大学生学习指导丛书

# 高等数学

## 学习指导与提高

【理工类】

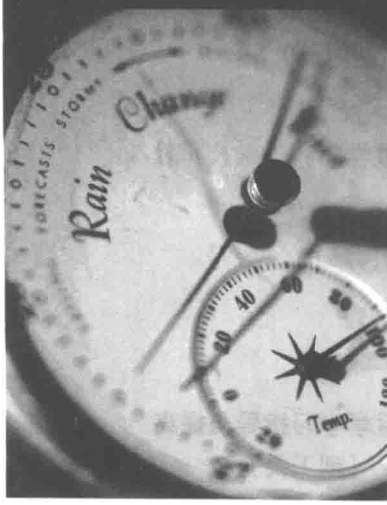
（下 册）

徐 兵 李卫国 编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.com.cn

大学生学习指导丛书

# 高等数学




# 学习指导与提高

［理工类］下

徐　兵　李卫国　编著

北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书是与高等数学教材依章同步的辅助教材，围绕教学基本要求展开、深入：对基本概念、基本性质、基本方法作了较深入的总结、归纳；注重概念、性质及方法的纵向类比分析。书中选择了较多类型的题目解析，以利于学生对上述"三个基本"的掌握。例题中包括对教材中一些典型例题的改编，以增大其知识点；针对学生易见的多发问题的题目的改编，以强调解题思想及要点。本书是一本融入教师教学经验的辅导书。

本书可作为理工科大学生学习高等数学的辅助教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学学习指导与提高. 下册：理工类/徐兵等编著. 一北京：北京航空航天大学出版社，2001.10

ISBN 7-81077-100-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 056996 号

**高等数学学习指导与提高**

[理工类]

下　册

徐　兵　李卫国　编著

责任编辑　郑忠妹

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)　发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

河北省涿州市新华印刷厂印装　各地书店经销

*

开本:787×960　1/16　印张:15　字数:336 千字

2001 年 10 月第 1 版　2001 年 10 月第 1 次印刷　印数:5 000 册

ISBN 7-81077-100-0/O·009　定价:20.00 元

# 出版者序

## 出版的起因

随着我国高等教育改革和高等院校招生数量的不断增长，越来越多的青年学子踏入了大学的校门，开始了人生中最为绚丽多彩的大学生活。面对扑面而来的浓郁的学习气氛，置身于美丽幽静的大学校园，伴随着朗朗的读书声，无数满怀豪情的学子们意气风发，憧憬着美好的未来。当然，莘莘学子主要还是往返于教室和寝室之间，遨游于书海之中。毋庸置疑，大学的生活是浪漫美好的，但也是相当艰辛的，充满了成功的喜悦和失败的沮丧。理工类大学的学习任务相当繁重，加上现在不断压缩学时，使许多学生疲于奔命，且很少答疑，对所学的知识难以深入理解，整体上表现出一种浮躁状态。这一切都给不少同学带来了新的困惑和烦恼。为了使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，同时为帮助所有学生顺利通过各门功课，尤其是大学基础课程的考试，使他们能够不致过于艰辛地学完所有的课程。这便是我们推出这套丛书的出发点，也是我们组织出版这套丛书的主要目的所在。书中的个别地方的难度略大，主要是为部分学生日后考取研究生而做的铺垫性工作，并不是对所有学生的要求。

## 同类书的现状和推出本丛书的着眼点

面对五彩缤纷的同类图书，如果我们仔细观察，就会发现这些图书一直沿用着教材→辅导书→习题解答的老路在循环往复地进行。而所谓的辅导也仅是把教材中的内容加以重复而已。这就使学生有意无意间掉进了某个教材的旋涡，而不能真正抓住大纲所要求的知识点，从而导致了学生的视野狭窄，在以后的研究生入学等考试时陷于茫然不知所措的地步。

实际上，对于学生来说，必须明白的是，教材只是教学大纲的一种体现形式，日后的研究生入学考试等并不会测定学生对某种教材的掌握程度，而是要测定对大纲中所要求的知识的掌握程度。这就要求在学习时，紧扣教材，但不拘泥于教材，要在教材的基础上适当扩展视野，以大纲为主线进行学习。这是大学学习与中小学学习的最大区别，而且对于在读的天之骄子来说，掌握了方法和明确了学习的思路后，实现起来并不困难。

