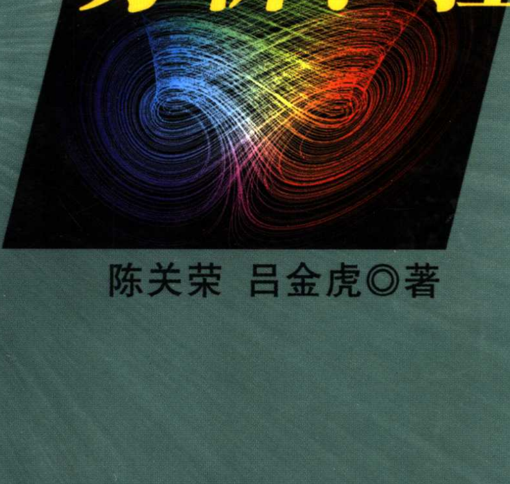
Lorenz 系统族的动力学

分析、控制与同步



陈关荣　吕金虎◎著

科学出版社
www.sciencep.com

Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步

陈关荣　吕金虎　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要总结了作者近几年来以混沌反控制的基本理论为指导而发现和构造的几个新的混沌系统，完备而系统地介绍了由经典 Lorenz 系统拓广和延伸出来的一大类相联系统的结构和动力学行为，并总结了这方面学术研究的前沿成果和发展趋向.

本书可供理工科大学的师生阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步/陈关荣，吕金虎著. —北京：科学出版社，2003

ISBN 7-03-011539-2

Ⅰ.L… Ⅱ.①陈…②吕… Ⅲ.混沌学 Ⅳ.O414.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045502 号

责任编辑：陈玉琢/文案编辑：邱 璐/责任校对：宋玲玲

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 8 月第 一 版　　开本：B5(720×1000)

2003 年 8 月第一次印刷　　印张：18

印数：1—1 500　　字数：350 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自从 E. N. Lorenz 20 世纪 60 年代在数值试验中偶然发现第一个混沌吸引子以来，混沌在许多领域中获得了巨大而深远的发展．著名物理学家福特(J. Ford)曾指出："混沌的发现是 20 世纪物理学的第三次革命．"近半个世纪以来，人们对混沌现象的自然规律及其在自然科学和社会科学中的表现有了广泛而深刻的认识，并且发展到了把混沌作为一门应用技术来研究．40 多年来，混沌的发展经历了从认识了解、深化研究到工程应用的不同阶段．当前，如何把混沌科学发展为一门应用技术而应用混沌研究的成果为人类服务已经成为 21 世纪非线性科学发展所面临的巨大挑战．

Lorenz 系统作为第一个混沌模型，是混沌发展史上的一个重要的里程碑，具有举足轻重的地位．对 Lorenz 系统的深入研究无疑已经极大地推动了混沌学的发展．但事实上，人们对混沌的认识还远远不够，以至于到目前为止还没有一个公认的严格的数学定义．直到最近，人们才严格地证明了 Lorenz 吸引子的存在性．

理论上研究混沌的目的是多方面的．主要是要揭示混沌的本质，刻画它的基本特征，了解它的动力学性态，并力求对它加以控制和利用使之为人类服务．近年来的大量研究工作表明，混沌与工程技术联系愈来愈密切，它在生物工程、力学工程、电子工程、化学工程、信息工程、计算机工程、应用数学和实验物理等领域中都存在着广泛的应用前景．混沌的潜在应用包括：大脑神经活动和心脏脉搏测量分析、图像数据加密、保密通信、电力电网动态分析和保护、工程和民用电子仪器噪声消减、电子震荡发生器设计、航天和航空发动机动态分析和保护、流体混合、信息储存和高速检索、决策预测、系统和模式识别、机械震动故障诊断、计算机图形处理，以及在医学和生物、信号处理和通信、控制系统和优化等越来越多的领域和方向．因此，在过去 20 年中，混沌在工程系统中逐渐由被认为仅仅是一种有害的现象转变到被认为是具有实际应用价值的现象来加以研究．

