方程 $x^2+2x+\frac{m^2-1}{x^2+2x-2m}=0$，其中 m 为实数．(1)当 m 为何值时，方程没有实数根，(2)当 m 为何值时，方程恰有三个互不相等的实数根？求出这三个实数根．

解 (1)令 $x^2+2x-2m=y$，则原方程可化为 $y^2+2my+m^2-1=0$.

解得 $y_1=-m+1,y_2=-m-1$（显然 $m=\pm1$ 时，原方程有实数根）．由此得

$x^2+2x-m-1=0$， ①

或 $x^2+2x-m+1=0$. ②

对于①，由 $\Delta_1=2^2-4(-m-1)<0$ 得 $m<-2$.

对于②，由 $\Delta_2=2^2-4(-m+1)<0$ 得 $m<0$.

$\therefore$ 当 $m<-2$，原方程没有实数根．

(2)由(1)可得：当 $m=-2$ 时，方程①有两个相等的实数根，但此时，方程②没有实数根，不合题意．

当 $m=0$ 时，方程②有两个相等的实数根 $x=-1$，此时方程①有两个不相等的实数根 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 $m=0$ 时，原方程有三个互不相等的实数根：$x_1=-1,x_2=-1+\sqrt{2},x_3=-1-\sqrt{2}$.

例 23 （北京市海淀区，1997）关于 x 的方程

$$x^2-mx-\frac{3}{4}m-1=0, \quad ①$$

与 $2x^2-(m+6)x-m^2+4=0.$ ②

若方程①的两个实数根的平方和等于方程②的一个整数根，求 m 的值.

解　设方程①的两个实数根为 α 和 β，那么

$$\Delta=m^2+3m+4\geqslant 0, \quad ③$$

$$\alpha+\beta=m, \alpha\beta=-\frac{3}{4}m-1. \quad ④$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=m^2+\frac{3}{2}m+2. \quad ⑤$$

由方程②解得两根为 $x_1=-\frac{m-2}{2}, x_2=m+2$.

若 $\alpha^2+\beta^2=x_1$，即 $m^2+\frac{3}{2}m+2=-\frac{m-2}{2}$，

即 $m^2+2m+1=0$，$\therefore\ m_1=m_2=-1$；

此时 $x_1=-\frac{-1-2}{2}=\frac{3}{2}$ 不是整数，不合题意，故 $m=-1$ 应舍去.

若 $\alpha^2+\beta^2=x_2$，则 $m^2+\frac{3}{2}m+2=m+2$，

即 $m^2+\frac{1}{2}m=0$.　$\therefore\ m_3=0, m_4=-\frac{1}{2}$.

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$x_2=\frac{3}{2}$ 不是整数，舍去.

当 $m=0$ 时，$x_2=2$，是整数根，且 $m=0$ 满足不等式③，因而方程①的根是实数.

$\therefore\ m=0.$

例 24　(北京市海淀区，2000)已知：关于 x 的方程 $x^2+3x+a=0$①的两个实数根的倒数和等于 3，关于 x 的方程 $(k-1)x^2+3x-2a=0$②有实数根且 k 为正整数. 求代数式 $\frac{k-1}{k-2}$ 的值.

解法一　设方程①的两个实数根为 x_1, x_2.

根据题意，得 $\begin{cases} x_1+x_2=-3, \\ x_1\cdot x_2=a, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3. \end{cases}$　$\therefore\ \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=3$，即 $\frac{-3}{a}=3$.　③

解得 $a=-1$.

经检验，$a=-1$ 是方程③的解，且使方程 $x^2+3x-1=0$ 有实数根.

将 $a=-1$ 代入方程②，得 $(k-1)x^2+3x+2=0$.

当 $k=1$ 时，一元一次方程 $3x+2=0$ 有实数根.　$\therefore\ \frac{k-1}{k-2}=\frac{1-1}{1-2}=0.$

当 $k\neq 1$ 时，方程②为一元二次方程，且 $\Delta=9-8(k-1)\geqslant 0$.　解得 $k\leqslant\frac{17}{8}$.

又 k 为正整数，且 $k\neq 1$，$\therefore\ k=2$.

而 $k=2$ 时，代数式 $\frac{k-1}{k-2}$ 无意义.

综上所述，代数式 $\frac{k-1}{k-2}$ 的值为 0.

解法二　设方程①的两个实数根为 x_1, x_2. 根据题意，得 $\begin{cases} \Delta=9-4a\geqslant 0, \\ x_1+x_2=-3, \\ x_1\cdot x_2=a, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3. \end{cases}$

$\therefore \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}=\frac{-3}{a}=3$ 且 $a \leqslant \frac{9}{4}$. $\therefore a=-1$.