从学习的角度来看，一个人对新知识的学习的过程一般是“学习→理解→模糊和淡忘→再学习(复习)→再理解→…→与自身已有的知识融合”。这种规律是客观存在的，也是学校实行“讲课→作业→考试”模式的重要依据。无疑，这种教与学过程的模式化是必要的，关键是如何灵活地运用这种模式，不使学生因遵循这种模式而僵化了思路。从这一点上看，我们推出这套紧扣大纲而超越某一版本教材的辅导书，正是这样一种尝试。

## 编写的风格和宗旨

在本丛书策划启动时，我们与有关作者反复讨论，确定了本套丛书所要遵循的原则如下：

1. **强化大纲要求，摆脱具体教材的束缚**。如前所述，大学教学的主要目的是让学生掌握大纲所要求的知识，而不是某一个版本的教材，本丛书内容安排均是依照教学大纲而进行的，包括了教学大纲所要求的全部知识要点，而且绝大部分教材的内容也是依此安排的。这样本丛书的总体布局，甚至章节设置都与大部分教材是一致的，可使学生在学习的过程中，同步使用我们的学习指导书。

2. **强调学习和做题的技巧，减少习题的数量**。做习题，实际上是对所学知识的巩固，但在一定程度上又要综合运用各方面的知识，超过了巩固知识的基本要求，而是在此基础上有所提高。于是，有些学生增加了做题的数量，力求面面俱到。这其实是不可能的，也是不必要的。大学教学的主要要求是掌握教学大纲所要求的基本知识点，并不要求学生能够求解超级难题。因此，只要掌握一定的解题技巧，能够求解中等难度的习题即可。本丛书的例题讲解多，目的是要介绍更多的技巧；习题数量有限，是既要达到复习巩固的目的，又要避免陷入茫茫题海，浪费宝贵的时间。

3. **着眼日常学习，突出应试能力**。学校考核角度来看，考试是衡量学生是否达标的基本方式。从学习角度来看，考试是促进学生把本阶段所学的知识与自身已有的知识融合起来的、达到综合提高的目的。因此，应该从两方面着手：一是临场的做题能力；二是综合提高的能力。基于这种考虑，我们在书中增加了期中和期末考试模拟题。一则是给学生多提供一个自我检测的机会，另则是促进学生全面理解所学的内容。

## 我们的期望

一个新生命的诞生是可以由父母控制的；而一旦诞生，其成长和发展却是其父母所无法完全控制的，也是不以任何人的意志而转移的；每个生命都依照其自身的规律成长、发展，是惟一的、个性化的。本丛书是我们一手策划的，其影响和作用却不是我们所能够完全左右的，它的成败最后取决于读者的认可程度。我们期望，它能够为所有选用它的学生提供一些必要的帮助，使他们顺利学完该课程，并为日后的学习和工作打下坚实的基础。当然，学习是一个复杂的过程，并不是一套丛书能够完全解决的。同时，我们也期望读者在通过我们的图书得到知识之际，能够培养出勤奋、严谨的学习态度和坚韧顽强、不屈不挠的意志。这是所有成功人士必须具备的个人素质！

最后，向所有选用我们这套丛书的读者致意。你们的支持是我们的动力，你们的成绩也是我们的骄傲！

**北京航空航天大学出版社**

# 前　言

高等数学课程是学生进入大学后的第一门课程，是理工科大学的重要的基础课，也是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力和空间想像力的重要课程。学生能否较全面、较深入地掌握它的基本内容将直接影响到其他后续课程的学习，因此，其在大学学习中占有极其重要的地位。

高等数学课常常由于其内容的高度抽象性与概括力、严密的逻辑性、独特的“公式语言”、简练的表达方式而成为学生入大学学习之后的第一个难关。为了帮助学生学好高等数学，本书定位在使其成为学生学习高等数学的“导学”，以引导学生深入学习。本书围绕教学基本要求展开、深入。通过对基本知识的概括、例题解析或思考题等形式，对基本概念的要素、基本性质的特征、基本方法的要点给予了较深入的总结归纳。对于概念间的纵向联系，例如定积分、二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分等概念，对它们各个定义的知识结构、几何意义、物理解说进行对比，以发现它们之间的内在联系，从而加强对各概念的理解。同样，对它们的基本性质进行纵向类比，以加深对性质的理解。书中引入了较多类型的例题，以期开拓学生的思路，从中学习解决问题的分析方法。有些题目是对教科书中例题进行改编，使之包含更多的知识点；或将解题思路开阔，加深对教材的理解。有些题目是依据平时学生中易见的多发问题的题目改编而成，以期能强调解题的基本思想及要点。因此可以说本书融入了教师的教学经验。作者的目的是能为学生提供一本适宜自学的优秀辅助教材。