在许多领域，混沌已被发现是有用的或有着巨大的应用前景．因此，在一些混沌显得非常重要且有用的领域，有目的地产生或强化混沌现象已经成为一个关键性的研究课题．对任意给定的一个有限维的系统或过程，它可以是线性的或非线性的、时变的或时不变的、非混沌的甚至稳定的，所关心的问题是我们能否通过设计一个简单可行的控制器，如参数调整器或状态反馈控制器，来使受控的系统产生混沌现象．这就是我们通常所说的混沌反向控制，或简称混沌反控制．纵观混沌发展的历史，起初人们认为混沌是不可控的，1990 年 OGY 方法的提出才彻底改变了这

种观点.近十多年来,混沌控制与同步得到了蓬勃发展.20 世纪 90 年代中期,人们发现混沌有时不但是有用的,而且需要得到强化,这导致了近年来混沌反控制研究的迅速崛起.混沌反控制在理论上非常有吸引力,且在技术上非常有挑战性,因为它涉及非常复杂的混沌现象以及各种相关的高维非自治系统的控制和稳定性.无论如何,人们已经尝试通过各种途径来实现这个目标,其中包括计算机仿真和发展完全而严格的数学理论来实现它.在这些探讨中,关于离散系统的混沌反控制的研究工作已经取得了巨大的成功,即对于任意给定的一个有限维离散系统,它可以是线性的或非线性的、时变的或时不变的、非混沌的甚至稳定的,我们总可以设计一个简单的非线性状态反馈控制器,来使受控的系统产生混沌现象,而且所产生的混沌是严格数学意义下的混沌.对于连续系统,则情况变得非常复杂.但人们也进行了大量的尝试,从而形成了在本书中称为 Lorenz 系统族的一个庞大复杂而且十分重要的混沌系统类型.

实质上,Lorenz 系统族的研究纵贯整个混沌科学的发展,它几乎与所有混沌科学的重要发展都密切相关.我们试图以 Lorenz 系统族的研究为主要线索,同时用它来概括地反映混沌学在控制与同步工程技术方面的一些重要发展.我们应特别强调:三维二次多项式自治系统对混沌的研究具有十分基本而重要的意义,而 Lorenz 系统族是其中一类十分重要的系统.这是因为平面自治多项式系统不可能产生混沌,所以自治系统要产生混沌至少需要三维而最简单的是二次多项式系统.

本书着重研究 Lorenz 系统族的动力学行为、控制与同步及其相关问题.

本书共分九章,从基本内容来分类可以概括为三部分.第一部分包括第一至第六章,主要介绍 Lorenz 系统族的基本动力学行为、分类和标准型.第二部分包括第七章和第九章,分别介绍混沌控制的基本理论、方法和混沌反控制的一个综述.第三部分是第八章,主要介绍混沌同步的理论、方法和应用.应该特别强调的是,书中的绝大部分结果是作者近几年来发表的最新研究成果.我们的目的是将这些最新的研究结果作一个初步的总结,以奉献给读者,以期推动 Lorenz 系统族的更进一步深入研究.

作者感谢香港研究资助局(RGC:CityU1018/01E,1004/02E)、中国博士后科学基金会(32 批)、香港王宽诚教育基金会(2002)的资助.作者在从事研究和本书的写作过程中得到了许多国内外同行的支持和帮助,特别是其中一些结果是我们与合作者共同完成的,他们包括:郭雷院士、陈翰馥院士、程代展研究员、余星火教授、刘曾荣教授、汪小帆教授、秦化淑研究员、张纪峰研究员、陆君安教授、陈士华副教授、王华教授、张锁春研究员、方锦清教授、关治洪教授、廖晓昕教授、周天寿副教授、郑作环副研究员、关新平教授、李常品副教授、钟国群教授、李忠博士,以及 T. Ueta, W. K. S. Tang, K. F. Man, M. A. Aziz-Alaoui, J. G. Barajas-Ramirez, L. S. Shieh, S. Celikovsky, Y. H. Yoo, A. S. Elwakil, E. N. Sanchez 等教授和博士.在此,作

者要特别感谢香港城市大学混沌控制与同步学术中心和中国科学院数学与系统科学研究院系统与控制重点实验室的同事给予的支持和帮助.同时,深深地感谢我们的家人长期以来对我们工作的理解、支持和帮助.

