面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

离散数学
提要及习题解答

李盘林　李丽双　李　洋　王春立

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

离散数学
提要及习题解答

李盘林　李丽双　李　洋　王春立

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是与高等教育出版社出版的《离散数学》(李盘林等编著)配套的教学内容提要和习题解答,但也可单独使用.本书包括数理逻辑、集合论、数论、代数结构和图论共5部分的内容提要、学习要求和习题解答,有助于读者理解、掌握《离散数学》的内容.

本书可作为高等学校计算机科学与技术及相关专业离散数学课程的教学参考书,也可供教师、研究生、本科生和有关技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学提要及习题解答/李盘林等.—北京:高等教育出版社,2002.8 (2003 重印)
ISBN 7-04-011253-1

Ⅰ.离... Ⅱ.李... Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048242 号

离散数学提要及习题解答
李盘林 李丽双 李洋 王春立

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　址	http://www.hep.edu.cn
传　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京中科印刷有限公司		
开　本	787×960 1/16	版　次	2002 年 8 月第 1 版
印　张	12.75	印　次	2003 年 5 月第 2 次印刷
字　数	220 000	定　价	15.20 元

责任编辑　董建波
封面设计　张　楠
责任绘图　尹文军
责任印制　宋克学

前　　言

离散数学不仅是计算机科学与技术专业必修的核心课程,也是其他某些专业和工程技术人员所需要的.由高等教育出版社于1999年6月出版的《离散数学》(李盘林等编著)教材问世两年来,相继印刷4次,受到了师生们的认可和好评.在多年的教学实践中,我们发现,学生在做教材中的习题时,会感到一定的困难,而教师又不可能对习题在课堂上做面面俱到地讲解,因而师生们希望出版配合教材的题解书;另一方面,自学者或参加研究生考试的人员,也迫切需要有一本配合教材的题解作为参考书.为此,我们编写了这本书,目的是为了便于读者复习、理解教材中各章节的基本理论及它们之间的联系,并给出了教材中各章的内容提要和学习要求,它相当于一部详细的复习提纲.

在本书出版过程中,得到大连理工大学有关领导的关心,得到了张华女士的帮助,在此向他们表示诚挚的谢意.

由于时间紧、水平有限,书中难免有不足甚至错误之处,恳请广大读者批评指正.

编者

2001.10

目　　录

第三篇　数　论

第四篇　代数结构

第五篇　图　论

第一篇　数 理 逻 辑

第一章　命题逻辑

一、内容提要

1．与命题相关的概念

命题的定义，真值，原子命题，命题标识符（或称命题符号化），命题常元，命题变元，指派（或称解释）．

2．与联结词相关的概念

联结词的定义（主要是否定联结词、合取联结词、析取联结词、条件联结词、双条件联结词、异或联结词），复合命题，联结词的扩充与功能完全组．

3．与命题合式公式相关的概念和定理

合式公式的归纳定义，公式解释，真值表，公式分类（有重言式，矛盾式和可满足式），等价式（书中列出的 14 个基本等价式，或称命题定律），对偶式，代入规则，替换规则，蕴涵式（书中列出的 15 个基本蕴涵式，或称推理定律），公式标准型（有析取范式，合取范式，主析取范式，主合取范式）．

主要定理：定理 1.6.3，定理 1.7.3、定理 1.7.4．

4．命题逻辑的推理理论

前提与有效结论的定义，推理规则（有 P 规则，T 规则，CP 规则），推理定律，判断有效结论的常用方法（有真值表法，演绎法，间接证法）．

二、学习要求

1．熟练掌握内容：

常用联结词，命题符号化，合式公式，公式分类，推理规则，推理定律（包含命题定律），判断有效结论的构造推理证明方法．

2．掌握内容：

命题，公式解释，真值表，对偶式，代入规则，替换规则，公式标准型（有析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式），判断有效结论的真值表法和间接证法．

3．了解内容：

联结词的扩充，对偶定理的证明．

三、习题及其参考解答

1. 分析下列语句哪些是命题,哪些不是命题;如果是命题,指出它的真值.

① 北京是中国首都.

② 大连是多么美啊!

③ $11+1=100$.

④ 请勿吸烟!

⑤ $6+8\geqslant 14$.

⑥ 明天有离散数学课吗?

⑦ 不存在最大素数.

⑧ $x+y<9$.

⑨ 所有素数都是奇数.

⑩ 实践出真知.

解 ①、⑤、⑦、⑨和⑩是命题,其中①、⑤、⑦和⑩的真值是真,而⑨的真值是假,因为 2 是素数,但它不是奇数,是偶数.