本书在每章末有一份自测题及答案。在书中的相关部位配有北京航空航天大学 1999 年与 2000 年上、下学期期中与期末考试高等数学试题，并配有这些试题的参考解答，作为读者阶段检测题。

本书分上、下两册，上册第一章至第六章由李卫国副教授编写，下册第七章至第十一章由徐兵教授编写。由徐兵统稿。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程的参考书。

书中疏漏与不妥之处，请读者指正。

编　者

于北京航空航天大学

2001 年 6 月

# 目　录

# 第 七 章

# 多元函数微分法及其应用

## 7.1 多元函数的基本概念

### 7.1.1 概 要

一、多元函数

1. 二元函数

**定义 1** 若变量 $x,y$ 在其可能取值的某一范围内的每一组值,变量 $z$ 依照某一法则有确定值与之对应,则称 $z$ 为 $x,y$ 的**二元函数**,常记为 $z = f(x,y)$。

设 $z = f(x,y)$ 的定义域为 $D$,则在空间直角坐标系中 $z = f(x,y)$ 表示一张空间曲面,且这个空间曲面在 $Oxy$ 坐标面上的投影即为**函数的定义域** $D$。

2. 多元函数

**定义 2** 若变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在其可能取值的某一范围内的每一组值,变量 $z$ 依照某一法则有确定值 $z$ 与之对应,则称 $z$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n$ **元函数**,常记为 $z = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

二元及多于二元的函数统称为多元函数。

3. 多元函数的两个要素(定义域、依赖关系)

与一元函数相仿,多元函数中也有两类基本问题:

(1) 求函数的定义域。

(2) 函数符号的运用:

① 已知二元函数 $f(x,y)$ 的表达式,求复合函数 $f[u(x,y),v(x,y)]$;

② 已知 $f[u(x,y),v(x,y)]$ 的表达式,求 $f(x,y)$ 的表达式。

二、多元函数的极限

以二元函数为例。

**定义 3** 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义,$P(x,y)$ 为该邻域内任意一点。当 $P(x,y)$ 以任意方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的值都趋近于某一确定的常数 $A$,则称 $A$ 是函数 $z = f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

通常求二元函数的极限并不是一件容易的事。对于一些较简单的情形，可以利用一元函数极限存在的两个准则、两个重要极限公式来求其极限。

与一元函数极限的性质："两个不同子列的极限不同，则函数必定不存在极限"相仿，若二元函数的沿两个不同路径的极限值不同，则该二元函数必定不存在极限。

特别地，如果$\lim\limits_{kx \to 0} f(x, y) = \varphi(k)$，则$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$必定不存在。这通常可以作为判定极限不存在的充分条件。

二元函数的极限与一元函数的极限相仿，也满足四则运算法则。

三、多元函数的连续性

以二元函数为例。

**定义 4** 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义，当该邻域内的点 $P(x, y)$ 以任意方式趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $z = f(x, y)$ 的极限存在，且等于该函数在点$P_0(x_0, y_0)$处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ **在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续。**

如果 $z = f(x, y)$ 在区域 $D$ 内的每个点$(x, y)$处都连续，则称函数 $z = f(x, y)$ **在区域 $D$ 内连续。**

多元函数具有下列性质和定理。

(1) **性质 1** 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数。在分母不为零的点处，连续函数的商仍为连续函数。

(2) **性质 2** 多元连续函数的复合函数也是连续函数。

(3) **性质 3** 多元初等函数在其定义区域上都是连续函数。

(4) **最大(小)值定理** 有界闭区域 $D$ 上的连续函数，在区域 $D$ 上必能取得最大值与最小值。

(5) **介值定理** 有界闭区域 $D$ 上的连续函数，在区域 $D$ 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值。

通常下面五类函数统称为二元基本初等函数：

(1) 幂函数 $z = x^n, z = y^n$；

(2) 指数函数 $z = a^x, z = a^y$；

(3) 对数函数 $z = \log_a x, z = \log_a y$；

(4) 三角函数 $z = \sin x, z = \sin y, \cdots, z = \csc x, z = \csc y$；

(5) 反三角函数 $z = \arcsin x, z = \arcsin y, \cdots, z = \operatorname{arccot} x, z = \operatorname{arccot} y$。

相仿定义多元基本初等函数。

多元基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的能用一个解析式子所表示

的函数称为多元初等函数。

与一元函数相仿：

多元基本初等函数在其定义域内为连续函数；

多元初等函数在其定义区域内为连续函数。

注意上面两种提法的差异!