鉴于作者水平有限,且书中的大多数结果均是新近发表的,错误在所难免,热诚地期待读者们批评指正.

陈关荣 香港城市大学混沌控制与同步学术中心
吕金虎 中国科学院数学与系统科学研究院系统所

2003 年 5 月 1 日

陈关荣：1981年获中山大学计算数学硕士学位，1987年春获美国得克萨斯州立A&M大学应用数学博士学位。随后在得克萨斯州立休斯敦大学电子与计算机工程系任教，为该校终身职正教授。现任香港城市大学讲座教授及该校混沌控制与同步学术研究中心主任。1996年因在混沌控制和分岔分析的理论与应用中作出奠基性的贡献而被晋升为国际电子电气工程师学会院士（IEEE Fellow）。共出版学术专著和高等教材14本，发表国际学术杂志论文250多篇（其中SCI 收录约220篇），国际学术会议论文约170篇。1998年获美国工程教育学会最佳年度学术杂志论文奖，2001年获IEEE航天电路与系统学会最佳年度学术杂志论文奖，2002年获捷克共和国科学院信息理论与自动化学会最佳论文奖。曾任并现任7种国际学报编委和荣誉编辑，曾任 IEEE电路与系统学会非线性系统技术委员会主任。为澳大利亚Central Queensland 大学荣誉教授和国内哈尔滨工业大学、华中科技大学、中山大学等多家大学荣誉客座教授，并曾应邀多次在20多个国家讲学。

吕金虎：2002年7月在中国科学院数学与系统科学研究院获博士学位。2002年6月至今在中国科学院数学与系统科学研究院系统与控制重点实验室从事博士后研究。2001年7月访问香港城市大学刘璧如数学中心；2002年1月至4月访问香港城市大学电子工程系；2003年1月至5月访问澳大利亚皇家墨尔本理工大学电子与计算机工程系。2002年获中国科学院院长奖学金特别奖。2002年获中国科学院王宽诚博士后工作奖励基金和中国博士后科学基金资助。IEEE会员。近年来在国际著名SCI刊物上发表杂志论文三十多篇，出版学术专著二本。在混沌控制与同步、混沌时间序列分析、复杂系统的控制与同步等方面得出了一系列深刻结果。

目　录

第一章 引　言

20世纪下半叶,非线性科学获得了前所未有的蓬勃发展.非线性科学是一门研究非线性现象共性的基础科学,被誉为20世纪自然科学中的“三大革命之一”[36,37,101,106,107].科学界认为:非线性科学的研究不仅具有重大的科学意义,而且具有广泛的应用前景.事实上,这门学科几乎涉及自然科学和社会科学的各个领域,并且不断在改变人们对现实世界的许多传统看法.非线性科学的研究涉及对确定性与随机性,有序与无序,偶然与必然,量变与质变,整体与局部等数学范畴和哲学概念的再认识.它将深刻影响人类的思维方法,涉及现代科学的逻辑体系及其变革这样一些根本性问题.一般来说,非线性科学的主体包括:混沌(chaos)、分岔(bifurcation)、分形(fractal)、孤立子(soliton)和复杂性(complexity)的研究.其中,混沌的研究占有极大的分量.

近半个世纪以来,人们对混沌运动的规律及其在自然科学和社会科学中的表现有了比以前更广泛和更深刻的认识.特别是如何应用混沌理论的研究成果为人类服务已经成为21世纪非线性科学发展的新课题,也是目前数学家和工程技术人员所面临的一个重要挑战.一方面,混沌的应用将会直接促进人们对混沌本质的更深刻的认识;另一方面,混沌应用中提出的许多新问题也将进一步促进混沌研究本身更深入的发展.这为混沌理论及其应用的研究提供了巨大的推动力.