②是感叹句,④是祈使句,⑥是疑问句,这些都不是陈述句,故不是命题.

③在二进制中为真,在十进制中为假,需根据上下文才能确定其真值.

⑧真值无法确定,故不是命题.

2. 试给出三个语句是真命题、三个语句是假命题和三个语句不是命题的实例.

解 略

3. 设 P 表示原子命题"天下雨",Q 表示原子命题:"我将去新华书店",R 表示原子命题:"我有时间",试以符号形式表示下列命题:

① 如果天不下雨并且我有时间,那么我将去新华书店.

② 我去新华书店,仅当我有时间.

③ 天不下雨.

④ 天下雨,那么我不去新华书店.

⑤ 除非天不下雨,我将去新华书店.

解 ①符号化为$(\neg P\wedge R)\rightarrow Q$

②符号化为 $Q\rightarrow R$

③符号化为$\neg P$

④符号化为 $P\rightarrow\neg Q$

⑤符号化为$\neg P\rightarrow Q$

4. 将下列命题符号化:

① 小李一边看书,一边听音乐.

② 老李或小赵是球迷.

③ 只要努力学习,成绩就会好的.

④ 只有休息好,才能工作好.

⑤ 大雁北回,春天来了.

解　①令 P:小李看书,Q:小李听音乐.则①可符号化为:$P\wedge Q$.

②令 P:老李是球迷,Q:小赵是球迷.则②可符号化为:$P\vee Q$.

③令 P:努力学习,Q:成绩会好的.则③可符号化为:$P\rightarrow Q$.

④令 P:休息好,Q:工作好.则④可符号化为:$Q\rightarrow P$.

⑤令 P:大雁北回,Q:春天来了.则⑤可符号化为 $P\leftrightarrows Q$.

5. 试给出四个语句,符号化后分别是合取式,析取式,条件式,双条件式.

解　略

6. 求下列公式的真值表:

① $P\rightarrow(Q\vee R)$

② $(\neg P\wedge Q)\vee(Q\rightarrow R)$

③ $\neg(P\vee Q)\leftrightarrows(\neg P\wedge\neg Q)$

④ $((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\wedge(P\wedge R))\rightarrow Q$

解　①的真值表是:

$P\ Q\ R$	$Q\vee R$	$P\rightarrow(Q\vee R)$
0 0 0	0	1
0 0 1	1	1
0 1 0	1	1
0 1 1	1	1
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

②的真值表是:

$P\ Q\ R$	$\neg P$	$\neg P\wedge Q$	$Q\rightarrow R$	$(\neg P\wedge Q)\vee(Q\rightarrow R)$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	1	1
0 1 0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	1	1
1 1 0	0	0	0	0
1 1 1	0	0	1	1

③的真值表是：

P	Q	$\neg(P\vee Q)$		$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg(P\vee Q)\rightleftarrows(\neg P\wedge\neg Q)$
0	0	1	0	1 1 1	1
0	1	0	1	1 0 0	1
1	0	0	1	0 0 1	1
1	1	0	1	0 0 0	1

④的真值表是：

$P\,Q\,R$	$((P\to Q)\wedge(R\to Q)\wedge(P\wedge R))\to Q$			
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	1	1
1 1 0	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1

7. 若 $P\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$ 或 $P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$，是否都有 $P\Leftrightarrow Q$？若 $\neg P\Leftrightarrow\neg Q$，是否有 $P\Leftrightarrow Q$？

解　若 $P\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$ 或 $P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$，未必有 $P\Leftrightarrow Q$，因为对于 $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee R$，只要 R 为真，则不管 P、Q 为何，恒有 $P\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$，但未必有 $P\Leftrightarrow Q$；对于 $P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$，只要 R 为假，则不管 P、Q 为何，恒有 $P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$，但未必有 $P\Leftrightarrow Q$.

若 $\neg P\Leftrightarrow\neg Q$，则恒有 $P\Leftrightarrow Q$，因为 $\neg(\neg P)\Leftrightarrow\neg(\neg Q)$，即 $P\Leftrightarrow Q$.

8. 证明下列等价式：

① $P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg P\to(P\to\neg Q)$

② $\neg(P\rightleftarrows Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$

③ $\neg(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

④ $P\to(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\to R$

⑤ $(P\to R)\vee(Q\to R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\to R$

⑥ $\neg P\rightleftarrows Q\Leftrightarrow\neg(P\rightleftarrows Q)$

证明　证明等价式可以有真值表法、演算法等.