以后判定多元函数在某点处是否连续，可以先判定其是否为多元初等函数，再判定所给点是否在函数的定义区域之内。这样能简化运算。由此又可以推知，欲求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$，只须判定 $f(x,y)$ 在 $P_0$ 点是否连续；若 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 连续，则由连续性定义可知

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

这为我们提供了求极限的简便可行的方法。

请读者考虑几个思考题：

**思考题 1** 若对于 $z=f(x,y)$，当把 $y$ 看作是任意常数时，$z$ 为 $x$ 的连续函数；又当把 $x$ 看作是任意常数时，$z$ 为 $y$ 的连续函数，是否 $f(x,y)$ 必定为连续函数?

**思考题 2** 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，是否 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 必定连续?若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在，是否 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 必定不连续?又若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，是否 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 必定存在?

下面给出思考题的分析：

(1) 对于思考题 1，考察

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

若将 $y$ 固定时，则 $z=f(x,y)$ 为 $x$ 的连续函数。若将 $x$ 固定时，则 $z=f(x,y)$ 为 $y$ 的连续函数。但是 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。

(2) 对于思考题 2，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，不一定有 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，但若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在，可知 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处必定不连续。若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 必定存在，且等于 $f(x_0,y_0)$。

### 7.1.2 教学基本要求与重点

**教学基本要求**

1. 理解多元函数概念。

2. 了解二元函数的极限、连续性等概念以及有界闭区域上连续函数的性质。

**重点** 多元函数概念。

### 7.1.3 典型例题解析

**【例 7.1.1】** 求函数 $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域。

〖解析〗 由 7.1.1 小节一中可知求多元函数定义域，就是要求出使其表达式有意义的点的全体。与一元函数求定义域相仿，需考虑：

分式的分母不能为零；

偶次方根号下的表达式非负；

对数的真数大于零；

反正弦、反余弦中的表达式绝对值小于等于 1 等。

因此，在本例中有：

$$y-x>0,\quad x\geqslant 0,\quad 1-x^2-y^2>0$$

其图形如图 7－1 中的阴影部分。

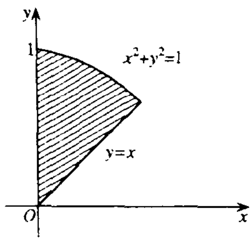



图 7－1

**【例 7.1.2】** 已知 $f(x,y)=3x+2y$，求 $f(1,f(x,y))$。

〖解析〗 由题设知 $f(x,y)=3x+2y$，这意味着

$$f(\square,\bigcirc)=3\cdot\square+2\cdot\bigcirc$$

其中 □，○ 分别表示 $f$ 的表达式中第一个位置和第二个位置的元素，因此

$$f(1,f(x,y))=3\cdot 1+2f(x,y)=3+2(3x+2y)=6x+4y+3$$

**【例 7.1.3】** 已知 $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)=x^3-2xy^2+3y$，求 $f(x,y)$。

〖解析〗 例 7.1.3 与例 7.1.2 是相反性质的问题。

令 $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{1}{y}$，则 $x=\dfrac{1}{u},y=\dfrac{1}{v}$，因此由所给表达式可得

$$f(u,v)=\frac{1}{u^3}-\frac{2}{uv^2}+\frac{3}{v}$$

因此

$$f(x,y)=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{xy^2}+\frac{3}{y}$$

**【例 7.1.4】** 设 $z=\sqrt{x}+f(\sqrt{y}-1)$，当 $x=1$ 时，$z=y$，求 $f(u)$ 及 $z=z(x,y)$ 的表达式。

〖解析〗 由题设当 $x=1$ 时，$z=y$，因此有

$$y=\sqrt{1}+f(\sqrt{y}-1),\qquad f(\sqrt{y}-1)=y-1$$

令 $u=\sqrt{y}-1$，则 $y=(u+1)^2$，

$$f(u)=(u+1)^2-1=u^2+2u$$

可得知

$$z=\sqrt{x}+(\sqrt{y}-1)^2+2(\sqrt{y}-1)=\sqrt{x}+y-1$$

【例 7.1.5】　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$。

〖解析〗　多元函数极限与一元函数的极限的运算性质相同，因此可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2$$