例 25 (成都市,1994;杭州市,1983)当 k 是什么整数时,方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不相等的正整数根?

解 ∵ 方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不同的正整数根,

$\therefore \Delta=[-6(3k-1)]^2-4(k^2-1)\times 72=36(k^2-6k+9)=36(k-3)^2>0$. $\therefore k \neq 3$. ①

∵ 方程有两个不相等的实数根,∴ $k^2-1\neq 0$,即 $k\neq \pm 1$. ②

由方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$,得 $[(k-1)x-6][(k+1)x-12]=0$.

$\therefore x_1=\frac{6}{k-1}$, ③

$x_2=\frac{12}{k+1}$. ④

要使方程两根均为正整数,由①,②,③知,$k=2,4,7$;由①,②,④知,$k=0,2,5,11$. 从而 $k=2$.

例 26 (沈阳市,1989)已知关于 x 的方程 $x^2-(12-m)x+m-1=0$ 的两根都是正整数,求 m 的值.

解 设 a,b 为方程的二根,且 a,b 都是正整数,则

$a+b=12-m$, ①

$ab=m-1$. ②

①+②,得 $a+b+ab=11$.

$\therefore (a+1)(b+1)=12=2\times 6=3\times 4$. ③

由②,得 $m=ab+1$. ∵ $ab=1\times 5$ 或 2×3, ∴ $m_1=6, m_2=7$.

或由③得 当 $a=1$ 时,$b=5$;$a=2$ 时,$b=3$;$a=3$ 时,$b=2$;$a=5$ 时,$b=1$.

∴ $ab=5$ 或 $ab=6$.

由②得 $m=ab+1$, ∴ $m_1=6, m_2=7$.

例 27 (黑龙江省,2000;北京市,1992)当 m 是什么整数时,关于 x 的一元二次方程 $mx^2-4x+4=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数.

解 由题设,两个一元二次方程有整数根,

$\therefore \Delta_1=16-16m\geqslant 0$, ∴ $m\leqslant 1$. $\Delta_2=16m^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant 0$, ∴ $m\geqslant -\frac{5}{4}$.

$\therefore -\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$. ∴ m 的整数解为 $m=-1,0,1$.

当 $m=0$ 时,方程 $mx^2-4x+4=0$ 的二次项为零,不合题意,舍去.

当 $m=-1$ 时,方程 $mx^2-4x+4=0$ 的根不是整数,不合题意,舍去.

当 $m=1$ 时,方程 $mx^2-4x+4=0$ 的根为 $x_1=x_2=2$,方程 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根为 $x_1=5, x_2=-1$.

说明 由以上三例可知,例 27 是直接求出方程的根,经分析得出问题的结论;例 28 是利用根与系数的关系求解的;例 29 是利用判别式求解的. 这是解与方程有整数根问题的常用的三种方法.

例 28 (北京市海淀区,1996)已知 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是二次方程 $x^2-(m-1)x+n=0$ 的两个实数根,y_1,y_2 是二次方程 $y^2+(n+1)y-6m=0$ 的两个实数根,且 $x_1-y_1=2, y_2-x_2=2$,求 m,n 的值.

解 依题意,得 $\begin{cases}\Delta_1=[-(m-1)]^2-4n>0,\\ x_1+x_2=m-1,\\ x_1x_2=n.\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_2=(n+1)^2+24m>0,\\ y_1+y_2=-(n+1),\\ y_1y_2=-6m.\end{cases}$

∵ $x_1-y_1=2, y_2-x_2=2$, ∴ $y_1+y_2=x_1+x_2$.

$y_1y_2=(x_1-2)(x_2+2)=x_1x_2-2(x_2-x_1)-4$. ∴ $\begin{cases}-(n+1)=m-1, & ①\\ -6m=n-2(x_2-x_1)-4. & ②\end{cases}$

由①得　$m=-n$.　把 $m=-n$ 代入②得　$2(x_2-x_1)=-5n-4$.　③

$\because x_1<x_2$，　$\therefore -5n-4>0$.

③式两边平方，经代换，整理得 $7n^2+16n+4=0$，解得 $n_1=-2$，$n_2=-\frac{2}{7}$.

当 $n=-\frac{2}{7}$ 时，$-5n-4=\frac{10}{7}-4<0$ 与 $-5n-4>0$ 矛盾，舍去．

当 $n=-2$ 时，$-5n-4=10-4=6>0$. 此时，$m=2$，且有 $\Delta_1>0$，$\Delta_2>0$，符合题意．

故 $m=2$，$n=-2$.