所谓混沌,粗略地说是一种在确定性系统中所出现的类似随机而无规则运动的动力学行为.然而,尽管科学界对于混沌已经认真地研究了近半个世纪,至今尚无一个公认的非常严格的标准数学定义.这是因为混沌系统的确非常复杂,从不同的角度理解会有不同的内涵.数学上常用的定义包括:离散动力系统(映射)的 Li-Yorke 意义下的混沌[45](高维空间中有相应的 Marotto 定理[44])、Devaney 意义下的混沌[103,107]和连续动力系统(流)的 Smale 马蹄意义下的混沌[38].物理和工程上常用的混沌判据是其有界性并存在正的 Lyapunov 指数或正的信息熵.一般认为,混沌具有如下一些主要特征:确定性、有界性、对初值的极端敏感性、长期不可预测性、正的最大 Lyapunov 指数、无限宽频功率谱和遍历性[19,103,107]等.

理论上研究混沌的目的是多方面的,主要是要揭示混沌的本质,刻画它的基本特征,了解它的动力性态,并力求对它加以控制和利用使之为人类服务[13,19,24,107].近年来的大量研究工作表明,混沌与工程技术联系愈来愈密切,它在生物工程、力学工程、电子工程、化学工程、信息工程、计算机工程、应用数学和实验物理等领域中都存在着广泛的应用前景[13,19,24].混沌的潜在应用包括:大脑神经活动和心脏脉

搏测量分析、图像数据加密、保密通信、电力电网动态分析和保护、工程和民用电子仪器噪声消减、电子震荡发生器设计、航天和航空发动机动态分析和保护、流体混合、信息储存和高速检索、决策预测、系统和模式识别、机械震动故障诊断、计算机图形处理,以及医学和生物、信号处理和通信、控制系统和优化等越来越多的领域和方向.

1.1 Lorenz 系统的科学价值和历史意义

从天气长期预报的"蝴蝶效应"到我们日常生活中的混沌现象,从人脑中的混沌行为到心脏中的混沌脉冲等,混沌在我们的日常生活中无处不在,无时不有[48].

回顾混沌发展的历史,我们不难发现,古人的一些精辟哲学见解和科学论述与我们现在对混沌的认识有惊人的相似之处[19,106]. 1973 年,T.Y.Li 和 J.A.Yorke 发表了一篇奠基性的论文"Period three implies chaos"[45],给出了混沌的第一个数学定义,其含义是有些映射在某种条件下只要有了周期为 3 的解,就会有各种周期的解,从而导致混沌.十分巧合的是,在《老子》中有这样一句话:"道生一,一生二,二生三,三生万物."另外,我们知道混沌的一个基本属性是对初值的极端敏感性,即极其微小的初值变化会引起极其巨大的结果差异.在中国成语中有这样一句家喻户晓的话:"差之毫厘,谬以千里."《易乾凿度》中称:"气似质具而未相离谓之混沌."这些都说明,我们的前辈对混沌已经有了非常形象的描述,而且对其本质认识也非常深刻,尽管两者的含义不尽相同.在国外,则有"Chaos is extremely sensitively to tiny changes of initial conditions"的说法.混沌,这个在中外文化中渊流悠久的词,正在成为具有严格定义的科学概念,并成为一门新科学的名字.而且,它正在促使整个现代知识体系发生巨大的变革、改组和深化.

在混沌发展历史上,尽管 H.Poincaré 和 C.Maxwell 都隐喻过混沌的概念,然而美国著名气象学家、麻省理工学院(MIT)的 E.N.Lorenz 教授因在 20 世纪 60 年代提出 Lorenz 系统[47,48]而被誉为"混沌之父",他开辟了混沌发展的新纪元. Lorenz 系统作为第一个混沌的物理和数学模型,成为后人研究混沌理论的出发点和基石.60 年代以后,数学家、物理学家和各领域的学者们以这个模型为基础,深入研究了混沌的本质,混沌系统的特性,相关的分岔,以及通向混沌的途径等许多问题.可以说,Lorenz 系统的提出极大地激励和推动了混沌学的理论发展和后来混沌在许多工程学科中的应用.它是混沌学发展史上的一个重要的起点和转折点,具有第一个里程碑的意义.