【例 7.1.6】　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$。

〖解析〗　由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1-xy)=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+y^2)=1$，可知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1-xy)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+y^2)}=1$$

【例 7.1.7】　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$。

〖解析〗　由于

$$\lim_{y=kx\to 0}\frac{xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{y=kx\to 0}\frac{k^2x^3}{x^3+k^3x^3}=\frac{k^2}{1+k^3}$$

可知其极限值依赖于$k$，表示沿着不同的直线$y=kx$，当点$(x,y)\to(0,0)$时极限值不相同，因此$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$不存在。

【例 7.1.8】　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$。

〖解析〗　由于

$$\lim_{y=kx\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y=kx\to 0}\frac{xk^2x^2}{x^2+k^4x^4}=0$$

但这并不能说明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=0$。

事实上

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y^2=kx\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{kx}\to 0}}\frac{xkx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

这表明沿不同的路径$(x,y)\to(0,0)$时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$值不相同，因而所给极限不存在。

【例 7.1.9】 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$。

〖解析〗 当$\begin{matrix}x\to 0\\ y\to 0\end{matrix}$时,所给函数的分子、分母极限皆为 0,因此不能利用极限的四则运算法则。注意到当 $xy\to 0$ 时,$\ln(1+xy)\sim xy$。又由于

$$\lim_{\substack{x=\frac{k\tan y}{y-k}\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}=\lim_{\substack{x=\frac{k\tan y}{y-k}\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+\tan y}=k$$

可知所给极限不存在。

**说明** 要想判定极限不存在,可以选择一些特殊路径,使所给函数沿不同路径趋于给定点的极限不同。但这些特殊路径往往较难选择,常可采取倒推的方法来选择路径,如设 $x\to 0$, $y\to 0$ 时,$\dfrac{xy}{x+\tan y}\to k$。不妨取

$$\frac{xy}{x+\tan y}=k$$

则有

$$xy=kx+k\tan y,\quad x=\frac{k\tan y}{y-k}$$

当 $y\to 0$ 时,$x\to 0$,因此选择特殊路径 $x=\dfrac{k\tan y}{y-k}$。

【例 7.1.10】 判定 $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$ 在何处间断。

〖解析〗 由连续性的定义可知当 $\sin x=0$,即 $x=k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$;或 $\sin y=0$,即 $y=k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时所给函数间断。

【例 7.1.11】 求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^2+y^2}{\sin x\cdot\cos y^2}$。

〖解析〗 由于在 $x=1, y=2$ 时,函数$\dfrac{x^2+y^2}{\sin x\cdot\cos y^2}$连续,则可知

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{x^2+y^2}{\sin x\cdot\cos y^2}=\frac{1^2+2^2}{\sin 1\cdot\cos 2^2}=\frac{5}{\sin 1\cdot\cos 4}$$

**说明** 连续函数的极限值等于函数在该点值,这为求极限提供了简便方法。因此,如果求$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$应该先判定$(x_0,y_0)$是否为 $f(x,y)$ 的连续点,这与一元函数的问题相仿。

【例 7.1.12】 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

判定$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在且 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处是否连续？

【解析】　欲考察$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 的存在性，也可以采用下面方法：

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，如果不论 $\theta$ 为何值 $\lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=a$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=a$。

由于

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^{3/2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\sin^2\theta=0$$

可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0=f(0,0)$。因此可知 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处连续。

本例也可利用夹逼定理求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$。

由于

$$0\leqslant\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

因此

$$0\leqslant\left|\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$$

可得

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\left|x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right|$$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/2}\left|x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right|=0$，因此由夹逼定理可得知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0=f(0,0)$$

$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处连续。

## 7.2　多元函数微分法

### 7.2.1　概　要

一、偏导数

1. 偏导数的定义

**定义 1**　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U$ 内有定义，点 $P(x_0+\Delta x,y_0)$ 为 $U$ 内的点，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称这个极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的**偏导数**,常记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f_x'(x_0,y_0)$$

类似地,若点 $P(x_0,y_0+\Delta y)$ 为 $U$ 内的点,如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称这个极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 $y$ 的**偏导数**,常记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f_y'(x_0,y_0)$$

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 $U$ 内每一点都有偏导数 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$,则可以将这两个偏导数认定为二元函数,称之为**偏导函数**,简称**偏导数**。相应地称 $f_x'(x_0,y_0)$ 为偏导函数 $f_x'(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的函数值。