例 29　(北京市海淀区，1999)已知关于 x 的方程 $kx^2+(2k-1)x+k-1=0$　①只有整数根，且关于 y 的一元二次方程 $(k-1)y^2-3y+m=0$　②有两个实数根 y_1 和 y_2.　(1)当 k 为整数时，确定 k 的值；(2)在(1)的条件下，若 $m>-2$，用关于 m 的代数式表示 $y_1{}^2+y_2{}^2$.

解　(1)当 $k=0$ 时，方程①化为 $-x-1=0$，$x=-1$，方程有整数根．

当 $k\neq0$ 时，方程①可化为 $(x+1)(kx+k-1)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{-k+1}{k}=-1+\frac{1}{k}$.

$\because$ 方程①的根是整数，所以 k 为整数的倒数．　$\because$ k 是整数，

$\therefore$ $k=\pm1$. 此时 $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-1)=1>0$.

但当 $k=1$ 时，$(k-1)y^2-3y+m=0$ 不是一元二次方程，$\therefore$ $k=1$ 舍去．　$\therefore$ $k=0$，$k=-1$.

(2)当 $k=0$ 时，方程②化为 $-y^2-3y+m=0$.

$\because$ 方程②有两个实数根，　$\therefore$ $\Delta=9+4m\geqslant0$，即 $m\geqslant-\frac{9}{4}$.　又 $m>-2$，

$\therefore$ 当 $m>-2$ 时，$y_1{}^2+y_2{}^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=9+2m$.

当 $k=-1$ 时，方程②化为 $-2y^2-3y+m=0$，方程有两个实数根，$\therefore$ $\Delta=9+8m\geqslant0$，即 $m\geqslant-\frac{9}{8}$.

$\because$ $m>-2$，　$\therefore$ 当 $-2<m<-\frac{9}{8}$ 时，方程②无实数根；

当 $m\geqslant-\frac{9}{8}$ 时，有 $y_1{}^2+y_2{}^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{9}{4}+m$.

例 30　(北京市门头沟区，2001)已知：关于 x 的方程 $x^2+(m+1)x+m^2+m-8=0$ 的两个实数根 x_1，x_2 满足 $3x_1=x_2(x_1-3)$，关于 x 的另一个方程 $x^2+2(m+n)x+5m+2n-4=0$ 有大于 -1 且小于 2 的实数根，求 n 的整数值．

解　$\because$ x，x_2 是 x 的方程 $x^2+(m+1)x+m^2+m-8=0$ 的两个实数根，

$\therefore$ $x_1+x_2=-(m+1)$，$x_1x_2=m^2+m-8$.

$\because$ $3x_1=x_2(x_1-3)$，$\therefore 3(x_1+x_2)=x_1x_2$. $\therefore$ $3[-(m+1)]=m^2+m-8$. $\therefore m^2+4m-5=0$. $\therefore$ $m_1=1$，$m_2=-5$.

当 $m=1$ 时，$\Delta=(m+1)^2-4(m^2+m-8)=(1+1)^2-4(1^2+1-8)>0$.

当 $m=-5$ 时，$\Delta=(m+1)^2-4(m^2+m-8)=(-5+1)^2-4[(-5)^2-5-8]<0$. $\therefore$ $m=-5$ 时不合题意，舍去．$\therefore m=1$.

当 $m=1$ 时，方程 $x^2+2(m+n)x+5m+2n-4=0$ 即为 $x^2+2(1+n)x+2n+1=0$. $\therefore$ $(x+1)[x+(2n+1)]=0$. $\therefore$ $x=-1$ 或 $x=-2n-1$.

$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+2(m+n)x+5m+2n-4=0$ 有大于 -1 且小于 2 的实数根，$\therefore$ $-1<-2n-1<2$. $\therefore$ $-\frac{3}{2}<n<0$. $\because$ n 为整数，$\therefore$ $n=-1$.

例 31　(北京市海淀区，2002)已知：关于 x 的方程 $(n-1)x^2+mx+1=0$　①有两个相等的实数根．(1)求证：关于 y 的方程 $m^2y^2-2my-m^2-2n^2+3=0$　② 必有两个不相等的实数根；(2)若方程①的一根的相反数恰好是方程②的一个根，求代数式 m^2n+12n 的值．

解　(1)$\because$ 方程①有两个相等的实数根，$\therefore$ $\begin{cases}n-1\neq0,\\ \Delta_1=m^2-4(n-1)=0.\end{cases}$