在这里,我们首先简要地回顾一下 Lorenz 提出的,后来以他的名字命名的 Lorenz 系统的历史背景.作为一名气象学家,Lorenz 有一台 Royal Mcbee Lap-300 型的真空管计算机,其速度大约每秒能做一次迭代.1961 年冬的一天,Lorenz 在计

算机上进行关于天气预报的计算，当他得到一个解后，他想知道这个解的长期动力变化行为．为了避免等上几个小时，也不想从头算起，他将记录下来的中间数据当做初始值输入计算机，并指望计算机重复出现上次计算出来的后一段的结果，然后接着算新的．但出乎意外的是，经过一段重复过程后，所获得的计算结果逐渐偏离上次计算的结果．是计算机出了毛病？不！Lorenz 很快意识到，问题出在他输入的数据上：计算机存储的是 6 位小数，如 0.506 172，然而打印出来的却只有 3 位如 0.506．这样一来，若第二次输入时用了后者，每次就会产生千分之几的误差．Lorenz 经过反复思考后意识到，他使用的方程的解并不具有传统数学想像的那种规则的动力行为，而是对初值极为敏感，这种现象后来被称作“混沌”．

1972 年 12 月 29 日，Lorenz 在美国华盛顿召开的美国科学发展协会的第 139 次会议上作关于“致力于全球大气研究计划”的一个专题演讲中问道：“在巴西的蝴蝶拍打一下翅膀会引发得克萨斯州的一场龙卷风吗？”人们后来为这种现象取了一个有趣的名字，叫做“蝴蝶效应”．这种现象表面上看是随机的，不可预报的，而事实上却是按照严格的而且经常是易于表述的规则运动着．蝴蝶效应正是混沌的本质特性——对初值的敏感依赖性的形象体现．这种本质特性的提出正来源于对混沌模型——Lorenz 系统后来的深入研究[48]．实际上，其后的 40 年，人们由对混沌抽象概念的研究转变到对混沌具体模型的研究，并通过有代表性的各种模型的深入研究来揭示混沌的本质，对混沌的动力学特性取得了巨大的进展．这充分表明了 Lorenz 系统在混沌理论及其应用研究历史上的奠基意义．

Lorenz 系统作为混沌的一个数学抽象，说明了一个确定性的系统能够以最简单的方式表现出非常复杂的形态，并展现出至今最复杂而又最迷人的混沌吸引子．现在知道，具有奇怪混沌吸引子的 Lorenz 系统远远不只是用来说明复杂的混沌状态的简单抽象手段，而且还是用来描述现实世界中的某些动力现象的很好的模型．Lorenz 系统的提出并不在于用微分方程产生出个别奇怪吸引子的图像，而在于其新颖的思想——一种导致以后近半个世纪以来关于复杂的非线性现实世界的革命性的再认识和重新思考，从而有了今天非线性科学的灿烂辉煌．

1.2 几种经典而类似的混沌系统

在本节，我们将介绍几个典型的三阶连续自治系统的混沌模型[13,19]，包括第一个混沌模型——Lorenz 系统，简单的 Rössler 系统和第一个物理实现的混沌系统——Chua 电路．

1.2.1 Lorenz 系统

美国著名气象学家 E.N.Lorenz 在 1963 年提出的用来刻画热对流不稳定性

的模型,即 Lorenz 混沌模型[47],可以简单描述如下:

考虑处于均匀重力场中并且底部温度高于顶部温度的流层中的对流问题.它由 Navier-Stokes 方程与热传导方程来描述,其中流函数 ψ 及温度(对称性分布)偏离 θ 为变量.其无量纲形式的方程组为[97]

$$\begin{cases} \partial_t\zeta + u_x\partial_x\zeta + u_y\partial_y\zeta = \partial_x^2\zeta + \partial_y^2\zeta - \dfrac{Ra}{Pr}\partial_x\theta \\ \partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi = \zeta \\ u_x = \partial_y\psi, u_y = \partial_x\psi \\ \partial_t\theta + u_x\partial_x\theta + u_y\partial_y\theta = \dfrac{1}{Pr}(\partial_x^2\theta + \partial_y^2\theta), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中,ζ 为涡度;u 为速度;Pr 为 Prandtl 数;Ra 为 Rayleigh 数.