相仿可以定义三元函数以至 $n$ 元函数的偏导数。

2. 二元函数偏导数的几何意义

设 $M(x_0,y_0,f_0(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点。过点 $M$ 作平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交,其交线为平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f(x,y_0)$,即 $\begin{cases}z=f(x,y_0)\\y=y_0\end{cases}$,则 $f_x'(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 $M$ 处的切线对 $x$ 轴的斜率;同样,过点 $M$ 作平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交,其交线为平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f(x_0,y)$,则 $f_y'(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 $M$ 处的切线对 $y$ 轴的斜率。

3. 偏导数的计算

由偏导数的定义可知,若 $z=f(x,y)$,欲求 $z$ 对 $x$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$,只须将 $y$ 认定为常数,即将 $z=f(x,y)$ 认定为 $x$ 的一元函数,再依一元函数的求导法则求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 即可。

由偏导数的定义可知偏导数也与一元函数导数运算相仿,满足四则运算法则。

二、全微分

1. 全微分的定义

**定义 2** 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义, $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为该邻域内的任意一点。$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$。若 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$,其中 $A$, $B$ 与 $\Delta x$, $\Delta y$ 无关,且当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 趋于零时, $\Delta z-\mathrm{d}z$ 为 $\rho$ 的高阶无穷小,即

$$\Delta z - \mathrm{d}z = o(\rho)$$

则称 $\mathrm{d}z$ 为 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的**全微分**。

如果 $f(x,y)$ 在区域 $U$ 内的每一点 $(x,y)$ 都可微分，则称 $f(x,y)$ 在 $U$ 内可微分。若 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微分，可以将其值理解为微分函数 $\mathrm{d}z$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的函数值，常记为 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\mathrm{d}z\Big|_{P_0}$。

2. 全微分的几何意义

全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}y$ 在几何上可以解说为 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处相应于自变量 $x,y$ 分别取增量为 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$ 时，切平面的增量。

3. 全微分的性质

**性质 1(全微分存在的必要条件)**　设 $z=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微分，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处存在偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_P,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_P$，且

$$\mathrm{d}z\Big|_P=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P\mathrm{d}y$$

若 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微分，则在 $D$ 内 $z=f(x,y)$ 存在偏导数，且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

**性质 2(全微分存在的充分条件)**　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处存在连续偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_P,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_P$，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微分，且

$$\mathrm{d}z\Big|_P=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P\mathrm{d}y$$

若 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内存在连续偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微分，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

性质 2 提供了求 $\mathrm{d}z$ 的方法。欲求 $\mathrm{d}z$，只需先求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。如果 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 为连续函数，则有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

从而免去了用定义求全微分时的麻烦。

若求分段函数 $z=f(x,y)$ 在分段点处的偏导数或微分，则应依定义来考察。

三、方向导数与梯度

1. 方向导数的定义

**定义 3**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，自点 $P$ 引有向直线段 $PM$ 与 $x$ 轴的正向成角 $\alpha$，称之为**方向 $l$**。设点 $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为 $PM$ 上的点，且点 $P_1$ 在点 $P$

的上述邻域内。记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，如果极限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 自点 $P$ **沿方向 $l$ 的方向导数**，记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}$$

相仿可以定义三元函数的方向导数。

2. 方向导数的性质

**定理 1（方向导数存在的充分条件）** 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的，则在该点它沿任一方向 $l$ 的方向导数均存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \cos\beta$$

同样，如果三元函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微分，方向 $l$ 的方向余弦分别为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿 $l$ 的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P \cos\gamma$$

3. 梯　度

**定义 4** 设 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 的某邻域内有偏导数，则称向量 $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\right)$ 为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度。

梯度方向是函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 变化率最大的方向。

梯度的模，即 $\sqrt{\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\right)^2}$ 是函数在点 $P$ 的所有方向导数中最大的方向导数值。

四、复合函数的微分法

1. 复合函数微分法定理

**定理 2** 设函数 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处有连续偏导数，函数 $z = f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 处有连续偏导数，则复合函数 $z = f(u(x,y), v(x,y))$ 在点 $(x,y)$ 处有对 $x$ 与 $y$ 的连续偏导数，且由下列链式法则给出：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

相仿，对于中间变量多于两个或中间变量少于两个的情形也有类似的链式法则。

2. 特殊情形

(1) 例如 $z = f(u(x,y), x, y)$ 满足上述定理条件，则有