① 从左边开始演算

$P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee P)$　　　　（条件式转化律）

$$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee \neg Q) \qquad \text{(交换律、结合律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg P \to (P \to \neg Q) \qquad \text{(条件式转化律)}$$

本题也可从右边开始演算

$$\neg P \to (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg\neg P \vee (\neg P \vee \neg Q) \qquad \text{(条件式转化律)}$$
$$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee \neg Q) \qquad \text{(双否定)}$$
$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \qquad \text{(交换律、结合律)}$$
$$\Leftrightarrow P \to (Q \to P) \qquad \text{(条件式转化律)}$$

此外,左边可化为:

$$P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P)$$
$$\Leftrightarrow T$$

右边可化为:

$$\neg P \to (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg\neg P \vee (\neg P \vee \neg Q)$$
$$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee \neg Q)$$
$$\Leftrightarrow T$$

故　左边⇔右边.

本题利用真值表也可得到证明:

P	Q	P	$\to$	$(Q \to P)$	$\Leftrightarrow$	$\neg P$	$\to$	$(P \to \neg Q)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0	0
		②	①	④	①	③	②	①

由表中可见,等价式成立.

② 从左边开始演算

$$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P))$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q))$$
$$\Leftrightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$
$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

③ 从右边开始演算

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$$
$$\Leftrightarrow \neg(P \to Q)$$

④ 从左边开始演算

$$\begin{aligned} P\to(Q\vee R) &\Leftrightarrow \neg P\vee(Q\vee R)\\ &\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee R\\ &\Leftrightarrow\neg(P\wedge\neg Q)\vee R\\ &\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\to R \end{aligned}$$

⑤ 从左边开始演算

$$\begin{aligned} (P\to R)\vee(Q\to R) &\Leftrightarrow(\neg P\vee R)\vee(\neg Q\vee R)\\ &\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee R\\ &\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee R\\ &\Leftrightarrow(P\wedge Q)\to R \end{aligned}$$

⑥ 从右边开始演算

$$\begin{aligned} \neg(P\leftrightarrows Q) &\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q) && \text{根据②}\\ &\Leftrightarrow(\neg P\to Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\\ &\Leftrightarrow(\neg P\to Q)\wedge(Q\to\neg P)\\ &\Leftrightarrow\neg P\leftrightarrows Q \end{aligned}$$

9. 试证明下列各公式是重言式.

① $(P\wedge(P\to Q))\to Q$

② $\neg P\to(P\to Q)$

③ $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$

④ $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

证明 证明重言式成立方法也有多种.

① 用等价演算法判别①为重言式.

$$\begin{aligned} (P\wedge(P\to Q))\to Q &\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg P\vee Q))\vee Q && \text{(条件式转化律)}\\ &\Leftrightarrow\neg((P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q))\vee Q && \text{(分配律)}\\ &\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee Q && \text{(德·摩根律)}\\ &\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee Q) && \text{(结合律)}\\ &\Leftrightarrow T && \text{(排中律,零律)} \end{aligned}$$

② 使用等价演算法

$$\begin{aligned} \neg P\to(P\to Q) &\Leftrightarrow\neg\neg P\vee(\neg P\vee Q)\\ &\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)\\ &\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\vee Q\\ &\Leftrightarrow T. \end{aligned}$$

③ 使用真值表法

$P\ Q\ R$	$((P\to Q)$	$\wedge$	$(Q\to R))$	$\to$	$(P\to R)$
0 0 0	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	0	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	0	1	1	0
1 0 1	0	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1	1
	①	②	①	③	①

从第③步可知,原公式是重言式.

④ 使用真值表法证之.

$P\ Q\ R$	$(P\to$	$(Q\to R))$	$\to$	$((P\to Q)$	$\to$	$(P\to R))$
0 0 0	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	0	1	0
1 0 1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	0	0	1	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1
	②	①	③	①	②	①

由③步可知,原公式是重言式.

10. 试证明下列等价式,并指出它们的对偶式.

① $\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee(\neg P\vee Q))\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

② $(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge(\neg P\wedge Q))\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$

③ $(Q\vee\neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge P))\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

证明

① 用等价演算证之

$$
\begin{aligned}
\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee(\neg P\vee Q)) &\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)\\
&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)\\
&\Leftrightarrow(P\vee(\neg P\vee Q))\wedge(Q\vee(\neg P\vee Q))\\
&\Leftrightarrow Q\vee(\neg P\vee Q))\\
&\Leftrightarrow\neg P\vee Q
\end{aligned}
$$