下面求满足光滑边界条件

$$\begin{aligned} &\psi(x, y = 0) = \psi(x, y = 1) = \theta(x, y = 0) \\ &= \theta(x, y = 1) = \zeta(x, y = 0) = \zeta(x, y = 1) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

的解.将流函数 ψ 与温度偏离 θ 作 Fourier 展开,并取如下两个模

$$\begin{aligned} &\psi(x, y, t) = \frac{k^2 + \pi^2}{\pi k Pr} X(t)\sin(kx)\sin(\pi y), \\ &\theta(x, y, t) = \frac{Ra_c}{\pi Ra}[\sqrt{2}\, Y(t)\cos(kx)\sin(\pi y) - Z(t)\sin(2\pi y)], \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中,k 为 x 的方向矢量;$Ra_c = 27\pi^4/4$ 为临界 Rayleigh 常数.

将方程(1.3)代入方程(1.1),利用 $\sin(kx)\sin(\pi y)$,$\cos(kx)\sin(\pi y)$ 和 $\sin(2\pi y)$ 的系数,可得 $X(t)$,$Y(t)$ 和 $Z(t)$ 应满足的方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = -PrX + PrY \\ \dot{Y} = rX - XZ - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中,$r = Ra/Ra_c$;X 称为速度模;Y 称为温度模;Z 称为温度梯度模;b 是常系数(没有直接的物理意义).

在方程(1.4)中,分别记 X, Y, Z 为 x, y, z,并令 $a = -Pr, c = r$,则得到著名的正则化后的 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \tag{1.5}$$

当参数取值为 $a=10,b=8/3,c=28$ 时，Lorenz 系统有一个混沌吸引子，如图 1-1 所示.

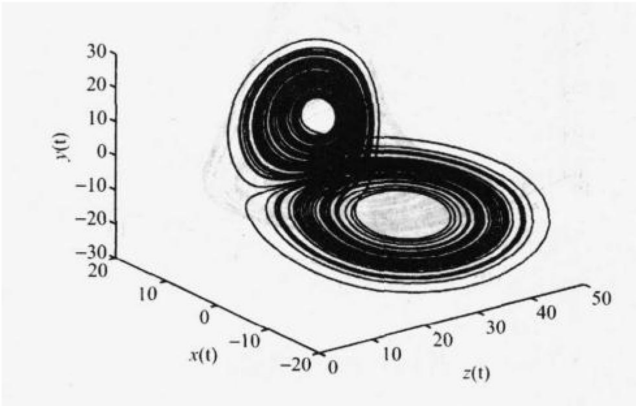


图 1-1 Lorenz 吸引子

尽管 Lorenz 系统起源于大气对流模型，但事实上它是几个物理系统的共同简化模型，如激光装置、磁流发电机及几个相关的对流问题. 图 1-1 仅是一个数值仿真的结果，而数值仿真有时会产生假象，故理论上还需论证. 直到最近，人们才从数学上严格证明了 Lorenz 吸引子的存在性[64,79,81].

1.2.2 Rössler 系统

O.E.Rössler 构造了几个简单但具有混沌行为的非线性方程组，其中最有代表性的是他在 1976 年提出的如下方程组[19,70]：

$$\begin{cases}\dot{x}=-(y+z)\\ \dot{y}=x+ay\\ \dot{z}=z(x-c)+b,\end{cases}\tag{1.6}$$

其中，参数 $a=b=0.2$，而参数 c 常取下列数值之一：

$$2,2.3,3.5,4.7,5.0,5.7,6,7,8,9,10,11$$

我们在此取 $c=5.7$，得到如图 1-2 所示的 Rössler 吸引子. 值得注意的是，Rössler 系统比 Lorenz 系统简单，而且拓扑不等价，即不存在任何同胚变换把一个系统变成另一个系统.

1.2.3 Chua 电路

L.O.Chua 构造的 Chua 电路是第一个真正能够用物理手段实现的混沌系